621
M. 27

S.N.C.
SECT. PROIECTARI

Lei 28,80

CINETOSTATICA ȘI DINAMICA MECANISMELOR

TEORIA MECANISMELOR ȘI A MAȘINILOR

CINETOSTATICA ȘI DINAMICA

N. I. MANOLESCU ★ D. MAROS

EDITURA TEHNICĂ

621
M.27

TEORIA MECANISMELOR ŞI A MAŞINILOR

S. N. G.
Nr.
SECT. PROIECTĂRI

CINETOSTATICA ŞI DINAMICA

Conf. Ing. N. I. MANOLESCU ★ Conf. Ing. D. MAROS

ICEPRONAV
BIBLIOTECA TEHNICĂ
1763

S. N. G.
Bibliotecă
14.704

EDITURA TEHNICĂ BUCUREŞTI 1958

PREFAȚA

Volumul de față reprezintă ultimele două părți ale „Teoriei mecanismelor și a mașinilor", adică Cinetostatica și Dinamica mecanismelor și a mașinilor.

Materialul este prezentat astfel, încît să poată fi utilizat de tehnicieni, ingineri și studenți și în special de aceștia din urmă la studiul disciplinei care se predă astăzi în toate facultățile de specialitate din învățămîntul tehnic superior. Această disciplină a fost introdusă cu ocazia reformei învățămîntului superior din 1948 după exemplul dat de Uniunea Sovietică, unde studiul Teoriei mecanismelor și a mașinilor, capătă o dezvoltare din ce în ce mai mare.

S-a căutat, pe cît posibil, ca în lucrare să fie prezentate toate chestiunile din aceste două părți ale Teoriei mecanismelor și în special acelea care interesează în primul rînd pe ingineri. Chestiunile considerate de noi mai importante au fost urmate de exemple și aplicații, din diferite ramuri ale tehnicii.

Acestor exemple și aplicații intenționăm să le adăugăm altele la o viitoare ediție, împreună cu chestiuni noi.

Așteptăm în acest scop sugestiile și observațiile colegilor și cititorilor cărora le mulțumim anticipat.

Mulțumim cu această ocazie tov. prof. dr. D. Mangeron și tov. conf. ing. C. Drăgan pentru controlul științific făcut lucrării.

Capitolele I și II (exclusiv aplicația nr. 4 de la § 13) din Partea I au fost elaborate de conf. ing. D. Maros, iar cap. III din Partea I și toată Partea a II-a, de conf. ing. Nicolae I. Manolescu, care a făcut și coordonarea întregului volum.

AUTORII

TABLA DE MATERII

PARTEA ÎNTÎI

CINETOSTATICA MECANISMELOR

§ 1. Obiectul şi problemele fundamentale ale cinetostaticii mecanismelor . 11

Cap. I. **Studiul forţelor cunoscute care formează datele iniţiale ale unui calcul cinetostatic** 12

§ 2. Forţele motoare şi de rezistenţă tehnologică 12
§ 3. Forţele de inerţie ale elementelor care execută mişcări spaţiale . . . 14
3.1. Consideraţii generale — mişcarea cea mai generală în spaţiu . 14
3.2. Mişcarea de rotaţie a elementului în jurul unui punct fix . . 15
3.3. Rotaţia elementului în jurul unui ax fix 20
3.4. Aplicaţii 22
§ 4. Forţele de inerţie ale elementelor plane care execută mişcări în planul lor 26
4.1. Generalităţi 26
4.2. Rotaţia în jurul unei axe fixe 27
4.3. Mişcarea plană generală — biela 28
4.4. Mişcarea de translaţie 30
§ 5. Determinarea forţelor de inerţie prin metoda concentrării maselor . . 30
5.1. Principii de calcul 30
5.2. Cazuri particulare 33
§ 6. O proprietate a forţelor de inerţie în orice mişcare compatibil cu legăturile elementului — polul de inerţie 36
§ 7. Repartizarea reală a forţelor de inerţie ale elementului 39
§ 8. Aplicaţii la determinarea forţelor de inerţie ale mecanismelor . . . 40

Cap. II. **Calculul forţelor necunoscute fără a se ţine seamă de frecări** 45

§ 9. Condiţiile pentru determinarea statică a lanţurilor cinematice plane . . 45
§ 10. Determinarea reacţiunilor din cuple la grupele plane static determinate ale lui Assur 46
10.1. Generalităţi 46
10.2. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 1 . . 49
10.3. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 2 . . 51
10.4. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 3 . . 54
10.5. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 4 . . 56
10.6. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 5 . . 57
10.7. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a III-a, formată numai din cuple de rotaţie 58
10.8. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a III-a, cu cuple de translaţie şi de rotaţie 60
10.9. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a III-a de ordin superior cu cuple de rotaţie 61

§ 11. Determinarea reacţiunilor şi a forţelor de echilibrare ale elementelor iniţiale 62
11.1. Elementul este legat de batiu printr-o cuplă de rotaţie . . . 63
11.2. Elementul este legat de batiu printr-o cuplă de translaţie . . 64
§ 12. Executarea calculului cinetostatic la un mecanism dat şi pregătirea datelor necesare pentru calculul de rezistenţă 65
12.1. Ordinea executării calculului cinetostatic al unui mecanism . . 65
12.2. Pregătirea datelor necesare pentru calculul de rezistenţă . . 66
12.3. Aplicaţii 67
§ 13. Determinarea forţelor de echilibrare cu ajutorul principiului deplasărilor
13.1. Generalităţi 72
13.2. Metoda pîrghiei lui Jukovski 73
13.3. Aplicaţii 74
Cap. III. **Frecarea în mecanisme** 86
§ 14. Introducere, clasificare şi definiţii 86
§ 15. Frecarea uscată de alunecare 88
§ 16. Frecarea uscată şi semiuscată în cuplele cinematice de translaţie . . 94
16.1. Con de frecare 94
16.2. Ghidajul înclinat. Cazul particular al cuplei-şurub 96
16.3. Randamentul şurubului 100
16.4. Autofrînarea 101
16.5. Frecarea în ghidajul tachetului unui mecanism cu camă . . . 101
16.6. Frecarea în cazul repartizării liniare a reacţiunii 107
§ 17. Frecarea uscată şi semiuscată în cuplele de rotaţie 110
17.1. Frecarea în fusurile cu joc. Cerc de frecare 110
17.2. Frecarea în fusurile nerodate (neuzate) fără joc 112
17.3. Frecarea în fusurile rodate 113
17.4. Frecarea în pivoţi 115
17.5. Determinarea poziţiilor de autofrînare cu ajutorul cercului de frecare 118
§ 18. Cinetostatica mecanismelor articulate cînd se ţine seamă de frecare . 119
18.1. Principii de calcul 119
18.2. Calculul grafo-analitic al rezistenţei tehnologice, dacă se ia în consideraţie şi frecarea 120
18.3. Calculul grafic al rezistenţei tehnologice folosind cercul şi unghiul de frecare 123
18.4. Calculul grafic în cazul cînd se ia în consideraţie numai frecarea din cuplele cinematice de translaţie 128
18.5. Cinetostatica grupelor cînd se ia în consideraţie şi frecarea . . 132
18.6. Calculul analitic al forţelor de frecare şi al reacţiunilor la un mecanism bielă-manivelă 140
§ 19. Frecarea lichidă în cuplele de translaţie şi de rotaţie 148
19.1. Noţiuni generale 148
19.2. Ecuaţia de mişcare a lichidelor vîscoase. Ecuaţia lui Navier-Stockes 151
19.3. Cazuri particulare cu aplicaţii la ungerea cuplelor de translaţie şi rotaţie 155
§ 20. Frecarea în cuplele cinematice superioare 176
20.1. Studiul sumar al frecării de rostogolire. Cercetări şi rezultate . 176
20.2. Pseudoalunecarea 179
20.3. Condiţiile rostogolirii 182
20.4. Frecarea la deplasarea corpurilor pe rulouri (role) 185
20.5. Frecarea de rostogolire în rulmenţi 187
§ 21. Frecarea la elementele cinematice flexibile 192

PARTEA A DOUA

DINAMICA MAŞINILOR

Cap. I. **Transmiterea lucrului mecanic şi a puterii** 197
§ 1. Problemele de bază ale dinamicii maşinilor 197
§ 2. Energia cinetică a maşinii 198
§ 3. Reducerea maselor şi a forţelor 200
3.1. Reducerea maselor 200
3.2. Reducerea forţelor exterioare 212
3.3. Aplicaţie 215
§ 4. Fazele mişcării maşinii 217
§ 5. Bilanţul energetic al maşinii 221
§ 6. Randamentul maşinilor 222
6.1. Expresiile analitice ale randamentului 222
6.2. Randamentul mecanismelor legate în serie 225
6.3. Randamentul mecanismelor legate în paralel şi în serie . . . 226
§ 7. Randamentele cîtorva maşini şi mecanisme 227
7.1. Randamentul mecanismelor şi al maşinilor cu cuple cinematice inferioare 227
7.2. Randamentul roţilor dinţate 229
7.3. Randamentul mecanismelor cu şurub 238
7.4. Randamentul mecanismelor planetare cu un singur grad de mobilitate 241
7.5. Aplicaţii 244
7.6. Randamentul mecanismelor planetare diferenţiale (cu mai multe grade de mobilitate) 245
7.7. Aplicaţii 248
7.8. Randamentul mecanismelor cu came 250
7.9. Randamentul mecanismelor liniare şi condiţiile de nereversibilitate 252
Cap. II. **Mişcarea maşinii sub acţiunea forţelor exterioare** 261
§ 8. Ecuaţia de mişcare a maşinii 261
8.1. Ecuaţia de mişcare sub forma finită (ecuaţia energiei cinetice). Caracteristicile mecanice ale maşinilor 261
8.2. Ecuaţia de mişcare scrisă sub forma ecuaţiei lui Lagrange . . 264
§ 9. Rezolvarea analitică a ecuaţiilor de mişcare ale agregatului în cazul cînd forţele exterioare depind numai de poziţia elementului de reducere . . 266
§ 10. Rezolvarea analitică a ecuaţiilor de mişcare ale agregatului, scrise sub forma ecuaţiei lui Lagrange în cazul cînd forţele exterioare depind numai de poziţia punctului de reducere 269
§ 11. Rezolvarea ecuaţiilor de mişcare ale agregatului cu ajutorul diagramei $E(I_{red})$ 276
11.1. Trasarea diagramelor $M_{red}(\varphi)$ şi $E(\varphi)$ 276
11.2. Construirea diagramei $I_{red}(\varphi)$ 281
11.3. Construirea diagramei $E(I_{red})$ 282
11.4. Determinarea vitezei unghiulare a elementului de reducere cu ajutorul diagramei $E(I_{red})$ 284
11.5. Trasarea diagramei $\omega(\varphi)$ 285
§ 12. Rezolvarea ecuaţiilor de mişcare cu ajutorul diagramei $E(\omega)$ . . . 287
§ 13. Rezolvarea ecuaţiilor de mişcare cu ajutorul metodei lui N. E. Jukovski. Studiul dinamic general al maşinii 290
§ 14. Stabilirea ecuaţiei de mişcare a maşinii pentru un mecanism bielă-manivelă 296

14.1. Ecuaţia generală de mişcare a motorului 296
14.2. Calculul momentului motor 298
14.3. Energia cinetică a maşinii 299
14.4. Energia potenţială 300
14.5. Forţele interioare şi pierderile prin frecările în articulaţii . . 303
14.6. Determinarea grafică a pierderilor prin frecare 306
14.7. Ecuaţia de mişcare a motorului 308

Cap. III. **Neregularitatea mişcării maşinii. Volantul** 311

§ 15. Viteza medie a maşinii şi gradul de neregularitate al mersului maşinii . 311
15.1. Introducere 311
15.2. Viteza medie 312
15.3. Gradul de neregularitate al maşinii 313
15.4. Relaţia dintre vitezele medii reale ω_m şi aritmetice ω_{med} şi gradul de neregularitate δ al maşinii 314
15.5. Relaţia dintre pătratul vitezei reale $(\omega_m)^2$ şi viteza pătratică medie $(\omega^2)_m$ 316
15.6. Deviaţia unghiulară şi deviaţia vitezei 316
15.7. Determinarea gradului de neregularitate δ al maşinii cu ajutorul diagramei $E\ (I_{red})$ 317
§ 16. Influenţa masei volantului asupra mişcării maşinii în faza de regim . 318
§ 17. Calculul aproximativ al momentului de inerţie al volantului (I_v) . . 320
§ 18. Construcţia curbelor de deviaţie a vitezei x şi a deviaţiei unghiulare $\Delta\varphi$. 326
§ 19. Determinarea momentului de inerţie al volantului cu ajutorul diagramei $E\ (I_{red})$ 331
§ 20. Determinarea aproximativă a masei volantului la maşinile cu abur cu ajutorul ecuaţiei de mişcare a maşinii sub forma ecuaţiei lui Lagrange 350
§ 21. Determinarea dimensiunilor volantului 356

Cap. IV. **Reglajul mişcării maşinii. Regulatoarele** 358

§ 22. Problemele reglării mişcării maşinii. Generalităţi. Definiţia regulatorului 358
§ 23. Clasificarea regulatoarelor. Descriere şi funcţionare 360
§ 24. Cinetostatica regulatorului centrifug. Caracteristica regulatorului . . 367
24.1. Metoda de calcul 367
24.2. Calculul forţei centrifuge reduse la manşon 369
24.3. Calculul forţei antagoniste reduse la manşon (forţa portantă). Caracteristica regulatorului 371
§ 25. Curba de echilibru a regulatorului 372
§ 26. Gradul de neregularitate al regulatorului 375
§ 27. Stabilitatea regulatorului 377
§ 28. Insensibilitatea regulatorului 382

Cap. V. **Echilibrajul maşinilor** 389

§ 29. Problemele echilibrării forţelor de inerţie 389
§ 30. Condiţiile de echilibrare a maselor în mişcare de rotaţie 391
§ 31. Echilibrarea maselor în mişcare de rotaţie aflate în acelaşi plan. Autoechilibrarea rotorului de turbină 394
§ 32. Echilibrarea maselor în mişcare de rotaţie aflate în plane diferite . 401
32.1. Metoda vectorială de echilibrare 401
32.2. Metoda scalară de echilibrare 405
32.3. Aplicaţie 407
§ 33. Corectarea echilibrării statice şi dinamice a maselor în mişcare de rotaţie 416
§ 34. Calculul forţei rezultante de inerţie a unui mecanism sau maşină . . 429
§ 35. Echilibrarea statică a mecanismelor şi maşinilor 443
§ 36. Echilibrarea motoarelor cu mai mulţi cilindri 458

Bibliografie 476

PARTEA ÎNTÎI

CINETOSTATICA MECANISMELOR

§ 1. OBIECTUL ŞI PROBLEMELE FUNDAMENTALE ALE CINETOSTATICII MECANISMELOR

Cinetostatica introduce, pe lîngă noţiunile studiate de cinematică, o nouă noţiune — noţiunea de forţă.

Obiectul cinetostaticii este determinarea tuturor forţelor care acţionează în mecanisme în timpul mişcării acestora.

Cinetostatica presupune deci starea de mişcare a mecanismului cunoscută în orice moment. Implicit presupune că şi forţele de inerţie, care însoţesc această mişcare, se cunosc sau se pot determina imediat.

Calculul cinetostatic al mecanismelor cuprinde două grupe de forţe : forţele cunoscute sau date şi forţele necunoscute.

Forţele din prima grupă sînt exterioare mecanismului şi constituie datele iniţiale ale oricărui calcul cinetostatic. Ele sînt: forţele motoare şi de rezistenţă tehnologică, care sînt date de obicei sub formă de diagrame determinate experimental, forţele datorite arcurilor care sînt supuse la tensiune sau compresiune în timpul funcţionării mecanismului, forţele de greutate şi de inerţie, datorite maselor elementelor în mişcare variată şi forţele incidentale (rezistenţa aerului, apei etc).

Forţele din a doua grupă constituie rezultatele finale ale unui calcul cinetostatic. Acestea sînt: reacţiunile din cuplele cinematice, forţele de echilibrare şi forţele de frecare.

Ele se determină direct sau mijlocit prin metoda echilibrului cinetostatic şi, cu excepţia forţelor de echilibrare, se consideră ca forţe interioare ale mecanismului.

Metoda echilibrului cinetostatic, care se bazează pe principiul lui d'Alembert, se enunţă astfel: prin introducerea forţelor de inerţie pe lîngă celelalte forţe care acţionează asupra mecanismului, sistemul obţinut se poate considera în orice moment în echilibru.

Stabilirea acestui echilibru, prin care se pot determina forţele necunoscute, se bazează pe aceleaşi ecuaţii sau construcţii ca şi în statica sistemelor rigide.

Ca şi aici, pentru forţele reprezentate prin vectori folosiţi în construcţiile grafice se adoptă o scară, scara forţelor:

$$k_F = \frac{\text{kgf natură}}{\text{mm desen}}. \qquad (I.1)$$

In cazul particular al mecanismelor cu o mişcare lentă, calculul cinetostatic se poate reduce şi la un calcul static cînd forţele de inerţie se pot neglija. La mecanismele rapide, forţele de inerţie depăşind uneori cu mult valoarea tuturor celorlalte forţe, această neglijare nu se poate admite.

Cunoscînd ca rezultat al calculului cinetostatic repartizarea forţelor pe fiecare element al mecanismului, se pot determina în continuare eforturile care supun elementul la diferite solicitări.

Repetînd calculul cinetostatic pentru o serie de poziţii ale elementului iniţial, sau iniţiale (în cazul mecanismelor cu mai multe grade de mobilitate) se pot determina hodografele reacţiunilor din cuple şi diagramele diferitelor solicitări pentru fiecare element. Alegînd valorile maxime ale acestora, se poate trece la calculul de rezistenţă.

In rezumat, cinetostatica mecanismelor este etapa premergătoare a calculului de rezistenţă al elementelor mecanismului.

La proiectarea mecanismelor noi, la început, legile de mişcare şi dimensiunile elementelor nefiind cunoscute, se adoptă de obicei pentru manivelă (elementul iniţial) o viteză unghiulară constantă egală cu viteza medie proiectată, iar dimensiunile se aleg în primă aproximaţie pe baza experienţei constructive. Cu aceste date se face un calcul preliminar cinetostatic şi se determină reacţiunile din cuple şi solicitările elementelor, redimensionîndu-le apoi pe acestea. Cunoscînd reacţiunile din cuple, se pot determina în continuare şi forţele de frecare.

Cunoscînd acum toate forţele care acţionează asupra mecanismului, cum şi greutăţile şi momentele de inerţie ale elementelor, se poate determina printr-un studiu dinamic legea de mişcare adevărată a mecanismului sub acţiunea forţelor date.

Pe baza noii legi de mişcare se repetă calculul cinetostatic, introducînd ulterior corecţiile necesare.

CAPITOLUL I

STUDIUL FORŢELOR CUNOSCUTE CARE FORMEAZĂ DATELE INIŢIALE ALE UNUI CALCUL CINETOSTATIC

§ 2. FORŢELE MOTOARE ŞI FORŢELE DE REZISTENŢĂ TEHNOLOGICĂ

Forţele motoare sînt forţe exterioare pentru mecanismul dat, sînt aplicate elementului motor sau conducător şi dau, în general[1]), un lucru mecanic elementar pozitiv. Ca forţe motoare se enumeră: presiunea aburului asupra pistoanelor la maşinile cu abur, presiunea gazelor la motoarele cu ardere internă, forţele de tracţiune din curea la acţionarea unei maşini-unelte etc.

Forţele de rezistenţă tehnologică sînt forţe exterioare pentru mecanismul dat, sînt aplicate elementului condus şi dau, în general, un lucru mecanic

[1]) Lucrul mecanic elementar al forţelor motoare poate fi şi negativ, ca de exemplu la motoarele cu ardere internă, în faza de compresiune.

elementar negativ, pentru învingerea căruia serveşte mecanismul dat. Ca forţe de rezistenţă tehnologică se enumeră: forţele de sfărîmare a pietrei la un concasor, forţele de aşchiere la un strung etc.

Ambele feluri de forţe descrise pot fi constante, ca de exemplu forţele date de sarcinile ridicate de o macara, sau forţele de aşchiere la un strung. Ele pot depinde numai de poziţia elementului, ca de exemplu forţele date de presiunea gazelor la motoarele cu ardere internă şi la compresoare, sau forţele de rezistenţă la ştanţare. Ele pot depinde numai de viteza elementului, ca de exemplu momentul motor la motoarele electrice, sau forţele de frecare la suprafeţele unse etc. In sfîrşit, ele mai pot depinde şi de timp sau, concomitent, de mai mulţi parametri dintre cei arătaţi mai sus.

Mărimea reală a forţelor descrise mai sus se poate determina în orice moment numai dacă se cunoaşte diagrama de variaţie a acestora. Aceasta se determină, de obicei, pe cale experimentală. In fig. I.1 este reprezentată o astfel de diagramă pentru forţele motoare la o maşină cu abur cu dublu efect. Diagrama s-a construit prin suprapunerea a două diagrame indicate, notînd pe abscisă deplasarea pistonului, iar pe ordonată — presiunile indicate. Determinarea presiunilor rezultante p, care dau diagrama forţelor motoare specifice, adică a forţelor corespunzătoare la 1 cm² din suprafaţa pistonului, se poate uşor urmări în figură.

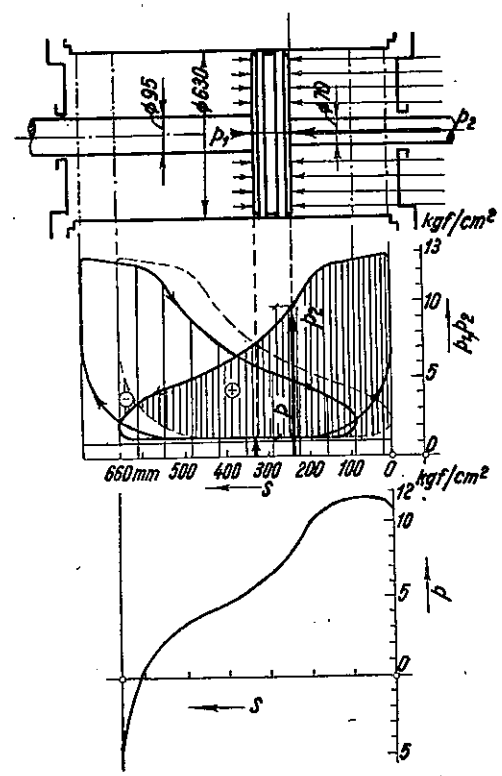


Fig. I.1. Diagrama forţelor motoare la o maşină cu abur.

In fig. I.2 şi fig. I.3 se arată variaţia forţelor de forfecare la un foarfece mecanic, respectiv a forţelor de ştanţare la o maşină de ştanţat. Ambele diagrame s-au trasat în funcţie de spaţiul s parcurs de sculă în material.

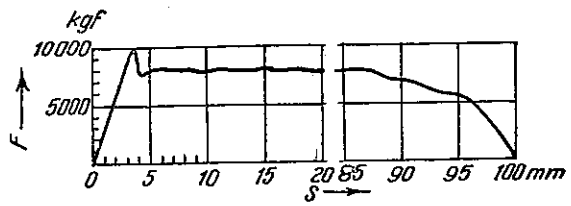


Fig. I.2. Diagrama forţei de forfecare la un foarfece mecanic.

La acelaşi mecanism se consideră cunoscută numai una dintre cele două forţe menţio-

1763

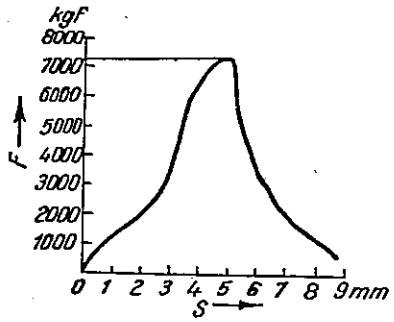


Fig. I.3. Diagrama forței de ștanțare la o mașină de ștanțat.

nate mai sus. Ambele nu pot figura concomitent ca forțe cunoscute în calculele cinetostatice, unde starea de mișcare a mecanismului se presupune dată.

La unele mecanisme[1]), ca de exemplu la mecanismul bielă-manivelă de la o mașină cu abur, se cunoaște, adică intră în datele inițiale ale calculului, forța motoare dată de diagramă, ca în fig. I.1, iar la altele, ca de exemplu la mecanismul de acționare al berbecului portsculă de la o mașină de ștanțat, forța de rezistență tehnologică dată, ca în diagrama din fig. I.3.

§ 3. FORȚELE DE INERȚIE ALE ELEMENTELOR CARE EXECUTĂ MIȘCĂRI SPAȚIALE

3.1. Considerațiuni generale. Mișcarea cea mai generală în spațiu

După cum se știe din mecanica teoretică, forțele de inerție sînt forțe care se introduc în calcule pentru a exprima reacțiunea cinetică (gradul de împotrivire) a masei elementului la orice forță exterioară reală, care caută să-i schimbe starea sa de mișcare.

Determinînd rezultanta acestor forțe pentru elementul dat, se pot calcula, în continuare, forțele reale care echilibrează sistemul astfel obținut. Aceste din urmă forțe produc mișcarea elementului și se transmit acestuia prin cuplele sale cinematice de legătură cu elementele învecinate.

In cazul cel mai general al mișcării elementului în spațiu (fig. I.4, *a*), forțele de inerție se reduc la o rezultantă și un moment. Rezultanta forțelor de

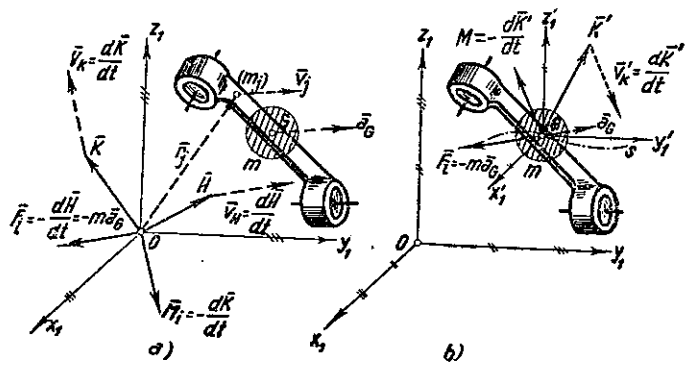


Fig. I.4. Forțele de inerție la mișcarea spațială.

[1]) La mașini motoare se cunosc forțele motoare, iar la mașini-unelte, forțele de rezistență tehnologică.

S. N. C.
Nr.
SECT. PROIECTĂRI

inerție este derivata în raport cu timpul, cu semn schimbat, a vectorului cantității de mișcare $\bar{H}$ a elementului, redus la punctul fix O:

$$\bar{F}_i = -\frac{d\bar{H}}{dt} = -\frac{d}{dt}\sum m_j \bar{v}_j = -\sum m_j \frac{d^2\bar{r}_j}{dt^2} = -m\bar{a}_G, \qquad (I.2)$$

iar momentul rezultant al forțelor de inerție este derivata, tot cu semn schimbat, a vectorului momentului cinetic al elementului față de același punct fix O, adică:

$$\bar{M}_i = -\frac{d\bar{K}}{dt}. \qquad (I.3)$$

Vîrfurile vectorilor $\bar{K}$ și $\bar{H}$ se mișcă față de sistemul fix cu vitezele $\bar{v}_K$ și $\bar{v}_H$. Vectorii $\bar{F}_i$ și $\bar{M}_i$ sînt egali și de sens contrar cu $\bar{v}_K$ și $\bar{v}_H$.

După cum se știe, orice mișcare spațială se poate realiza și prin două mișcări independente:

1) printr-o translație dată de mișcarea centrului de greutate pe traiectoria sa *s*, și

2) printr-o rotație în jurul unei axe, care trece prin centrul de greutate.

Pentru a scoate în evidență forțele de inerție provocate de aceste două mișcări, se va alege ca punct de reducere al sistemului, centrul de greutate G (fig. I.4, *b*). Forța rezultantă $\bar{F}_i$ rămîne aceeași, deoarece valoarea ei nu depinde de alegerea punctului de reducere — aceasta este forța de inerție provocată de mișcarea de translație, ca și cînd toată masa elementului ar fi concentrată în G, adică

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}_G. \qquad (I.4)$$

Momentul rezultant $\bar{M}_i$ se va schimba devenind $\bar{M}_i'$ deoarece acesta variază în funcție de alegerea punctului de reducere. $\bar{M}_i'$ va fi momentul forțelor de inerție determinat de rotația elementului în jurul lui G față de sistemul de referință mobil $x_1'y_1'z_1'$, continuu paralel cu cel fix $x_1y_1z_1$ (ambele fiind sisteme de coordonate carteziene dreptunghiulare):

$$\bar{M}_i' = -\frac{d\bar{K}'}{dt}, \qquad (I.5)$$

în care $\bar{K}'$ este momentul cinetic al elementului în mișcarea sa relativă față de sistemul de referință $x_1'y_1'z_1'$. Deoarece mișcarea de rotație este independentă de mișcarea centrului de greutate, în cercetarea acesteia se poate face prin urmare abstracție de mișcarea centrului de greutate, considerîndu-l fix.

3.2. Mișcarea de rotație a elementului în jurul unui punct fix

a) *Cazul general.* Se consideră un element (fig. I.5) care execută o rotație în jurul punctului fix O diferit de centrul de greutate. Ca și în cazul din fig. I.4, *a*, forțele de inerție reduse la O dau o rezultantă unică $\bar{F}_i = -d\bar{H}/dt = -m\bar{a}_G$ și un moment al forțelor de inerție $\bar{M}_i = -d\bar{K}/dt$.

Dacă centrul de rotație coincide cu centrul de greutate, forța de inerție rezultantă se anulează, sistemul reducîndu-se numai la momentul forțelor de inerție.

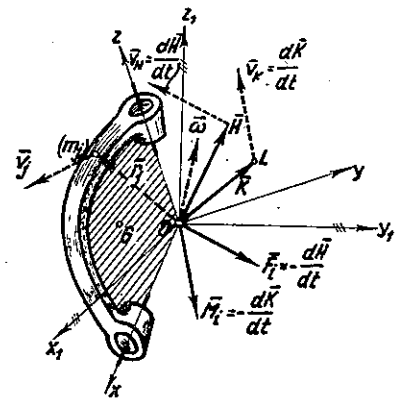


Fig. I.5. Forțele de inerție la mișcarea unui solid cu un punct fix.

Fie M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} proiecțiile lui $\bar{M}_i$ în sistemul de referință xyz mobil, legat rigid de element.

Momentul cinetic al elementului față de O va fi dat de

$$\bar{K}=\sum(\bar{r}_j\times m_j\bar{v}_j)=\sum[m_j\bar{r}_j\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_j)].$$

Dezvoltînd produsul dublu vectorial de mai sus după regula $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{c}\bar{a})\,b-(\bar{a}\bar{b})\,\bar{c}$, se obține:

$$\bar{K}=\sum(m_jr_j^2\bar{\omega})-\sum[m_j(\bar{r}_j\bar{\omega})\,\bar{r}_j].$$

Notînd proiecțiile lui $\bar{r}_j$ pe axele mobile cu $x_j\,y_j\,z_j$, iar ale lui $\bar{\omega}$ cu ω_x, ω_y, ω_z, rezultă $r_j^2=x_j^2+y_j^2+z_j^2$ și $\bar{r}_j\bar{\omega}=x_j\omega_x+y_j\omega_y+z_j\omega_z$, astfel încît proiecția momentului cinetic pe axa x va fi:

$$K_x=\omega_x\sum(m_jr_j^2)-\sum[m_jx_j(x_j\omega_x+y_j\omega_y+z_j\omega_z)]$$

sau

$$K_x=\omega_x\sum[m_j(r_j^2-x_j^2)]-\omega_y\sum(m_jx_jy_j)-\omega_z\sum(m_jx_jz_j);$$

deoarece

$$\sum[m_j(r_j^2-x_j^2)]=\sum[m_j(y_j^2+z_j^2)]=I_x;$$

și

$$\sum(m_jx_jy_j)=I_{xy};\quad\sum(m_jx_jz_j)=I_{xz},$$

se obține

$$K_x=\omega_xI_x-\omega_yI_{xy}-\omega_zI_{xz}.$$

In mod analog

$$K_y=-\omega_xI_{xy}+\omega_yI_y-\omega_zI_{yz};$$
$$K_z=-\omega_xI_{xz}-\omega_yI_{yz}+\omega_zI_z. \qquad (I.6)$$

In general, vectorul $\bar{K}$ variază atît față de sistemul de coordonate mobil, cît și față de cel fix; $d\bar{K}/dt$ reprezintă variația momentului cinetic față de sistemul de referință fix, adică este viteza absolută a vîrfului L al vectorului $\bar{K}$, înregistrată față de sistemul de axe $x_1y_1z_1$.

Din mecanica teoretică [1]) se știe că între variațiile vectorului $\bar{K}$ față de sistemul fix și față de cel mobil există relația

$$\frac{d\bar{K}}{dt}=\frac{\tilde{d\bar{K}}}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{K}. \qquad (I.7)$$

Ea exprimă că viteza absolută a punctului L este egală cu viteza relativă a aceluiași punct (derivata locală) plus viteza sa de transport.

[1]) Nekrasov, Curs de mecanică teoretică, vol. II, p. 433, Editura Tehnică.

Considerînd versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ai sistemului mobil, derivata locală a lui K se va putea scrie:

$$\frac{\tilde{d\bar{K}}}{dt}=\bar{i}\frac{dK_x}{dt}+\bar{j}\frac{dK_y}{dt}+\bar{k}\frac{dK_z}{dt};$$

exprimînd și pe $\bar{M}_i$ prin proiecțiile sale pe axele mobile

$$\bar{M}_i=\bar{i}M_{ix}+\bar{j}M_{iy}+\bar{k}M_{iz},$$

ecuația (I.3) se va putea scrie:

$$-\frac{d\bar{K}}{dt}=-\bar{i}\frac{dK_x}{dt}-\bar{j}\frac{dK_y}{dt}-\bar{k}\frac{dK_z}{dt}-\bar{\omega}\times\bar{K}=\bar{i}M_{ix}+\bar{j}M_{iy}+\bar{k}M_{iz}.$$

Știind că

$$\bar{\omega}\times\bar{K}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\ \omega_x&\omega_y&\omega_z\\ K_x&K_y&K_z\end{vmatrix}$$

se obține:

$$M_{ix}=-\frac{dK_x}{dt}-\omega_yK_z+\omega_zK_y;$$
$$M_{iy}=-\frac{dK_y}{dt}+\omega_xK_z-\omega_zK_x; \qquad (I.8)$$
$$M_{iz}=-\frac{dK_z}{dt}-\omega_xK_y+\omega_yK_x.$$

In cazul cînd axele sistemului de coordonate mobil sînt dirijate după axele principale de inerție ale elementului față de centrul de rotație, relațiile (I.6) devin:

$$K_x=\omega_xI_x;\quad K_y=\omega_yI_y;\quad K_z=\omega_zI_z. \qquad (I.9)$$

Înlocuind aceste valori în (I.8), se obține:

$$M_{ix}=-I_x\frac{d\omega_x}{dt}-(I_z-I_y)\,\omega_y\omega_z;$$
$$M_{iy}=-I_y\frac{d\omega_y}{dt}-(I_x-I_z)\,\omega_x\omega_z; \qquad (I.10)$$
$$M_{iz}=-I_z\frac{d\omega_z}{dt}-(I_y-I_x)\,\omega_x\omega_y.$$

Sistemele de ecuații (I.8) și (I.10) reprezintă ecuațiile lui Euler din dinamică și, cu ajutorul lor, se poate calcula momentul forțelor de inerție în mișcarea de rotație în jurul unui punct în orice moment, dacă se cunoaște legea de variație a lui $\bar{\omega}$.

Cu ajutorul acelorași ecuații se pot determina și componentele momentului forțelor de inerție în cazul mișcării generale a elementului în spațiu față de un sistem de referință cu originea în G, legat rigid de acesta.

S. N. C. Nr. SECT. PROIECTĂRI

b) *Cazul particular — mişcarea giroscopică.* Rotaţia în jurul unui punct fix, în majoritatea cazurilor practice, se caracterizează prin aceea că axoidele mişcării sînt conuri circulare drepte, iar elementul este de rotaţie, adică posedă o axă de simetrie care coincide cu axa conului mobil.

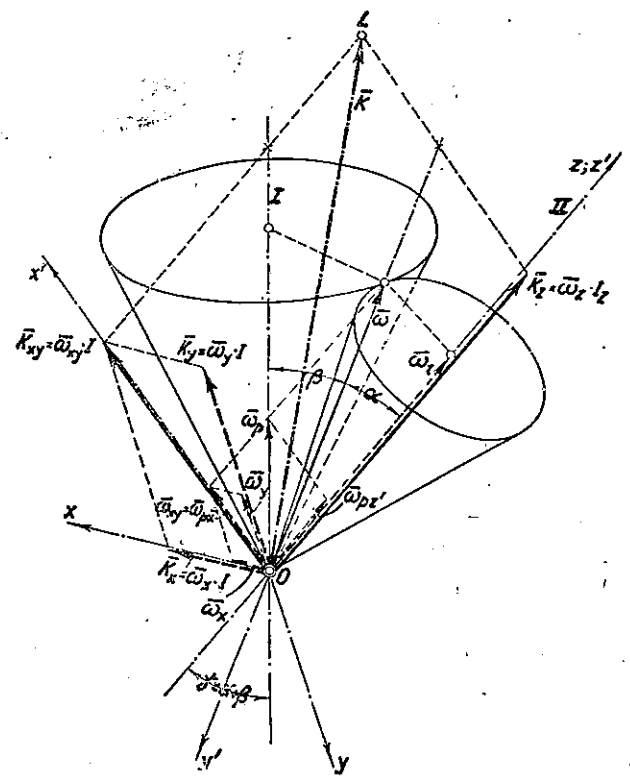


Fig. I.6. Forţele de inerţie la mişcarea giroscopică.

In aceste cazuri ecuaţiile se pot exprima într-o formă mai simplă pe baza următoarelor considerente (fig. I.6).

Fie ω_x, ω_y şi ω_z componentele vitezei unghiulare instantanee $\bar{\omega}$ în sistemul de axe xyz, rigid legat de element cu originea în O, astfel încît axa z să coincidă cu axa sa de simetrie II.

In timpul rostogolirii conului mobil peste cel fix, proiecţia ω_{xy} a lui $\bar{\omega}$ pe planul xOy se confundă în orice moment cu x', intersecţia lui xOy cu planul care conţine cele două axe de simetrie I şi II ale centroidelor şi axa instantanee de rotaţie a elementului.

Deoarece elementul este de rotaţie în jurul lui z, adică $I_x=I_y=I$, urmează că

$$\bar{K}_{xy}=\bar{K}_x+\bar{K}_y=I_x\bar{\omega}_x+I_y\bar{\omega}_y=I\bar{\omega}_{xy}. \quad \text{(I.11)}$$

Prin urmare, şi proiecţia momentului cinetic pe planul xOy coincide cu x'.

Deoarece şi

$$\bar{K}_z=\bar{\omega}_z I_z \quad \text{(I.12)}$$

coincide cu z, urmează că *vectorul $\bar{K}$ al momentului cinetic trebuie să se găsească totdeauna în planul axelor I şi II.*

Considerînd un al doilea sistem mobil de axe de coordonate $x'y'z'$, astfel ca planul $x'Oz'$ să coincidă cu planul axelor I şi II, iar axa z' cu II, variaţia momentului cinetic va fi cauzată de derivata sa locală din planul $x'Oz'$ şi de rotaţia lui $x'Oz'$ în jurul lui I cu viteza unghiulară de precesie $\bar{\omega}_p$.

Astfel, se va putea scrie:

$$\frac{d\bar{K}}{dt}=\frac{\tilde{dK}}{dt}+\bar{\omega}_p\times\bar{K},$$

în care:

$$\frac{\tilde{dK}}{dt}=\bar{i}\frac{dK_{x'}}{dt}+\bar{k}\frac{dK_{z'}}{dt}=\bar{i}\frac{dK_{xy}}{dt}+\bar{k}\frac{dK_z}{dt}$$

şi

$$\bar{\omega}_p\times\bar{K}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\ \omega_{px'}&0&\omega_{pz'}\\ K_{x'}&0&K_{z'}\end{vmatrix}=\bar{j}\,(\omega_{pz'}K_{x'}-\omega_{px'}K_{z'})=\bar{j}\,(\omega_{pz'}K_{xy}-\omega_{px'}K_z).$$

Exprimînd pe $\bar{M}_i$ prin componentele sale după noile axe, analog ca în (I.8), se obţine:

$$M_{ix'}=-\frac{dK_{xy}}{dt}; \quad \text{(I.13)}$$

$$M_{iy'}=\omega_{px'}K_z-\omega_{pz'}K_{xy}; \quad \text{(I.14)}$$

$$M_{iz'}=-\frac{dK_z}{dt}. \quad \text{(I.15)}$$

Observînd din fig. I.6 că:

$$\omega_{xy}=\omega_{px'}=\omega_p\sin\gamma; \quad \omega_{pz'}=\omega_p\cos\gamma \quad \text{şi} \quad \omega_z=\omega_p\sin\gamma\operatorname{ctg}\alpha$$

şi ţinînd seamă de (I.11) şi (I.12), relaţiile (I.13)—(I.15) se mai pot scrie:

$$M_{ix'}=-\frac{d}{dt}(I\omega_{xy})=-I\sin\gamma\frac{d\omega_p}{dt}; \quad \text{(1.16)}$$

$$M_{iy'}=\omega_p^2\sin\gamma\,(\sin\gamma\operatorname{ctg}\alpha\,I_z-I\cos\gamma); \quad \text{(1.17)}$$

$$M_{iz'}=-\frac{d}{dt}(I_z\omega_z)=-I_z\sin\gamma\operatorname{ctg}\alpha\frac{d\omega_p}{dt}. \quad \text{(1.18)}$$

Dacă $\omega_p=\text{const.}$, adică în cazul unei precesii regulate, momentul rezultant al forţelor de inerţie are numai componenta $M_{iy'}$. Acest moment (cuplu), care se numeşte *cuplu giroscopic*, este echilibrat de un cuplu exterior real.

Aplicaţie. Să se determine reacţiunile dinamice din lagărele arborelui elicei avionului, cauzate de mişcarea roţii satelite a reductorului planetar conic BMW în ipoteza că viteza unghiulară ω_p a elicei este constantă (fig. I.7).

Soluţie. Satelitul executînd o mişcare giroscopică cu precesia regulată, problema poate fi identificată cu cea din fig. I.6.

Astfel, forţele de inerţie reduse la punctul O dau un moment exprimat prin formulele (I.16)—(I.18) cu $M_{ix'}=M_{iz'}=0$ şi o forţă rezultantă de mărime

$$F_i=OG\sin\gamma\sqrt{\omega_p^4+\left(\frac{d\omega_p}{dt}\right)^2}, \quad \text{unde} \quad \frac{d\omega_p}{dt}=0.$$

Forţa $\bar{F}_i$ produce reacţiunile:

$$R'_A=F_i\frac{OB}{AB}=OG\sin\gamma\,\omega_p^2\frac{OB}{AB} \quad \text{şi} \quad R'_B=F_i\frac{OA}{AB}=OG\sin\gamma\,\omega_p^2\frac{OA}{AB},$$

iar momentul $M_{iy'}$

$$R''_A = R''_B = \frac{M_{iy'}}{AB} = \frac{\omega_p^2 \sin\gamma}{AB}(I_z \sin\gamma \operatorname{ctg}\alpha - I\cos\gamma).$$

Cele două grupe de reacțiuni acționînd în planul $x'Oz'$, vor acționa în același plan și rezultantele $\overline{R}_A = \overline{R}'_A + \overline{R}''_A$, $\overline{R}_B = \overline{R}'_B + \overline{R}''_B$.

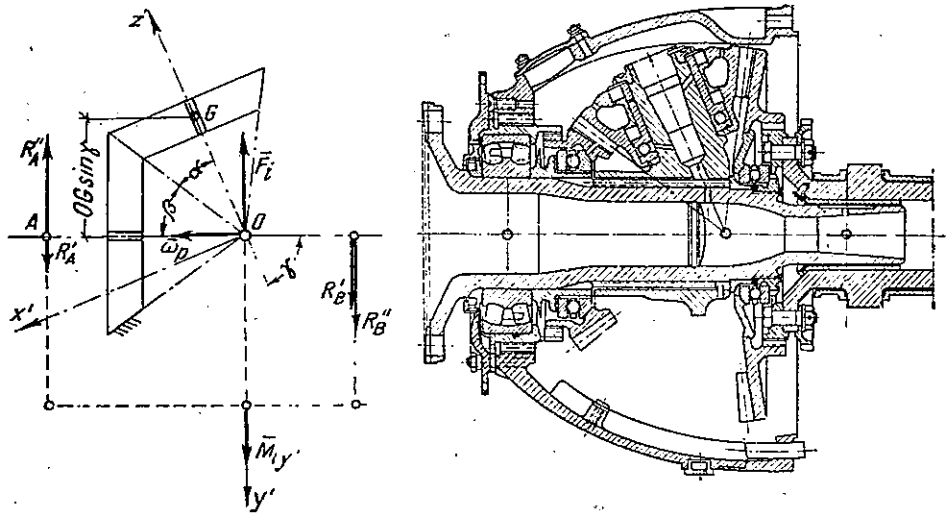


Fig. I.7. Determinarea reacțiunilor dinamice din lagărele reductorului planetar BMW.

Pentru a anula reacțiunile dinamice, se prevăd mai mulți sateliți, în cazul dat trei, montați simetric în antrenor (arborele elicei).

La demarare, cînd $\frac{d\omega_p}{dt} \neq 0$, proiecția lui M_i pe planul $x'Oz'$ va fi diferită de 0. Componenta sa după direcția AB nu provoacă reacțiuni în lagăre, cea perpendiculară pe AB provoacă însă un cuplu de reacțiuni în A și B perpendiculare pe planul $x'Oz'$. Pentru a obține reacțiunile rezultante, cauzate de $\overline{M}_i$, acestea se vor aduna geometric cu $\overline{R}''_A$ și $\overline{R}''_B$ obținute mai sus.

3.3. Rotația elementului în jurul unui ax fix

Se consideră elementul din fig. I.8, *a* care se poate roti numai în jurul unei singure axe în lagărele A și B.

Se alege un sistem de axe de coordonate xyz, rigid legat de element și avînd originea O într-un punct oarecare de pe axa de rotație, astfel încît axa z să coincidă cu aceasta.

Mișcarea poate fi considerată ca un caz particular de rotație în jurul punctului fix O. Se reduce sistemul de forțe de inerție la punctul O. Forța de inerție rezultantă $\overline{F}_i$, avînd în vedere că centrul de greutate execută numai

o rotație într-un plan perpendicular pe z, va fi paralelă cu acesta, adică situată în planul xOy. Componenta sa normală va avea mărimea

$$F_i^\nu = mr_G\omega^2, \tag{I.19}$$

fiind de sens contrar lui $\bar{a}^\nu_G$, iar componenta tangențială va fi

$$F_i^\tau = mr_G\varepsilon, \tag{I.20}$$

fiind dirijată în sens contrar lui $\bar{a}^\tau_G$.

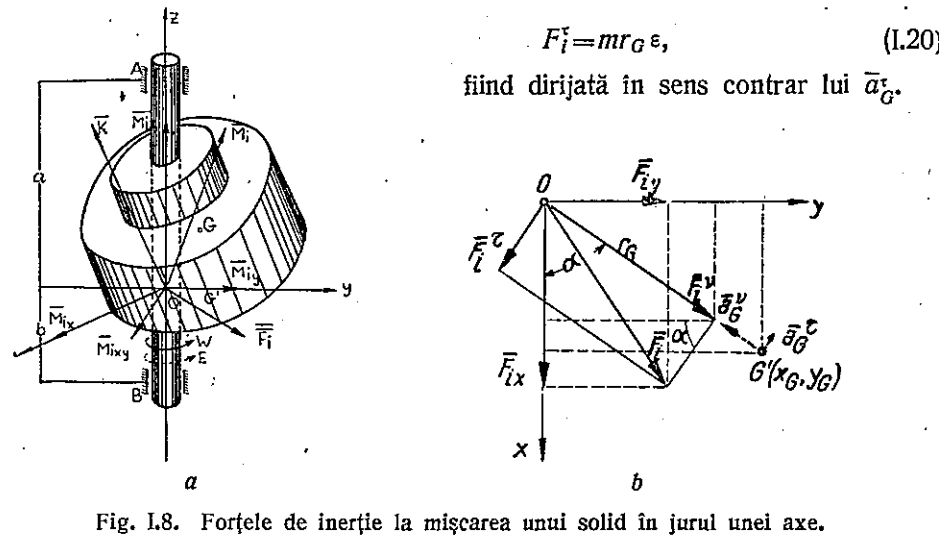


Fig. I.8. Forțele de inerție la mișcarea unui solid în jurul unei axe.

Componentele forței de inerție pe axele mobile xy se vor obține proiectînd pe $\overline{F}_i^\nu$ și $\overline{F}_i^\tau$ pe aceste axe (fig. I.8, *b*). Mărimea acestora va fi:

$$F_{ix} = mr_G\omega^2\cos\alpha + mr_G\varepsilon\sin\alpha$$

și

$$F_{iy} = mr_G\omega^2\sin\alpha - mr_G\varepsilon\cos\alpha;$$

deoarece

$$r_G\cos\alpha = x_G \quad \text{și} \quad r_G\sin\alpha = y_G,$$

se obține:

$$\left.\begin{aligned} F_{ix} &= m\omega^2 x_G + m\varepsilon y_G \\ F_{iy} &= m\omega^2 y_G - m\varepsilon x_G \end{aligned}\right\} \tag{I.21}$$

și

Valoarea absolută a lui F_i va fi

$$F_i = mr_G\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}. \tag{I.22}$$

Această forță redusă la O provoacă reacțiuni în cuplele cinematice (lagăre), care, conform principiului lui d'Alembert, echilibrează pe F_i (fig. I.9, *a*).

Astfel: $R'_A + R'_B = -F_i$ și $R'_A a = R'_B b$;

din aceste două ecuații rezultă:

$$R'_A = -F_i\frac{b}{a+b} \quad \text{și} \quad R'_B = -F_i\frac{a}{a+b}. \tag{I.23}$$

Momentul forţelor de inerţie redus la punctul O, pe baza ecuaţiilor I.6) şi (I.8), şi ţinînd seamă că $\omega_x=\omega_y=0$, va avea proiecţiile:

$$M_{ix}=-\frac{dK_x}{dt}+\omega_z K_y=\varepsilon I_{xz}-\omega_z^2 I_{yz};$$
$$M_{iy}=-\frac{dK_y}{dt}-\omega_z K_x=\varepsilon I_{yz}+\omega_z^2 I_{xz}; \qquad (I.24)$$
$$M_{iz}=-\varepsilon I_z.$$

Rezultanta momentelor forţelor de inerţie în planul xy va fi:

$$M_{ixy}=\sqrt{M_{ix}^2+M_{iy}^2}=\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}\sqrt{I_{xz}^2+I_{yz}^2}. \qquad (I.25)$$

Acest moment va fi echilibrat de un moment exterior dat de reacţiunile din cuplele cinematice de mărimea

$$|R_A''|=|R_B''|=\frac{M_{ixy}}{a+b}. \qquad (I.26)$$

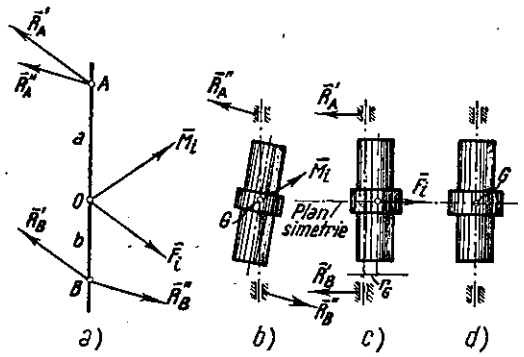


Fig. I.9. Mărimea reacţiunilor suplimentare pentru diferitele poziţii ale axei solidului faţă de axa de rotaţie.

Momentul M_{iz} nu dă reacţiuni în cuple.

In fig. I.9, *a* sînt reprezentate schematic reacţiunile produse de forţa şi momentul forţelor de inerţie asupra cuplelor de rotaţie (lagărelor). Se observă că acestea îşi schimbă mereu direcţia rotindu-se în spaţiu cu aceeaşi viteză unghiulară ca şi sistemul xyz.

Pentru ca reacţiunile R_A' şi R_B' să se anuleze, trebuie ca $F_l=0$, adică centrul de greutate să fie situat pe axa de rotaţie (fig. I.9, *b*).

Pentru a anula momentul forţelor de inerţie, trebuie ca $I_{xz}=I_{yz}=0$ (fig. I.9, *c*). In acest scop, planul xOy trebuie să fie un plan de simetrie al elementului. Această condiţie trebuie realizată la mecanismele plane ale căror elemente execută mişcări planparalele, pentru a descărca cuplele cinematice de sarcinile dinamice de prisos.

In cazul cînd ambele condiţii sînt satisfăcute, adică axa de rotaţie coincide cu una dintre axele principale centrale de inerţie (fig. I.9, *d*), ambele grupe de reacţiuni din cuple se anulează şi elementul se spune că este echilibrat dinamic.

Problema echilibrării maselor în mişcare de rotaţie în jurul unui ax se va dezvolta mai departe în partea II, cap. V, §§ 31 şi 32.

3.4. Aplicaţii

1. Să se determine forţele de inerţie date de mişcarea crucii *ABAB* la un cuplaj cardanic (fig. I.10).

Date. Axa *I* execută o rotaţie uniformă, $\omega=$const. Unghiul dintre axe $c<15°$.

Soluţie. Fie c unghiul format de cele două axe coplanare *I* şi *II* în planul lor comun O. Planul *1* care trece prin *BB* şi axa *I* formează cu O unghiul α, iar planul *2* care trece prin *AA* şi axa *II* formează cu acelaşi plan unghiul β. Planele *1* şi *2* sînt perpendiculare între ele şi se intersectează după dreapta Oz perpendiculară, la rîndul ei, pe planul *ABAB*. Intersectînd cele trei plane O; *1* şi *2* cu o sferă, se obţine un triunghi sferic dreptunghic *abc*. Mişcarea absolută a crucii se compune dintr-o rotaţie în jurul axei *I* cu viteza unghiulară $\omega=d\alpha/dt$ şi dintr-o rotaţie a crucii în jurul axei *AA* cu viteza unghiulară $\omega_x=db/dt$.

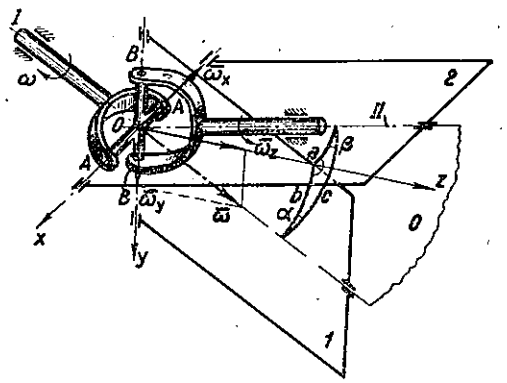


Fig. I.10. Cuplajul cardanic.

Presupunînd că centrul de greutate al crucii este în O, deci în repaus, sistemul de forţe de inerţie se va reduce la un moment al forţelor de inerţie M_i.

Alegînd axele de coordonate mobile xyz astfel, încît ele să coincidă cu *AA*, *BB* şi Oz, axele Ox, Oy şi Oz devin axe principale de inerţie ale crucii faţă de care momentele de inerţie sînt I_x, I_y şi I_z.

Proiecţiile vitezelor unghiulare pe aceste axe vor fi:

$$\omega_x=\frac{db}{dt};\quad \omega_y=\omega\sin b \quad \text{şi} \quad \omega_z=\omega\cos b.$$

La fel

$$\frac{d\omega_x}{dt}=\frac{d^2b}{dt^2};\quad \frac{d\omega_y}{dt}=\omega\cos b\frac{db}{dt}$$

şi

$$\frac{d\omega_z}{dt}=-\omega\sin b\frac{db}{dt}.$$

Inlocuind aceste valori în ecuaţiile lui Euler (I.10) şi presupunînd $I_x=I_y=I$, se obţine

$$M_{ix}=-I\frac{d^2b}{dt^2}-(I_z-I)\,\omega^2\sin b\cos b;$$

$$M_{iy}=(I_z-2I)\,\omega\cos b\frac{db}{dt};$$

$$M_{iz}=I_z\,\omega\sin b\frac{db}{dt}.$$

Pentru triunghiul sferic *abc* se poate scrie: $\operatorname{tg} b=\operatorname{tg} c\cos\alpha$.

Derivînd de două ori această expresie în raport cu t şi avînd în vedere că $\frac{d\alpha}{dt}=\omega$, se obţine:

$$\frac{db}{dt}=-\cos^2 b\sin\alpha\,\omega\operatorname{tg} c$$

şi

$$\frac{d^2b}{dt}=-\omega^2\operatorname{tg} c\cos^2 b\,[\cos\alpha+2\operatorname{tg} c\sin b\cos b\sin^2\alpha].$$

Ținînd seamă că valoarea maximă pentru unghiul b este c și presupunînd că c nu depășește 15°, se pot face următoarele aproximații, care vor simplifica mult expresiile de mai sus:

$$\operatorname{tg} c \sim c; \quad \sin b \sim \operatorname{tg} b; \quad \cos b \sim 1; \quad \cos^2 b \sim 1.$$

Astfel se va putea scrie, ținînd seamă și de expresia $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos\alpha$

$$\frac{d^2b}{dt^2} = -\omega^2 c \cos\alpha \,[1+2c^2 \sin^2\alpha];$$

al doilea termen din paranteză fiind neglijabil față de 1, rezultă aproximativ:

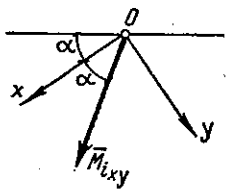


Fig. I.11. Momentul forțelor de inerție la cuplajul cardanic.

$$\frac{d^2b}{dt^2} = -\omega^2 c \cos\alpha.$$

Ținînd seamă de aproximațiile de mai sus, se obține:

$$M_{ix} = \omega^2 c\,(2I - I_z)\cos\alpha;$$

$$M_{iy} = \omega^2 c\,(2I - I_z)\sin\alpha;$$

$$M_{iz} = -\frac{\omega^2 c^2}{2} I_z \sin 2\alpha.$$

$\bar{M}_{ix}$ și $\bar{M}_{iy}$ se vor putea compune într-un singur moment, care va fi situat în planul xy (fig. I.11), de mărime:

$$M_{ixy} = \sqrt{M_{ix}^2 + M_{iy}^2} = \omega^2 c\,(2I - I_z).$$

Unghiul dintre vectorul M_{ixy} și axa x va fi:

$$\operatorname{tg}(\bar{x}, \bar{M}_{ixy}) = M_{iy}/M_{ix} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Prin urmare, vectorul M_{ixy} se poate considera constant ca mărime, rotindu-se față de cruce cu viteza unghiulară a axei I, iar față de sistemul fix, aproximativ de două ori mai repede. Expresia $2I - I_z$ se poate simplifica după cum urmează:

$$2I - I_z = \sum 2m_j\left(y_j^2 + z_j^2\right) - \sum m_j\left(x_j^2 + y_j^2\right) =$$
$$= 2\sum m_j z_j^2 + \sum m_j y_j^2 - \sum m_j x_j^2 = 2\sum m_j z_j^2 +$$
$$+ \sum m_j\left(y_j^2 + z_j^2\right) - \sum m_j\left(x_j^2 + z_j^2\right) =$$
$$= 2\sum m_j z_j^2 + I_x - I_y.$$

Dacă $I_x = I_y$ și știind că $\sum m_j z_j^2$ este momentul de inerție planar al crucii față de axa z, se obține

$$2I - I_z = 2I_z^p, \quad \text{adică:} \quad M_{ixy} = 2\omega^2 c I_z^p.$$

2. Să se determine reacțiunile dinamice din lagăre ale unui arbore, cauzate de alezajul greșit al discului montat pe el (fig. I.12).

Date:

— Greutatea discului $G = 20$ kg.

— Excentricitatea discului față de axa de rotație $e = 0{,}1$ mm.

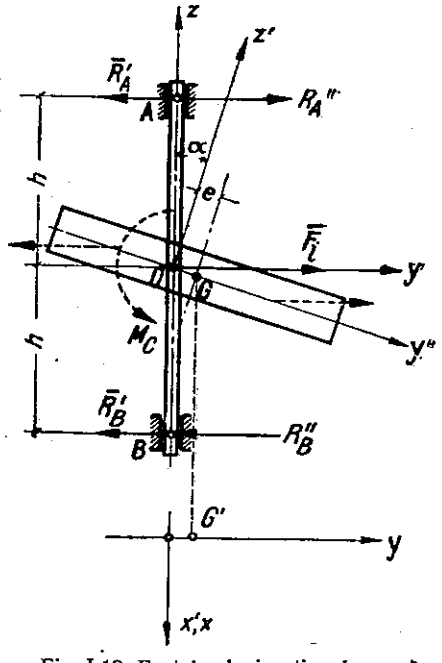


Fig. I.12. Forțele de inerție ale unui disc montat greșit pe arbore.

— Unghiul cuprins între axa de rotație și normala z' ridicată pe planul discului $\alpha = 1°$.

— Raza discului $R = 200$ mm.

— Turația constantă a discului $n = 12\,000$ rot/min.

— Distanța dintre lagăre $AB = 2h = 1\,000$ mm.

Observație. Se va alege cazul particular, cînd centrul de greutate G este situat în planul determinat de axa de rotație z și de normala pe planul discului în O.

Soluție. Se alege un sistem de axe de coordonate fixat de disc cu axa z ca axa de rotație și cu originea în O, unde z înțeapă planul de simetrie al discului.

Axa y se plasează în planul $z - z'$.

Alegînd ca punct de reducere al forțelor de inerție punctul O, se obține o rezultantă și un moment.

Atît rezultanta cît și momentul produc reacțiuni în lagăre.

a) *Reacțiunile produse de rezultanta $\bar{F}_i$ a forțelor de inerție:* Din cauza excentricității e, apare o forță de inerție de mărimea

$$F_i = m\omega^2 e \cos\alpha = \frac{G}{g}\omega^2 e \cos\alpha.$$

Această forță, avînd punctul de aplicație în O și fiind perpendiculară pe AB, provoacă în lagăre reacțiunile

$$R'_A = R'_B = -\frac{G}{2g}\omega^2 e \cos\alpha.$$

b) *Reacțiunile cauzate de momentul forțelor de inerție:* Proiecția momentului $\bar{M}_i$ pe planul xOy, care provoacă reacțiuni în lagăre, va avea după formula (I.24) componentele

$$M_{ix} = -\omega^2 I_{yz} \quad \text{și} \quad M_{iy} = \omega^2 I_{xz}.$$

Rotind sistemul de axe în jurul lui x în poziția $x'z'y'$, se va obține următoarea relație între coordonatele unui punct al discului față de cele două sisteme de axe:

$$x = x';$$

$$y = y'\cos\alpha + z'\sin\alpha;$$

$$z = z'\cos\alpha - y'\sin\alpha.$$

Astfel:

$$I_{xz} = \sum (m_j x_j z_j) = \sum m_j x'_j (z'_j \cos\alpha - y'_j \sin\alpha) = \cos\alpha \sum m_j x'_j z'_j - \sin\alpha \sum m_j x'_j y'_j = 0$$

și

$$I_{yz} = \sum m_j y_j z_j = \sum m_j (y'_j \cos\alpha + z'_j \sin\alpha)(z'_j \cos\alpha - y'_j \sin\alpha) =$$
$$= \sin\alpha\cos\alpha \sum m_j (z'^2_j - y'^2_j) = \frac{\sin 2\alpha}{2}(I_{y'} - I_{z'}).$$

Înlocuind aceste valori în formulele de mai sus, se obține:

$$M_{iy} = 0 \quad \text{și} \quad M_{ix} = (I_{z'} - I_{y'})\frac{\omega^2}{2}\sin 2\alpha.$$

Acest moment este echilibrat de un cuplu exterior $M_E = -M_{ix}$ al reacțiunilor $\bar{R}''_A = -\bar{R}''_B$, din A și B, care sînt perpendiculare pe arbori și sînt situate în planul zOy, rotindu-se împreună cu acestea:

$$|R''_A| = |R''_B| = \left|\frac{I_{y'} - I_{z'}}{4h}\omega^2 \sin 2\alpha\right|.$$

Presupunînd discul de grosime neglijabilă:

$$I_{z'}=I_G+\frac{G}{g}e^2=\frac{G}{g}\frac{R^2}{2}+\frac{G}{g}e^2$$

și

$$I_{y'}\cong\frac{I_G}{2}=\frac{G}{g}\frac{R^2}{4},$$

rezultă

$$I_{y'}-I_{z'}=-\frac{G}{4g}(R^2+4e^2).$$

c) *Reacțiunile totale:* Deoarece ambele grupe de reacțiuni lucrează în planul perpendicular pe x, care trece prin AB, sînt perpendiculare pe AB și se rotesc împreună cu acest plan, ele se vor putea-aduna algebric dînd reacțiunile rezultante. Deoarece M_E este negativ, sensurile [1]) lui $\overline{R}''_A$ și $\overline{R}''_B$ vor fi ca în figură. Astfel:

$$R_A=R'_A+R''_A=-\frac{I_{y'}-I_{z'}}{4h}\omega^2\sin 2\alpha-\frac{G}{2g}\omega^2 e\cos\alpha$$

și

$$R_B=R'_B+R''_B=\frac{I_{y'}-I_{z'}}{4h}\omega^2\sin 2\alpha-\frac{G}{2g}\omega^2 e\cos\alpha.$$

Inlocuind aci valorile de mai sus, se obține:

$$R_A=-\frac{G\omega^2}{2g}\left[e\cos\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{8h}(R^2+4e^2)\right];$$

$$R_B=-\frac{G\omega^2}{2g}\left[e\cos\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{8g}(R^2+4e^2)\right].$$

Substituind aici valorile numerice din datele problemei, se obține:

$$R_A=-(160-560)=+400\text{ kgf};\quad R_B=-(160+560)=-720\text{ kgf}.$$

Termenul $4e^2$ se poate neglija din punct de vedere practic. Din rezultate se observă că lagărele vor fi solicitate puternic și neuniform. Solicitările fiind variabile, provoacă vibrații și distrug mecanismul.

De aici se poate trage concluzia ce importanță deosebită au centrarea și echilibrarea dinamică a pieselor supuse la turații mari, după cum se va arăta în partea II, §§ 31 și 33.

§ 4. FORȚELE DE INERȚIE ALE ELEMENTELOR PLANE CARE EXECUTĂ MIȘCĂRI ÎN PLANUL LOR

4.1. Generalități

După cum s-a arătat la § 3.3, în cazul mecanismelor plane, pentru a descărca lagărele de sarcini dinamice de prisos, elementele trebuie dimensionate astfel, încît ele să aibă un plan de simetrie, care să rămînă continuu

[1]) Sensurile se pot stabili și din considerentul că discul se compune din două jumătăți, care dau un cuplu de forțe centrifuge M_c echilibrat de cuplul $\overline{R}''_A=-\overline{R}''_B$.

paralel cu planul mișcării. Forțele de inerție se reduc și în acest caz la o rezultantă unică și la un moment, situate însă ambele în același plan.

Forțele de inerție astfel reduse servesc la determinarea în continuare, prin metoda echilibrului cinetostatic, a forțelor reale exterioare care provoacă mișcarea. Acestea sînt reacțiunile din cuplele de legătură cu elementele învecinate.

4.2. Rotația în jurul unei axe fixe

Se consideră o manivelă, un balansier, sau un disc excentric cu centrul de greutate în G, avînd un plan de simetrie perpendicular pe axa de rotație (fig. I.13).

După cum s-a văzut în § 3.3, forțele de inerție reduse la A dau o rezultantă și un moment. Forța de inerție va avea mărimea dată de (I.22), adică

$$F_i=mr_G\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}. \qquad (I.27)$$

Momentul rezultant al forțelor de inerție va avea o valoare determinată de (I.24), din care însă, ținînd seamă că axa de rotație este perpendiculară pe planul de simetrie al mișcării, rămîne numai componenta după axa z, de valoare

$$M_i=M_{iz}=-\varepsilon I_z=-\varepsilon I_A. \qquad (I.28)$$

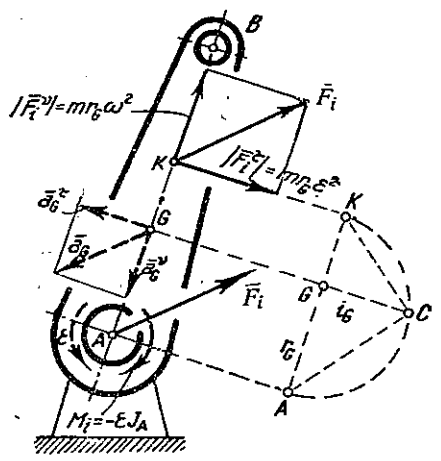


Fig. I.13. Forțele de inerție ale unei manivele.

Se știe din mecanica teoretică că un moment și o forță situate în același plan se pot reduce la o forță unică egală cu forța dată, însă deplasată paralel cu ea cu o cantitate determinată de raportul dintre moment și rezultantă. Se va determina punctul de aplicație al forței $\overline{F}_i$ ca rezultat al compunerii acesteia cu momentul $\overline{M}_i$. Momentul față de A al forței deplasate $\overline{F}_i$ va trebui să fie egal cu $\overline{M}_i$.

Deoarece componenta $\overline{F}''_i$ trece prin A și, prin urmare, nu dă moment față de A, se va putea scrie:

$$M_i=-\varepsilon I_A=-mr_G\varepsilon AK,$$

de unde

$$AK=\frac{I_A}{mr_G}.$$

Știind însă că $I_A=I_G+mr_G^2$, se obține

$$AK=\frac{I_G+mr_G^2}{mr_G}=\frac{I_G}{mr_G}+r_G=GK+r_G.$$

Introducînd raza de girație i_G în raport cu G și știind că $I_G = mi_G^2$, se va putea scrie:

$$GK = \frac{I_G}{mr_G} = \frac{i_G^2}{r_G}. \qquad (I.29)$$

Pe baza formulei (I.29) punctul K se va putea determina cu ușurință printr-o construcție geometrică simplă. Se transpune la aceeași scară k_l a lungimilor i_G în G, perpendicular pe AG, și se unește capătul lui C cu A. Perpendiculara în C pe AC intersectează linia AB în punctul căutat K. Într-adevăr, din triunghiul dreptunghic obținut, se observă că $i_G^2 = r_G \cdot GK$.

Punctul K se numește centrul de oscilație al elementului în raport cu A. Această denumire i s-a dat datorită faptului că forțele de inerție ale elementului transformat într-un pendul fizic suspendat în A vor trece tot timpul oscilației prin punctul K. În punctul K se poate deci considera că este concentrată toată masa pendulului fizic imaginat. Lungimea AK este deci identică cu lungimea pendulului matematic a cărui perioadă de oscilație este egală cu cea a pendulului fizic considerat.

În cazul particular, cînd centrul de greutate coincide cu A, forțele de inerție se reduc la un moment unic de valoare

$$M_i = -\varepsilon I_A.$$

Dacă în acest caz $\omega = \text{const.}$, adică $\varepsilon = 0$, momentul se anulează, elementul nefiind solicitat de nici o forță de inerție.

4.3. Mișcarea plană generală — biela

Forțele de inerție ale unei biele pot fi reprezentate în mai multe feluri după cum urmează:

a) *Reduse la o rezultantă și un moment.* Ca și în cazul mișcării generale în spațiu, forțele de inerție reduse la centrul de greutate G (fig. I.14) dau o forță unică dată de (I.2)

$$\bar{F}_i = -m\bar{a}_G \qquad (I.30)$$

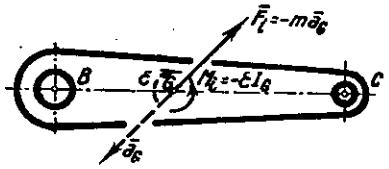


Fig. I.14. Forțele de inerție reduse la centrul de greutate.

și un moment al forțelor de inerție

$$M_i = -\frac{d\omega_z}{dt} I_z = -\varepsilon I_G, \qquad (I.31)$$

dat de a treia formulă din (I.10) cu mențiunea că $\omega_x = \omega_y = 0$.

b) *Reduse la trei forțe.* De multe ori este indicat ca momentul M_i să fie înlocuit cu două forțe egale și de sens contrar, cu punctele de aplicație în cele două articulații ale bielei:

$$\bar{F}_{i'} = -\bar{F}_{i''}.$$

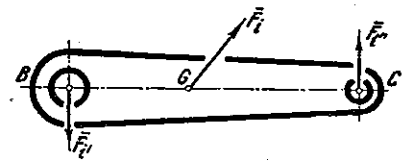


Fig. I.15. Forțele de inerție reduse la trei forțe.

Direcțiile forțelor $\bar{F}_{i'}$ și $\bar{F}_{i''}$ se aleg de obicei perpendiculare pe BC. În acest caz sistemul se reduce la trei forțe ca în fig. I.15.

c) *Reduse la o forță unică determinată cu ajutorul polului accelerațiilor.* Deoarece din punctul de vedere al repartizării accelerațiilor în mișcarea plană generală polul accelerațiilor se poate, considera ca un punct fix, problema se va putea reduce prin analogie la cazul rotației în jurul unei axe fixe, considerînd ca centru de rotație polul J. Forța de inerție rezultantă va trece deci prin punctul K, centrul de oscilație al elementului în raport cu polul accelerațiilor J (fig. I.16). Determinarea lui K se face în mod analog ca în fig. I.13.

d) *Reduse la o forță unică determinată cu ajutorul planului accelerațiilor.* De multe ori, în determinarea polului accelerațiilor intervin greutăți, ba chiar uneori acesta devine inaccesibil în planul desenului.

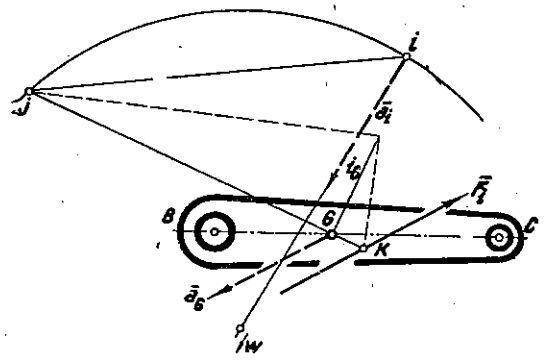


Fig. I.16. Forțele de inerție reduse la centrul de oscilație K în raport cu polul accelerațiilor.

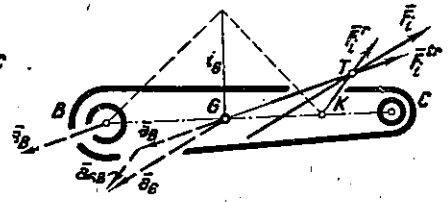


Fig. I.17. Forțele de inerție reduse la o rezultantă unică ce trece prin T.

De aceea se dă o metodă mai generală de determinare a forțelor de inerție, după cum urmează: cunoscînd accelerația unui punct oarecare B al elementului și accelerația centrului său de greutate (fig. I.17), mișcarea poate fi considerată compusă din două mișcări parțiale:

1) dintr-o translație pură cu accelerația $\bar{a}_B$, care dă o forță de inerție cu punctul de aplicație în G și de mărime $\bar{F}_i^{tr} = -m\bar{a}_B$ și

2) dintr-o rotație pură în jurul lui B cu acce'eratia relativă a centrului de greutate $\bar{a}_{GB} = \bar{a}_G - \bar{a}_B$, care dă o forță de inerție $\bar{F}_i^r = -m\bar{a}_{GB} = -m(\bar{a}_G - \bar{a}_B)$ cu punctul de aplicație în centrul de oscilație K al elementului în raport cu B.

Rezultanta acestor două forțe care se intersectează în punctul T determină forța de inerție totală. Ea va trece prin punctul de intersecție a celor două suporturi, având direcția și mărimea determinată de $-m\bar{a}_G$.

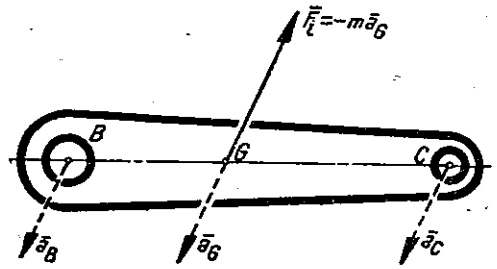


Fig. I.18. Forțele de inerție reduse la o rezultantă unică ce trece prin G.

De aici rezultă următoarea construcție grafică. Prin G se trasează o paralelă la $\bar{a}_B$ din planul accelerațiilor. Prin K, determinat prin metoda triunghiului dreptunghic, se trasează o paralelă la $\bar{a}_{GB}$ din plan. Prin punctul de intersecție T a acestor două direcții va trece forța de inerție rezultantă $\bar{F}_i=-m\bar{a}_G$.

4.4. Mișcarea de translație

Dacă $\omega=0$ și $\varepsilon=0$ elementul are o mișcare de translație (fig. I.18). In acest caz forțele de inerție se reduc la o rezultantă unică a cărei dreaptă suport trece prin centrul de greutate G al elementului și este egal cu:

$$\bar{F}_i=-m\bar{a}_G.$$

Momentul rezultant al forțelor de inerție $M_i=-\varepsilon I_G=0$.

Elemente cu mișcări de translație sînt bielele cuplare ale locomotivelor (fig. I.33), capul de cruce, pistoanele etc.

§ 5. DETERMINAREA FORȚELOR DE INERȚIE PRIN METODA CONCENTRĂRII (REPARTIZĂRII) MASELOR

5.1. Principii de calcul

Una dintre metodele des utilizate pentru determinarea forțelor de inerție ale elementului unui mecanism plan este metoda concentrării maselor (repartizării maselor).

Această metodă constă în concentrarea imaginară a masei totale a elementului în diferite puncte ale sale și în determinarea forțelor de inerție date de acestea în timpul mișcării.

Pentru a înțelege clar cele de mai sus, se consideră două mecanisme identice cu aceeași lege de mișcare (fig. I.19, *a*, *b*). Elementul BC al primului mecanism, al celui real, este de oțel cu masa uniform repartizată, iar al celui de-al doilea, dintr-o placă rezistentă de aceeași formă, însă cu masă neglijabilă. In diferitele puncte ale plăcii se fixează greutăți de masele $m_1, m_2, \ldots, m_j$. Placa, mișcîndu-se la fel ca și elementul real, leagă greutățile între ele și transmite forțele de inerție concentrate în punctele alese la cuplele de legătură B și C și la elementele *1* și *3*. Pentru ca forțele de inerție astfel obținute să fie echilibrate în B și C cu aceleași forțe ca și în cazul elementului real, adică

efectul lor asupra cuplelor B și C să fie același, trebuie ca cele două sisteme (fig. I.19, *a*, *b*) să fie echivalente din punct de vedere mecanic. Se determină mai jos condițiile pe care trebuie să le îndeplinească punctele alese pentru ca cele două sisteme să fie echivalente.

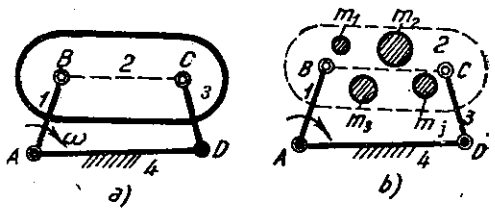


Fig. I.19. Inlocuirea masei unui element prin mase concentrate.

După cum s-a arătat la § 4.3, forțele de inerție ale unui element care execută o mișcare plană, reduse la centrul de greutate, dau o forță rezultantă $\bar{F}_i=-m\bar{a}_G$ și un moment rezultant $\bar{M}_i=-\bar{\varepsilon}I_G$. La aceeași rezultantă și același moment rezultant trebuie să se reducă în centrul de greutate G și sistemul de forțe concentrate.

Considerînd n puncte de concentrare în care se repartizează masa elementului (fig. I.20) echivalența va fi dată de următoarele două ecuații:

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{F}_{ij}=\bar{F}_i \quad \text{sau} \quad -\sum_{j=1}^{n}m_j\bar{a}_j=-m\bar{a}_G \tag{I.32}$$

și

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{r}_j\times\bar{F}_{ij}=M_i \quad \text{sau} \quad -\sum_{j=1}^{n}\bar{r}_j\times m_j\bar{a}_j=-\varepsilon I_G. \tag{I.33}$$

Aplicînd formula lui Euler, relativă la descompunerea accelerațiilor, formula (I.32) se mai poate scrie:

$$-\sum_{1}^{n}m_j(\bar{a}_G+\bar{a}^{\nu}_{jG}+\bar{a}^{\tau}_{jG})=-\left[\bar{a}_G\sum_{1}^{n}m_j-\omega^2\sum_{1}^{n}m_j\bar{r}_j+\varepsilon\times\sum_{1}^{n}m_j\bar{r}_j\right]=-m\bar{a}_G.$$

Această identitate este în general verificată deoarece ω și $\varepsilon\neq0$, cînd

$$\sum_{1}^{n}m_j=m \tag{I.34}$$

și

$$\sum_{1}^{n}m_j\bar{r}_j=0. \tag{I.35}$$

Ecuația vectorială (I.35) se poate scrie și sub forma scalară:

$$\sum_{1}^{n}m_jx_j=0; \tag{I.36}$$

$$\sum_{1}^{n}m_jy_j=0. \tag{I.37}$$

Explicitînd la fel ecuațiile de momente (I.33), se obține:

$$\sum_{1}^{n}\bar{r}_j\times m_j(\bar{a}_G+\bar{a}^{\nu}_{jG}+\bar{a}^{\tau}_{jG})=\sum_{1}^{n}m_j\bar{r}_j\times\bar{a}_G+\sum_{1}^{n}\bar{r}_j\times m_j\bar{a}^{\nu}_j+\sum_{1}^{n}\bar{r}_j\times m_j\bar{a}^{\tau}_{jG}=\bar{\varepsilon}I_G.$$

Deoarece însă $\sum m_j\bar{r}_j=0$ conform condiției (I.35), este și $\sum_1^n \bar{r}_j \times m_j \bar{a}^{\nu}_{jG} = 0$ fiindcă vectorii $\bar{a}^{\nu}_{jG}$ și $\bar{r}_j$ sînt paraleli, se obține deci:

$$\sum_1^n \bar{r}_j \times m_j\bar{a}^{\tau}_{jG} = \sum_1^n m_j\bar{r}_j\times(\bar{\varepsilon}\times\bar{r}_j)=\bar{\varepsilon}I_G\,.$$

Dezvoltînd dublul produs vectorial:

$$\bar{r}_j(\bar{\varepsilon}\times\bar{r}_j)=\bar{r}_j^2\bar{\varepsilon}-(\bar{\varepsilon}\bar{r}_j)\bar{r}_j\,,$$

unde

$$\bar{\varepsilon}\bar{r}_j=0,$$

și înlocuind valoarea astfel obținută în formula de mai sus și simplificînd cu $\bar{\varepsilon}$, se obține:

$$\sum_1^n m_j r_j^2 = I_G\,, \qquad \text{(I.38)}$$

sau, exprimat în funcție de coordonatele punctelor,

$$\sum_1^n m_j\,(x_j^2+y_j^2)=I_G\,. \qquad \text{(I.39)}$$

Cele patru ecuații scalare (I.34), (I.36), (I.37) și (I.39) cuprind condițiile de echivalență amintite.

Se determină acum numărul de parametri care trebuie aleși arbitrar pentru ca sistemul de ecuații de mai sus să fie compatibil.

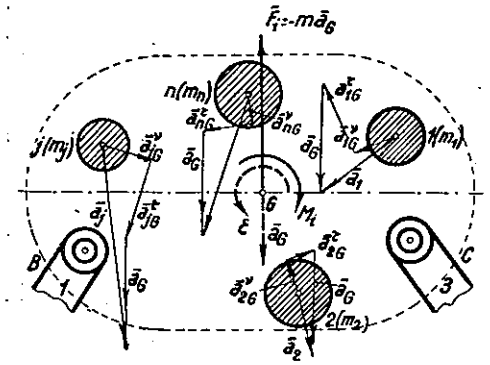


Fig. I.20. Inlocuirea masei unui element prin „n" mase concentrate.

Fiecare punct de concentrare este caracterizat prin trei parametri: cele două coordonate x_j și y_j ale punctului și masa m_j. Cele n puncte sînt determinate de $3n$ parametri. Cei $3n$ parametri fiind legați între ei prin patru condiții de legătură exprimate prin ecuațiile de mai sus, numărul parametrilor liberi ce se pot alege arbitrar va fi

$$p=3n-4. \qquad \text{(I.40)}$$

Dacă toate cele patru condiții sînt satisfăcute, se obține concentrarea (repartizarea) dinamică a masei elementului.

Cînd sînt îndeplinite numai primele trei condiții date de ecuațiile (I.34), (I.36) și (I.37), concentrarea maselor este statică. In cazul unei concentrări statice numărul de parametri ce se pot alege arbitrar va fi deci

$$p=3n-3. \qquad \text{(I.41)}$$

Forțele de inerție ale maselor concentrate static nu formează un sistem echivalent cu cele ale elementului real. Primele trei ecuații fiind satisfăcute, forța de inerție rezultantă este aceeași în ambele cazuri. Momentul rezultant

este însă diferit. In adevăr, dacă ecuația (I.38) nu este verificată, momentele față de G în cele două cazuri nu sînt egale, adică: $-\bar{\varepsilon}I_G \neq -\bar{\varepsilon}\sum_1^n m_j r_j^2$.

Diferența va fi dată de:

$$\Delta M=-\varepsilon\left(\sum m_j r_j^2 - I_G\right). \qquad \text{(I.42)}$$

5.2. Cazuri particulare

a) *Concentrarea într-un singur punct.* Dacă $n=1$, ecuația (I.40) nu poate fi satisfăcută. In schimb, din ecuația (I.41) reiese $p=0$, adică nu se poate alege nici un parametru arbitrar.

Acest lucru denotă că într-un singur punct concentrarea poate fi numai statică. Ecuațiile (I.34), (I.36) și (I.37) determină complet cei trei parametri x, y și m, care corespund centrului de greutate al corpului. Deci, concentrarea maselor în centrul de greutate se poate considera ca o concentrare statică a sistemului într-un singur punct. Acest caz se adoptă cînd elementul execută o mișcare de translație pură (fig. I.21).

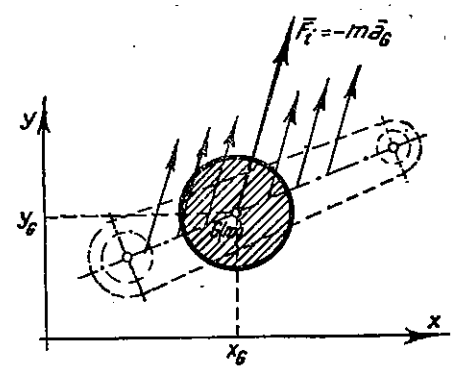


Fig. I.21. Inlocuirea masei unui element printr-o singură masă concentrată.

b) *Concentrarea în două puncte.* Dacă $n=2$, din ecuația (I.40) se determină $p=2$, ceea ce înseamnă că se pot alege doi parametri arbitrari: fie un punct cu cele două coordonate ale sale, fie cele două mase, fie o masă și una dintre coordonatele unui punct. Pentru ca ecuația (I.35) să fie satisfăcută, trebuie ca cele două puncte de concentrare să fie coliniare cu centrul de greutate și să fie situate de o parte și de alta a acestuia.

Alegînd arbitrar un punct B de coordonate x_B și y_B situat la distanța b de G și ținînd seamă de cele expuse mai sus, celălalt punct C' va fi situat la distanța c' de G bine determinată, avînd coordonatele $x_{C'}$ și $y_{C'}$ (fig. I.22). Aplicînd formulele (I.34), (I.35) și (I.38) pentru acest caz, rezultă:

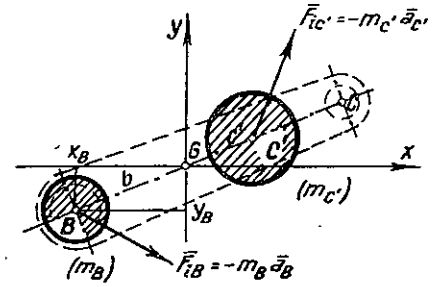


Fig. I.22. Concentrarea masei unei biele în două puncte.

$$\left.\begin{aligned} &m_B+m_{C'}=m\,;\\ &-m_Bb+m_{C'}c'=0\,;\\ &m_Bb^2+m_{C'}c'^2=I_G\,, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.43)}$$

de unde:

$$\left.\begin{aligned} m_B&=\frac{I_Gm}{mb^2+I_G}=m\,\frac{i_G^2}{b^2+i_G^2}\,;\\ m_{C'}&=\frac{m^2b^2}{mb^2+I_G}=m\,\frac{b^2}{b^2+i_G^2}\,; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.44)}$$

$$c'=\frac{I_G}{mb}=\frac{i_G^2}{b}\,. \qquad \text{(I.45)}$$

Din formula (I.45) rezultă că, dacă punctul B se alege arbitrar, celălalt punct de concentrare va coincide cu centrul de oscilaţie al elementului în raport cu B.

In cazul cînd elementul execută numai o mişcare de rotaţie în jurul unui punct, acesta se va alege drept unul dintre punctele de concentrare A, iar celălalt va fi în punctul de oscilaţie corespunzător B' (fig. I.23).

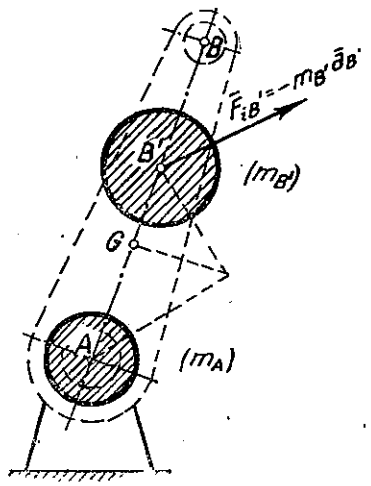


Fig. I.23. Concentrarea masei manivele în două puncte.

In cazul unei biele masele nu se pot concentra dinamic în cele două articulaţii B şi C, ci numai în B, celălalt punct fiind determinat de (I.45).

De multe ori este convenabil ca ambele mase să fie concentrate în articulaţiile B şi C ale elementului. In această ipoteză trebuie aleşi trei parametri arbitrari, ceea ce însă satisface ecuaţia (I.41). Concentrarea maselor în cele două articulaţii nu poate fi deci decît statică.

Relaţiile (I.43) se vor putea scrie:

$$\left.\begin{aligned} m_B+m_C&=m;\\ m_Bb&=m_Cc, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.46)}$$

de unde:

$$\left.\begin{aligned} m_B&=m\,\frac{c}{b+c};\\ m_C&=m\,\frac{b}{b+c}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.47)}$$

Eroarea de momente dată de această concentrare statică faţă de momentul real al forţelor de inerţie, conform formulei (I.42), va fi:

$$\Delta M_i=-\varepsilon\,(m_Bb^2+m_Cc^2-I_G);$$

după înlocuirea lui m_B şi m_C cu valorile de mai sus, se obţine:

$$\Delta M_i=-\varepsilon\,(mbc-I_G). \qquad \text{(I.48)}$$

Momentul faţă de centrul de greutate al forţei rezultante date de concentrarea statică este mai mare decît momentul real M_i. Acest lucru reiese din fig. I.24, unde s-au determinat suporturile forţelor de inerţie rezultante în cele două cazuri. In cazul real, F_i trece prin T şi dă momentul F_ih_1, iar în cazul concentrării statice, trece prin T' dînd momentul F_ih_2. Diferenţa $\Delta hF_i=\Delta M_i$ trebuie să coincidă cu valoarea calculată în (I.48).

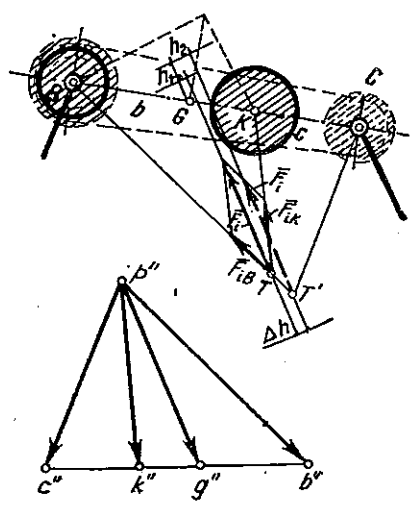


Fig. I.24. Comparaţie între concentrarea statică şi concentrarea dinamică a două mase.

c) *Concentrarea în trei puncte.* Dacă $n=3$, ecuaţiile (I.34), (I.36), (I.37) şi (I.38) devin:

$$\left.\begin{aligned} &m_B+m_C+m_D=m;\\ &m_Bx_B+m_Cx_C+m_Dx_D=0;\\ &m_By_B+m_Cy_C+m_Dy_D=0;\\ &m_Bb^2+m_Cc^2+m_Dd^2=I_G. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.49)}$$

Din (I.40) rezultă că în acest caz $p=5$, adică trebuie aleşi cinci parametri arbitrari. Alegînd două puncte arbitrare B şi C (patru parametri), pentru al treilea punct D se va putea alege arbitrar un singur parametru, de exemplu x_D, adică acesta se va găsi pe o curbă. Se poate demonstra, prin eliminarea parametrilor m_B, m_C şi m_D din ecuaţiile de mai sus, considerîndu-se apoi x_B, x_C, şi y_B, y_C constante, că locul geometric al punctului D este un cerc, care trece prin B şi C şi prin centrele de oscilaţiie K_B şi K_C ale elementului în raport cu B şi C (fig. I.25).

In cazul particular, cînd cele două puncte B şi C se iau coliniare cu centrul de greutate G (fig. I.26), se alege sistemul de coordonate astfel, încît axa x să coincidă cu dreapta care uneşte B şi C şi trece prin G. In acest caz, $y_B=y_C=0$. Din ecuaţiile (I.49) reiese că $y_D=0$, adică în acest caz locul geometric pentru D se reduce la o dreaptă, care coincide cu BC.

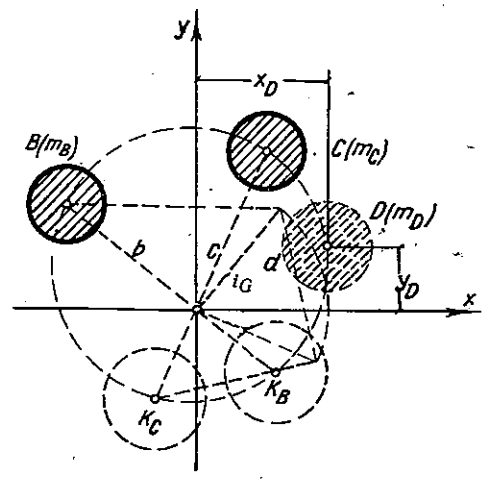


Fig. I.25. Concentrarea masei unui element în trei puncte.

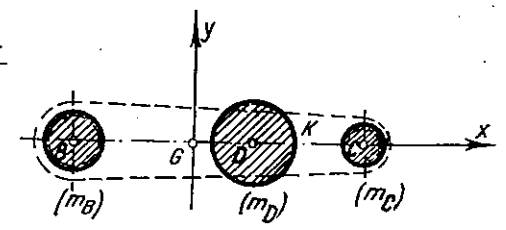


Fig. I.26. Concentrarea masei unui element în trei puncte în linie dreaptă.

Prin urmare, dacă se cere ca cele trei puncte de concentrare să fie coliniare, suportul lor trebuie să treacă prin centrul de greutate al elementului şi ele se pot alege arbitrar oriunde pe acest suport.

La elementele unde centrul de greutate este situat pe dreapta care uneşte centrele celor două articulaţii, este indicat ca masele să fie concentrate în cele două articulaţii B şi C şi în centrul de greutate G (fig. I.27). In acest caz, ecuaţiile (I.49) devin:

$$\left.\begin{aligned} &m_B+m_G+m_C=m;\\ &m_Bb=m_Cc;\\ &m_Bb^2+m_Cc^2=I_G; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.50)}$$

de aici:

$$\left.\begin{aligned} m_B &= \frac{I_G}{b(b+c)} = \frac{mi_G^2}{b(b+c)};\\ m^C &= \frac{I_G}{c(b+c)} = \frac{mi_G^2}{c(b+c)};\\ m_G &= m-(m_B+m_C)=m-\frac{I_G}{bc}=m\left(1-\frac{i_G^2}{bc}\right). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.51)}$$

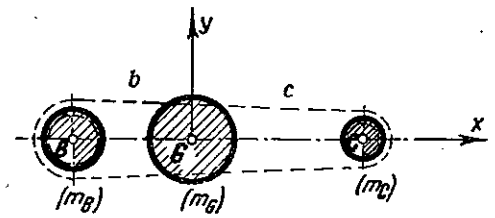


Fig. I.27. Concentrarea masei unui element în trei puncte în linie dreaptă.

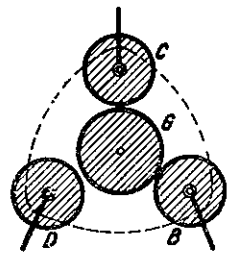


Fig. I.28. Concentrarea masei unui element în patru puncte în linie dreaptă.

d) *Concentrarea în patru puncte.* Dacă $n=4$, rezultă $p=8$, adică poziţiile celor patru puncte se pot alege arbitrar. Masele respective se determină folosind ecuaţiile (I.34) şi (I.39). In fig. I.28 se arată care este cea mai convenabilă concentrare a maselor în patru puncte arbitrare pentru elementul de bază al grupelor de clasa a III-a.

§ 6. O PROPRIETATE A FORŢELOR DE INERŢIE ÎN ORICE MIŞCARE COMPATIBILĂ CU LEGĂTURILE ELEMENTULUI — POLUL DE INERŢIE

Se consideră cazul general al unei mişcări plane, reprezentată prin biela BC a unui mecanism patrulater (fig. I.29).

Pentru poziţia dată a bielei se construieşte cercul inflexiunilor, care nu depinde de parametrii cinematici ai mişcării, ci numai de cei geometrici. Pentru orice repartiţie posibilă a acceleraţiilor în poziţia dată, polul acceleraţiilor J se găseşte pe acest cerc.

Fie J polul acceleraţiilor corespunzător unei repartiţii arbitrare de acceleraţii. Punctul de oscilaţie K, prin care trece forţa de inerţie F respectivă, se determină ca la § 4,3 c pe baza construcţiei:

$$\overline{GJ}\cdot\overline{GK}=i_G^2=\text{const.} \qquad \text{(I.52)}$$

Unghiul format de raza vectoare $\overline{JK}$ şi $\overline{F}_i$, după cum se ştie, este egal cu unghiul $\mu=\sphericalangle JIW$, unde I este centrul instantaneu de rotaţie, iar W — polul inflexiunilor.

Pentru orice poziţie a lui J, relaţia (I.52) fiind valabilă, locul geometric al punctelor de oscilaţie în raport cu polul acceleraţiilor va fi un cerc obţinut ca transformată prin inversiune a cercului inflexiunilor cu centrul de greutate ca centru de inversiune.

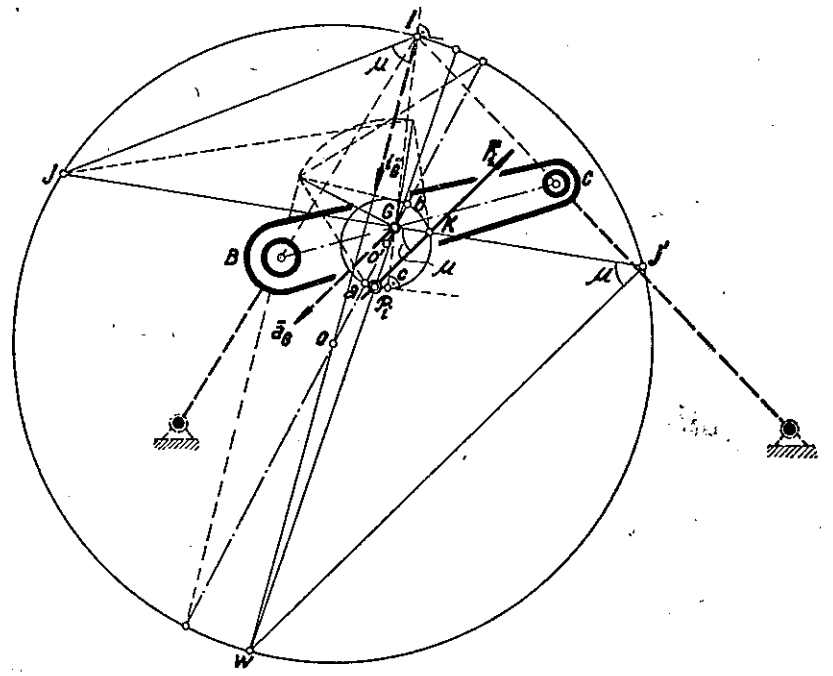


Fig. I.29. Determinarea polului de inerţie.

Deoarece punctele O, G, O' sînt coliniare, cele două puncte a şi b, pe unde trece cercul punctelor de oscilaţie, se poate uşor determina prin construirea a două triunghiuri dreptunghice cu înălţimea i_G, ca în figură.

Notînd cu p puterea centrului de greutate în raport cu cercul infexiunilor, se va putea scrie:

$$p=\overline{GJ}\cdot\overline{GJ'}=\text{const.} \qquad \text{(I.53)}$$

Impărţind (I.52) cu (I.53), se va obţine:

$$\frac{\overline{GK}}{GJ'}=\frac{i_G^2}{p}=\text{const.} \qquad \text{(I.54)}$$

Dacă se notează cu $\mathfrak{a}_i$ punctul unde F_i intersectează dreapta WG, atunci, deoarece $F_i \parallel J'W$, rezultă că

$$\triangle GWJ' \sim \triangle GK\mathfrak{a}_i$$

şi deci

$$\frac{GK}{GJ'} = \frac{G\mathfrak{A}_i}{GW} = \frac{i_G^2}{p} = \text{const.}$$

Punctul $\mathfrak{A}_i$ este deci fix, oricare ar fi repartiţia acceleraţiilor din planul bielei.

Prin urmare, pentru o poziţie dată, la orice mişcare compatibilă cu legăturile elementului, forţa de inerţie rezultantă trece prin acelaşi punct $\mathfrak{A}_i$.

$\mathfrak{A}_i$ se numeşte pol de inerţie şi se poate defini ca transformata polului de inflexiune prin omotetie cu centrul în centrul de greutate şi constanta $\frac{i_G^2}{p}$, unde

i_G este raza de giraţie în raport cu G, iar

p — puterea centrului de greutate faţă de cercul inflexiunilor.

Grafic, acesta se poate uşor determina intersectînd dreapta care uneşte centrul de greutate şi polul inflexiunilor cu perpendiculara pe IG la distanţa $\overline{GC} = \frac{i_G^2}{IG}$ de centrul de greutate în exteriorul lui IG.

Dacă polul inflexiunilor nu este accesibil în planul desenului, se recomandă o altă construcţie (fig. I.30).

Astfel, $\mathfrak{A}_i$ se poate determina şi ca punct de intersecţie a două forţe de inerţie $\bar{F}_i$ şi $\bar{F}_i'$ corespunzătoare la două stări de acceleraţie. Prima se alege de obicei cea dată, iar a doua — cea care este proporţională şi coincide ca direcţie cu vitezele. O astfel de stare de mişcare compatibilă cu legăturile se poate oricînd imprima bielei în poziţia dată, aducînd-o în stare de repaus relativ, adică într-o stare cînd viteza unghiulară instantanee este nulă, adică în momentul cînd îşi schimbă sensul. In acest caz, J se confundă cu I şi planul acceleraţiilor devine proporţional cu planul vitezelor.

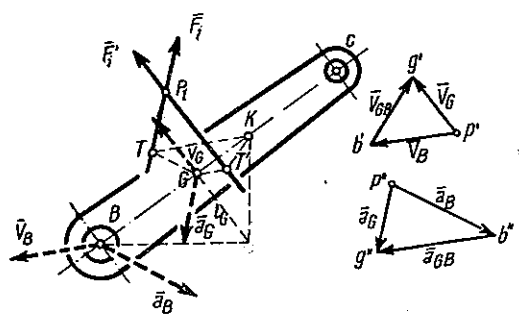


Fig. I.30. Determinarea polului de inerţie cînd polul inflexiunilor nu este accesibil în planul desenului.

In fig. I.30, adoptînd metoda din fig. I.17, s-au determinat cele două forţe de inerţie corespunzătoare stărilor de mai sus, folosind planul dat al acceleraţiilor şi planul vitezelor considerat ca un plan de acceleraţii particularizat.

Polul de inerţie joacă un rol deosebit în dinamica grafică a mecanismelor la determinarea stării de mişcare sub acţiunea unui sistem dat de forţe.

§ 7. REPARTIZAREA REALĂ A FORŢELOR DE INERŢIE ALE ELEMENTULUI

Forţele de inerţie care se dezvoltă într-un element oarecare în timpul mişcării sale îl încarcă pe acesta cu sarcini dinamice suplimentare. Pentru a putea calcula solicitările provocate de aceste forţe, ele nu pot fi reduse la sistemul echivalent compus în general dintr-o rezultantă şi un moment al forţelor de inerţie, din trei forţe, sau dintr-o singură forţă, după cum s-a arătat la § 4. Acest sistem echivalent poate înlocui repartizarea efectivă a forţelor de inerţie numai în cazul determinării forţelor exterioare care provoacă mişcarea, ca de exemplu a reacţiunilor din cuple, după cum s-a arătat şi la punctul 1.

Pentru a determina efectul interior al forţelor de inerţie înseşi asupra elementului în cauză, adică încărcarea dinamică suplimentară provocată de acestea, ele trebuie considerate acolo unde acţionează efectiv, adică trebuie repartizate întocmai pe elementul dat.

Cunoscînd repartizarea acceleraţiilor în lungul elementului în cazul maselor uniform repartizate pe aceeaşi direcţie, problema este ca şi rezolvată. Repartizarea forţelor de inerţie este analogă cu aceea a acceleraţiilor, dar cu semnul schimbat.

In fig. I.31, *a* este reprezentată repartizarea forţelor de inerţie pentru o poziţie dată a bielei unui mecanism bielă-manivelă. Vîrfurile vectorilor acceleraţiei pentru orice punct al bielei se găsesc pe dreapta (AC). Cunoscînd acceleraţia în două puncte B şi C, s-au determinat forţele:

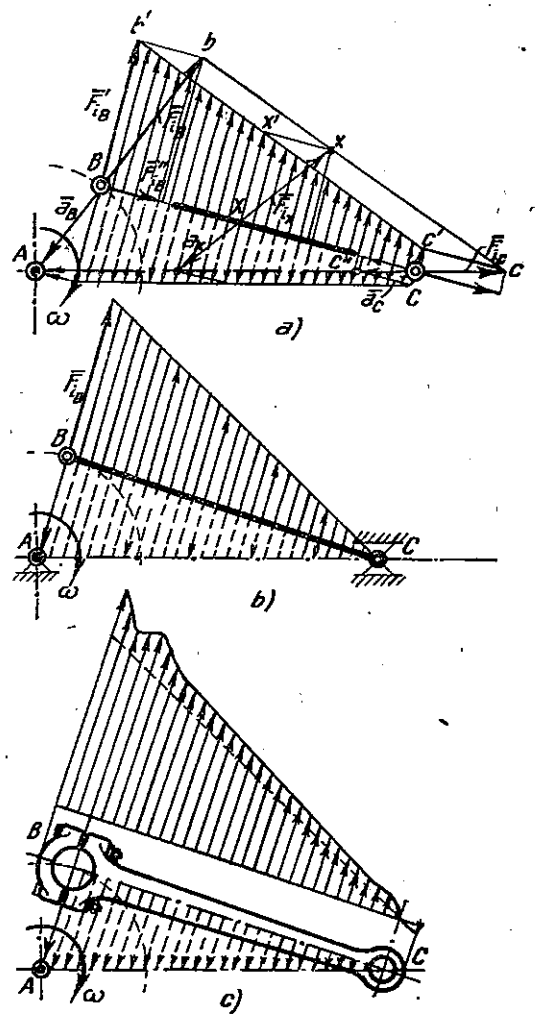


Fig. I.31. Repartizarea forţelor de inerţie pe o bielă.

$$F_{iB} = a_B \frac{Q}{g\overline{BC}} \quad \text{şi} \quad F_{iC} = a_C \frac{Q}{g\overline{BC}},$$

unde $\frac{Q}{g\overline{BC}}$ este masa pe unitatea de lungime. Unind capetele b şi c ale acestor vectori, se obţine diagrama de variaţie a forţelor de inerţie. Componentele nor-

male pe bielă F_i' ale forțelor de inerție o solicită la încovoiere; această repartizare este trapezoidală.

In cazul cînd raportul $\frac{r}{l}$ este destul de mic (sub 1/3), ca de obicei la majoritatea construcțiilor curente, solicitarea maximă a bielei la încovoiere se obține cînd aceasta este perpendiculară pe manivelă (fig. I.31, *b*); în acest caz repartizarea forțelor de inerție ale bielei este practic triunghiulară.

In cazul unei repartizări neuniforme a masei de-a lungul bielei (fig. I.31, *c*), încărcarea este numai aproximativ triunghiulară; totuși, în calcule se poate admite ca triunghiulară.

§ 8. APLICAȚII LA DETERMINAREA FORȚELOR DE INERȚIE ALE MECANISMELOR

1. Să se determine valoarea maximă M_i a momentului forțelor de inerție, cauzat de turația neuniformă a axului cardanic, care leagă cutia de viteze cu diferențialul autocamionului ZIS (fig. I.32).

Date

Viteza autocamionului $v=60$ km/h
Unghiul $\alpha_{max}=5°$
Lungimea axei $l=2\,000$ mm
Greutatea axului $G=16$ kg
Secțiunea axului $D_1/D_2=90/83$ mm
Diametrul de rulare $D_r=1\,000$ mm.

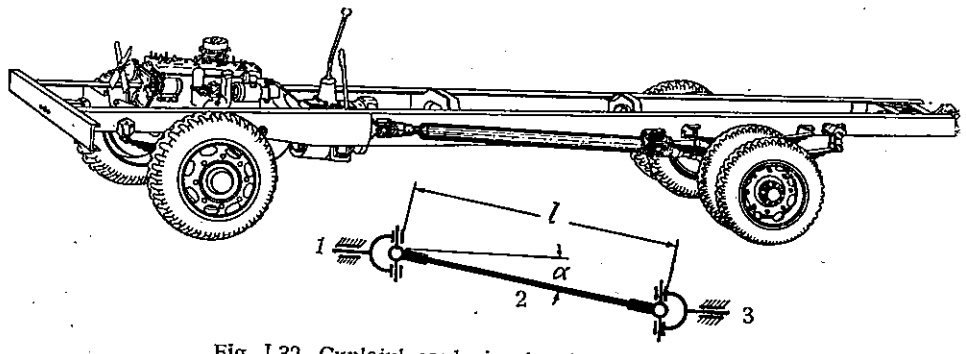


Fig. I.32. Cuplajul cardanic al autocamionului ZIS.

Soluție. După formula (I.28), $M_{i\,max}=-\varepsilon_{2\,max}I_G$.

Se știe că $\varepsilon_2=\frac{d\omega_2}{dt}$. Inlocuind aici valoarea lui ω_2 dată de formula cunoscută, rezultă:

$$\varepsilon_2=\frac{d\omega_2}{dt}=\frac{d\varphi_1}{dt}\frac{d\omega_2}{d\varphi_1}=\omega_1\left(\omega_1\cos\alpha\frac{1}{\sin^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1\cos^2\alpha}\right)'=$$

$$=-\omega_1^2\cos\alpha\sin^2\alpha\frac{\sin 2\varphi_1}{(\sin^2\varphi_1\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}. \qquad (I.55)$$

Pentru a determina valoarea maximă a lui ε_2, va trebui calculată derivata sa:

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt}=\frac{d\varepsilon_2}{d\varphi_1}\cdot\frac{d\varphi_1}{dt}=-2\omega_1^2\cos\alpha\sin^2\alpha\frac{2\sin^4\varphi_1\sin^2\alpha-(2+\sin^2\alpha)\sin^2\varphi_1+\cos^2\alpha}{(\cos^2\alpha+\sin^2\varphi_1\sin^2\alpha)^3}.$$

Această expresie se anulează pentru

$$\sin\varphi_1=\pm\sqrt{\frac{2+\sin^2\alpha-\sqrt{9\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha+4}}{4\sin^2\alpha}}. \qquad (I.56)$$

Analizînd funcțiile de mai sus, se poate arăta că pentru valorile lui φ_1, determinate din ultima ecuație, $\varepsilon_2=\frac{d\omega_2}{dt}$ admite între 0 și 2π patru valori extreme, care sînt două maxime și două minime, toate aceste extreme fiind egale în valoare absolută. Inlocuind valoarea numerică maximă a lui α în ecuația de mai sus, se obține:

$$\sin\varphi_1=\mp 0{,}642,$$

de unde

$$\varphi_1\cong\mp 40°.$$

Cunoscînd viteza autocamionului, se poate determina cu ușurință turația n_1, respectiv, viteza unghiulară ω_1 a axei *I*. Astfel:

$$n_1=\frac{v\cdot 1\,000}{60\cdot\pi\cdot D_r}=\frac{60\cdot 000}{60\cdot\pi\cdot 1}=318\text{ rot/min}\quad\text{și}\quad\omega_1=\frac{\pi\cdot n_1}{30}=33\text{ s}^{-1}.$$

Inlocuind valorile astfel determinate în formula lui ε_2, se obține:

$$\varepsilon_{2\,max}=-(33)^2\cos 5°\sin^2 5°\frac{\sin 80°}{(\cos^2 5°+\sin^2 40°\sin^2 5°)^2}\cong 8{,}25\text{ s}^{-2}.$$

Știind că

$$I_G=\frac{M}{2}\left(\frac{D_1^2}{4}+\frac{D_2^2}{4}\right)=\frac{16}{8\times 9{,}81}(0{,}09^2+0{,}083^2)=0{,}003\text{ kgms}^2$$

și înlocuind aceste ultime două valori în formula (I.28), rezultă:

$$M_{i\,max}=-8{,}25\times 0{,}003\cong 0{,}025\text{ kgm}\cong 2{,}5\text{ kgcm}.$$

Pentru a putea aprecia comparativ această mărime, se calculează momentul motor transmis de ax la turația dată, presupunînd puterea consumată de 30 CP:

$$M=71\,620\frac{P}{n}=71\,620\frac{30}{318}=6\,750\text{ kgcm}.$$

Se observă că $M_{i\,max}$ atinge circa 0,04% din valoarea momentului util, deci se poate neglija din punct de vedere practic. Chiar în fazele de accelerare ale camionului ($\omega_1\neq 0$), cînd $M_{i\,max}$ are o valoare mai mare decît cea de mai sus, ea este totuși destul de mică pentru ca din punct de vedere practic să poată fi neglijată.

2. Să se determine rezultanta forțelor de inerție ale bielei motoare de la locomotiva seria 50100 (fig. I.33) pentru viteza maximă de 60 km/h și pentru poziția determinată de înclinația manivelei de 45° față de orizontală.

Date

Raza manivelei $r=330$ mm
Lungimea bielei $l=2\,600$ mm
Greutatea bielei $G=243$ kg
Masa bielei $m=24{,}8\text{ kgm}^{-1}\text{s}^2$
Diametrul cercului de rulare $D_r=1\,400$ mm.

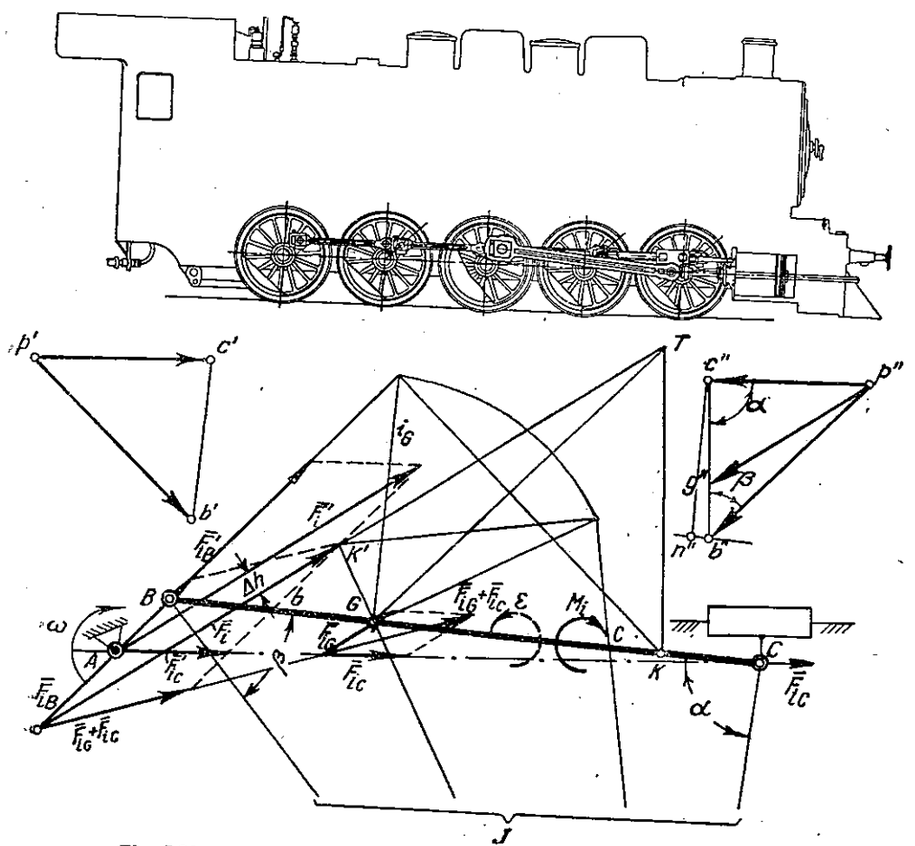


Fig. I.33. Determinarea forţei de inerţie a bielei locomotivei 50100

Soluţie.

A. *Determinarea tuturor elementelor iniţiale ale calculului:*

a) Viteza unghiulară a manivelei corespunzătoare vitezei maxime

$$\omega=\frac{2v_{max}}{D_r}=\frac{2\times 60\times 1\,000}{1{,}4\times 3\,600}=23{,}8\ \mathrm{s}^{-1}.$$

b) Centrul de greutate al bielei. In cazul bielelor de construcţie obişnuită, se recomandă folosirea următoarelor formule:

$$l_1=b=0{,}35\,l \quad \text{şi} \quad l_2=c=0{,}65\,l\ ^{1}).$$

[1]) Kolcin, Mecanica maşinilor, vol. II, p. 83, Maşghiz, 1948.

In cazul dat, $l_1=910$ mm şi $l_2=1\,690$ mm.

Aceste dimensiuni s-au verificat experimental, eroarea găsită fiind de aproximativ 2%.

c) Momentul de inerţie al bielei. Acesta se poate determina pe baza formulei empirice

$$I_G=0{,}175\,ml^{2}\ ^{1})$$

cu datele problemei:

$$I_G=0{,}175\times 24{,}8\times 2{,}6^2=29{,}4\ \mathrm{kgms}^2.$$

La fel, raza de giraţie este

$$i_G=\sqrt{\frac{I}{m}}=1{,}09\ \mathrm{m}.$$

B. *Construirea planului vitezelor şi al acceleraţiilor pentru poziţia dată a manivelei:* Se adoptă următoarele scări:

$$k_l=\frac{0{,}03\ \mathrm{m}}{\mathrm{mm}};$$

$$k_v=\frac{0{,}238\ \mathrm{ms}^{-1}}{\mathrm{mm}};$$

$$k_a=\frac{5{,}67\ \mathrm{ms}^{-2}}{\mathrm{mm}}.$$

Planul vitezelor şi al acceleraţiilor s-a construit după metoda cunoscută din p', respectiv, p'' ca poli. Evaluînd valorile din natură ale acceleraţiilor, se obţine:

$$a_B=r\omega^2=187\ \mathrm{ms}^{-2};$$

$$a_C=k_a(\overline{p''c''})=5{,}67\times 23{,}5=133\ \mathrm{ms}^{-2};$$

$$a_G=k_a(\overline{p''g''})=5{,}67\times 28=159\ \mathrm{ms}^{-2};$$

$$a^{\tau}_{CB}=k_a(\overline{n''c''})=5{,}67\times 23=130\ \mathrm{ms}^{-2}.$$

Acceleraţia unghiulară a bielei va fi:

$$\varepsilon=\frac{a^{\tau}_{CB}}{l}=\frac{130}{2{,}6}=50\ \mathrm{s}^{-2}.$$

C. *Determinarea forţelor de inerţie,* ca la § 4.3:

a) Reduse la o rezultantă şi un moment

$$F_i=ma_G=24{,}8\times 159=3\,940\ \mathrm{kgm};$$

$$M_i=\varepsilon I_G=50\times 29{,}4=1\,470\ \mathrm{kgm},$$

adică sistemul se reduce la o forţă F_i, a cărei dreaptă suport trece prin G, şi la un moment M_i.

b) Reduse la trei forţe

$$F'_i=-F''_i=M_i/l=1\,470/2{,}6=565\ \mathrm{kgf}.$$

Deci, în acest caz sistemul se reduce la o forţă aplicată în G (ca la punctul a) şi la două forţe egale şi de sens contrar aplicate în B şi C, perpendiculare pe BC, astfel ca momentul lor să fie egal cu M_i.

[1]) Kolcin, Mecanica maşinilor, vol. II, p. 83, Maşghiz, 1948.

c) Reduse la o forță unică determinată cu ajutorul centrului instantaneu al accelerațiilor.

Se determină J, centrul instantaneu al accelerațiilor prin metoda cunoscută. Se transpune în G, perpendicular pe I_G, i_G la scara lungimilor, unde $i_G = 1{,}09/0{,}03 = 36{,}3$ mm și se determină centrul de oscilație K' al bielei în raport cu J. Pe aici trece F_i a cărei mărime este aceeași ca la punctul a.

d) Redusă la o forță unică, determinată cu ajutorul planului accelerațiilor.

Folosind planul accelerațiilor, se determină punctul de oscilație al bielei K în raport cu B. Se construiește suportul forței de inerție ca în fig. I.17 și se verifică dacă acesta coincide cu cel determinat la punctul c.

e) Determinarea forțelor de inerție prin metoda concentrării dinamice a maselor în punctele B, G și C.

Se aleg punctele de concentrare B, G și C. Folosind formulele (I.51), se poate scrie:

$$m_B = \frac{I_G}{l_1 l} = \frac{0{,}175\, ml^2}{0{,}35\, l^2} = 0{,}5\, m = 12{,}4 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^2;$$

$$m_C = \frac{I_G}{l_2 l} = \frac{0{,}175\, ml^2}{0{,}65\, l^2} = 0{,}27\, m = 6{,}7 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^2;$$

$$m_G = 0{,}23 m = 5{,}7 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^2.$$

Cunoscînd aceste mase, forțele de inerție vor fi:

$$F_{i_B} = m_B \cdot a_B = 12{,}4 \times 187 = 2\,320 \text{ kgf};$$
$$F_{i_C} = m_C \cdot a_C = 6{,}7 \times 133 = 890 \text{ kgf};$$
$$F_{iG} = m \cdot a_G = 5{,}7 \times 159 = 900 \text{ kgf}.$$

Pentru a reprezenta grafic aceste forțe, se alege scara forțelor

$$k_F = 75 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}}.$$

Direcțiile și sensurile acestor forțe vor fi date de accelerațiile punctelor respective. Forța de inerție totală se va determina adunînd vectorial cele trei forțe. In fig. I.33 s-au compus două cîte două, observînd că rezultanta obținută are același suport și același sens ca și mai înainte.

Mărimea ei va fi:

$$F_i = 52{,}4 \times 75 = 3\,940 \text{ kgf},$$

ceea ce verifică calculele anterioare.

f) Determinarea forțelor de inerție prin metoda concentrării statice în punctele B și C. Folosind formulele (I.47), se deduce:

$$m_B = m \frac{l_2}{l} = 0{,}65\, m = 16{,}12 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^2 \quad \text{și} \quad m_C = m \frac{l_1}{l} = 0{,}35\, m = 8{,}68 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^2.$$

Forțele de inerție vor fi:

$$F'_{iB} = m_B a_B = 16{,}12 \times 187 = 3\,010 \text{ kgf};$$
$$F'_{iC} = m_C a_C = 8{,}68 \times 133 = 1\,154 \text{ kgf}.$$

Folosind aceeași scară k_F, precum și planul accelerațiilor, se determină suportul rezultantei date de aceste forțe.

In fig. I.33 se observă diferența dintre concentrarea statică și concentrarea dinamică a maselor, care constă în deplasarea paralelă cu sine însăși a forței totale de inerție. Această eroare se poate exprima printr-un moment de mărimea

$$\Delta M_i = F_i \Delta h k_i = 3\,940 \times 3{,}7 \times 0{,}03 \cong 437 \text{ kgm}.$$

Aceeași valoare se poate determina folosind formula (I.48):

$$|\Delta M_i| = |-\varepsilon (m l_1 l_2 - I_G)| = 440 \text{ kgm}.$$

In fig. I.32 se vede că momentul forței F'_i față de centrul de greutate este mai mare decît M_i din cazul real, ceea ce de altfel s-a arătat și la § 5.

CAPITOLUL II

CALCULUL FORȚELOR NECUNOSCUTE, FĂRĂ A SE ȚINE SEAMĂ DE FRECĂRI

§ 9. CONDIȚIILE PENTRU DETERMINAREA STATICĂ A LANȚURILOR CINEMATICE PLANE

Pentru a putea aplica metoda echilibrului cinetostatic în vederea determinării forțelor necunoscute, în speță a reacțiunilor din cuple, se impune condiția ca lanțul cinematic analizat să fie static determinat. Cu alte cuvinte, numărul necunoscutelor introduse de aceste reacțiuni trebuie să fie egale cu numărul ecuațiilor de echilibru ce se pot stabili.

Se va cerceta, în primul rînd, cîte necunoscute introduc în calcule reacțiunile din cuple.

La cupla de rotație de clasa a V-a, reacțiunea trecînd prin centrul cuplei, numărul necunoscutelor este doi — direcția și mărimea (fig. I.34). La cupla de translație de clasa a V-a, reacțiunea fiind normală pe ghidaj, numărul necunoscutelor este tot doi — punctul de aplicație și mărimea (fig. I.35). La cuplele superioare (de clasa a IV-a), reacțiunea fiind normală în punctul de contact, necunoscută este numai mărimea ei (fig. I.36).

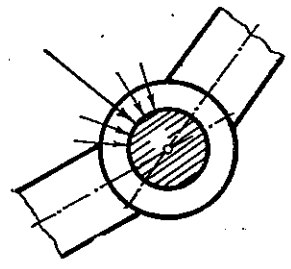


Fig. I.34. Reacțiunea în cupla de rotație.

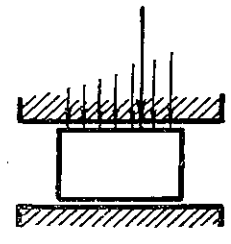


Fig. I.35. Reacțiunea în cupla de translație.

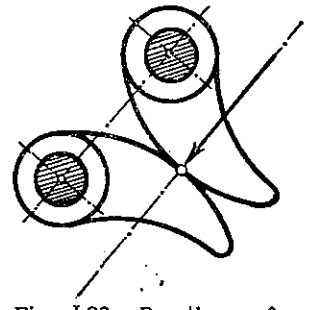


Fig. I.36. Reacțiunea în cupla superioară.

Deci, dacă într-un lanţ cinematic avem c_5 cuple de clasa a V-a şi c_4 cuple de clasa a IV-a, numărul necunoscutelor va fi:

$$2c_5+c_4.$$

Dacă lanţul cinematic este compus din n elemente şi ştiind că pentru fiecare element putem scrie trei ecuaţii de echilibru, numărul total al ecuaţiilor de echilibru va fi $3n$. Conform condiţiei de mai sus, trebuie ca

$$3n=2c_5+c_4. \qquad (I.57)$$

Deoarece cuplele superioare se pot înlocui cu cuple inferioare, ecuaţia se mai poate scrie

$$3n=2c_5. \qquad (I.58)$$

Această condiţie, care se impune lanţului cinematic pentru a fi static determinat, este identică cu cea care s-a impus unui lanţ cinematic pentru a deveni o grupă Assur.

In concluzie, grupele lui Assur sînt static determinate şi pentru calculul reacţiunilor din cuple se va studia echilibrul cinetostatic al acestora.

§ 10. DETERMINAREA REACŢIUNILOR DIN CUPLE LA GRUPELE PLANE STATIC DETERMINATE ALE LUI ASSUR

10.1. Generalităţi

Metode de calcul. In mod convenţional reacţiunile din cuple vor fi prevăzute cu indici. Prima cifră din indice va indica elementul care exercită reacţiunea, iar a doua, elementul asupra căruia se exercită reacţiunea. Astfel, de exemplu, $\bar{F}_{12}$ este reacţiunea elementului *1* asupra elementului *2*. Prin inversiunea cifrelor în indice se schimbă şi sensul forţei, adică $\bar{F}_{12}=-\bar{F}_{21}$.

Fig. I.37. Inlocuirea unei forţe şi unui moment cu o singură forţă.

Pentru a putea analiza echilibrul cinetostatic al unei *grupe*, toate forţele exterioare — inclusiv cele de inerţie — care acţionează asupra unui element se vor compune vectorial într-o singură rezultantă. In cazul cînd asupra elementului acţionează şi un moment, acesta se va compune cu forţa. Rezultanta acestei compuneri va fi o forţă unică de aceeaşi mărime cu cea dată, dar cu linia de acţiune deplasată paralel cu sine însăşi, astfel ca momentul acesteia faţă de un punct A de pe linia sa de acţiune iniţială (suportul) să fie egal ca mărime şi sens cu momentul dat, adică $Fd=M$.

Se vor expune două metode grafice pentru determinarea reacţiunilor din cuple, precum şi principiile unei metode grafo-analitice. I. Artobolevski, în cartea sa „Teoria mecanismelor şi a maşinilor" (Editura Tehnică, 1956), propune o altă metodă grafo-analitică bazată pe înlocuirea reacţiunii din cuplă prin componentele sale perpendiculare şi paralele cu bara[1]). Nu se va accentua superioritatea metodei

[1]) Prin bară se înţelege aici, ca şi mai departe, elementul reprezentat prin segmentul de dreaptă care uneşte centrele articulaţiilor sale extreme.

grafice faţă de cea grafo-analitică, deoarece aceasta variază de la caz la caz. Fiecare metodă îşi are avantajele şi dezavantajele ei. Metoda grafică este o metodă mai rapidă, mai expeditivă şi mai inginerească. Uneori este mult mai indicată decît cea grafo-analitică, în special la *grupele* de clasa a II-a. In unele poziţii ale mecanismului însă, construcţiile grafice pot depăşi planul accesibil al desenului şi, în acest caz, calculul grafo-analitic rezolvă problema.

Prima metodă grafică cu care se va lucra este metoda suprapunerii efectelor. Aceasta constă în următoarele: se consideră unul dintre elemente încărcat, iar celelalte, descărcate. Cunoscînd direcţia forţelor în elementele descărcate, reacţiunile parţiale din *cuple* se pot determina uşor. Considerînd apoi încărcat un alt element, iar celelalte fiind descărcate, se determină la fel celelalte reacţiuni parţiale. Procedînd mai departe în mod analog şi compunînd apoi vectorial reacţiunile parţiale obţinute, se determină reacţiunile totale. Această metodă se recomandă mai ales la grupele unde unele elemente sînt neîncărcate efectiv.

Cealaltă metodă, care se recomandă în special pentru *grupele* de clasa a II-a, se bazează pe construirea unui poligon funicular care trece prin trei puncte — punctele de aplicaţie ale reacţiunilor din cuple.

Teoreme auxiliare. In construcţiile ce vor urma se vor folosi două teoreme auxiliare cunoscute din mecanica teoretică.

Prima teoremă se referă la poligoanele funiculare care trec prin două puncte şi se enunţă astfel: între infinitatea de poligoane funiculare ale căror două laturi indicate trec prin două puncte fixe există o legătură de afinitate. Dreapta care uneşte cele două puncte date este axa de afinitate (dreapta Culmann) şi e paralelă cu linia polilor din poligoanele forţelor respective. Această proprietate se demonstrează după cum urmează: fie două poligoane funiculare *I* şi *II* care trec prin A şi B (articulaţiile elementului *I*), cu polii respectivi în O_1' şi O_1'' (fig. I.38). Din poligonul forţelor reiese:

$$\bar{f}_A+\bar{f}_B=\bar{F}_1=\bar{f}_A'+\bar{f}_B'.$$

Să considerăm acum sistemul $(\bar{f}_A, -\bar{f}_A', -\bar{f}_B', \bar{f}_B)$, care este echivalent cu O, adică

$$\bar{f}_A-\bar{f}_A'-\bar{f}_B'+\bar{f}_B=0;$$

deoarece însă

$$\bar{f}_B-\bar{f}_B'=\overline{O_1''O_1'} \quad \text{şi} \quad \bar{f}_A-\bar{f}_A'=\overline{O_1'O_1''},$$

ecuaţia se poate scrie

$$\overline{O_1''O_1'}+\overline{O_1'O_1''}=0.$$

Pe de altă parte, în poligonul funicular forţa $\overline{O_1''O_1'}$ trece prin B, punctul de intersecţie a lui $\bar{f}_B$ şi $\bar{f}_B'$, iar forţa $\overline{O_1'O_1''}$, prin A, punctul de intersecţie a lui $\bar{f}_A$ şi $\bar{f}_A'$. Deoarece aceste două forţe trebuie să se anuleze, urmează că $\overline{O_1''O_1'}$ trebuie să treacă şi prin A, iar $\overline{O_1'O_1''}$ — şi prin B. Prin urmare, direcţia AB trebuie să fie paralelă cu linia polilor $\overline{O_1'O_1''}$.

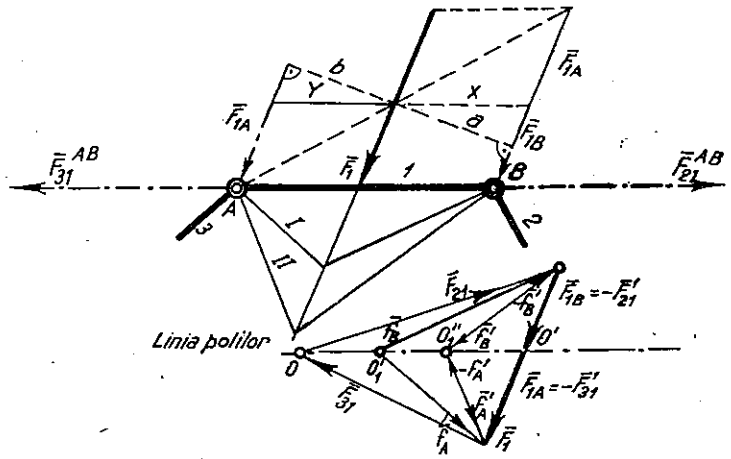


Fig. I.38. Construcţii auxiliare pentru determinarea reacţiunilor din articulaţiile unui element.

Oricare alt poligon funicular, adică şi cel dat de reacţiunile reale $\bar{F}_{21}$ şi $\bar{F}_{31}$, va avea polul pe dreapta $O_1'O_1''$ anterior determinată.

A doua teoremă se referă la înlocuirea forţei rezultante cu un sistem echivalent, ceea ce, după cum se ştie, nu schimbă reacţiunile din cuple şi se enunţă astfel: înlocuind forţa $\bar{F}_1$ prin componentele sale paralele $\bar{F}_{1A}$ şi $\bar{F}_{1B}$ trecînd prin articulaţiile A şi B componentele reacţiunilor după direcţia barei ($\bar{F}_{21}^{AB}$ şi $\bar{F}_{31}^{AB}$) vor fi egale şi de sens contrar, iar cele paralele cu $\bar{F}_1$ ($\bar{F}_{21}'$ şi $\bar{F}_{31}'$) vor fi egale şi de sens contrar cu $\bar{F}_{1A}$ şi $\bar{F}_{1B}$.

Demonstraţia este simplă: din poligonul forţelor (v. fig. I.38) se observă că $\bar{F}_{31}$ se compune cu $\bar{F}_{31}'$ şi $\overline{O'O}$, iar $\bar{F}_{21}$ cu $\bar{F}_{21}'$ şi $\overline{OO'}$. Notînd $\overline{O'O}$ cu $\bar{F}_{31}^{AB}$ şi $\overline{OO'}$ cu $\bar{F}_{21}^{AB}$, ambele avînd direcţia barei AB, fiind egale şi de sens contrar, se va putea scrie:

$$\bar{F}_{31}=\bar{F}_{31}^{AB}+\bar{F}_{31}' \quad \text{şi} \quad \bar{F}_{21}=\bar{F}_{21}^{AB}+\bar{F}_{21}',$$

unde $\bar{F}_{31}'$, $\bar{F}_{21}'$ şi $\bar{F}_{31}^{AB}$, $\bar{F}_{21}^{AB}$ (în care $\bar{F}_{31}^{AB}=-\bar{F}_{21}^{AB}$) sînt componentele reacţiunilor paralele cu forţa $\bar{F}_1$, respectiv, cu direcţia AB.

Reiese că $\bar{F}_{31}'$ şi $\bar{F}_{21}'$ sînt egale şi de sens contrar cu componentele $\bar{F}_{1A}$ şi $\bar{F}_{1B}$ ale forţei F_1 după cele două direcţii paralele care trec prin A şi B.

Precizările de mai sus au o importanţă deosebită, deoarece una dintre componentele reacţiunii în articulaţii se poate imediat determina printr-o construcţie simplă ca la descompunerea unei forţe $\bar{F}_1$ în două componente paralele $\bar{F}_{1A}$ şi $\bar{F}_{1B}$.

In adevăr, din asemănarea triunghiurilor se poate scrie: $F_{1A}/F_{1B}=x/y=a/b$ sau $F_{1A}b=F_{1B}a$, adică momentele celor două forţe faţă de un punct de pe linia de acţiune a lui $\bar{F}_1$ sînt egale, ceea ce justifică construcţia.

10.2. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul I (fig. I.39, *a*)

a) *Metoda grafică 1.* In poligonul forţelor (fig. I.39, *b*) s-au însumat vectorii $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$, care sînt rezultanta tuturor forţelor ce acţionează asupra elementelor *1* şi *2*. Considerînd descărcată bara *2* şi acţionînd numai $\bar{F}_1$, direcţia reacţiunilor parţiale $\bar{F}_{21}'=\bar{F}_{42}'$ coincide cu direcţia barei *2*. Prin intersecţia lui $\bar{F}_{21}'$ cu $\bar{F}_1$ va trece reacţiunea parţială $\bar{F}_{31}'$. In poligonul forţelor s-a descompus F_1 în cele două reacţiuni parţiale $\bar{F}_{21}'$ şi $\bar{F}_{31}'$. La descompunere se va respecta totdeauna ca forţa parţială $\bar{F}_{21}'$ a reacţiunii între cele două bare componente ale grupei să treacă prin punctul de întîlnire a celor două forţe respective $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$.

Descărcînd apoi bara *1* şi încărcînd numai bara *2*, s-a determinat la fel în poligonul forţelor reacţiunile parţiale $\bar{F}_{42}''$ şi $\bar{F}_{12}''$. Şi în acest caz s-a ţinut seamă de cele arătate mai sus, adică $\bar{F}_{12}''$ să treacă prin punctul de întîlnire a lui $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$.

Ştiind că $\bar{F}_{21}=\bar{F}_{21}'+\bar{F}_{21}''$, se vor compune forţa $\bar{F}_{21}'$ cu $-\bar{F}_{12}''$ formînd paralelogramul forţelor (haşurat în fig. I.39, *b*). Diagonala paralelogramului este forţa $\bar{F}_{21}$ căutată.

Scriind ecuaţiile de echilibru:

$$\bar{F}_{21}+\bar{F}_1+\bar{F}_{31}=0 \quad \text{şi} \quad \bar{F}_{12}+\bar{F}_2+\bar{F}_{42}=0,$$

cu necunoscutele $\bar{F}_{31}$ şi $\bar{F}_{42}$, ele se vor putea determina prin unirea vîrfului O al paralelogramului cu originea lui $\bar{F}_1$, respectiv, cu vîrful lui $\bar{F}_2$. Deoarece întregul sistem este în echilibru, trebuie ca:

$$\bar{F}_{31}+\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{F}_{42}=0,$$

ceea ce se vede că este verificat şi grafic.

Ca o regulă geometrică, paralelogramul forţelor (haşurat în figură) se formează astfel. Din punctele de întîlnire ale reacţiunilor parţiale, se duc paralele la acea reacţiune parţială din varianta contrarie de încărcare, care trece prin punctul de întîlnire a celor două forţe date $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$. Cele două paralele astfel duse prin intersecţia lor dau vîrful paralelogramului căutat. Astfel, din O' se duce paralelă la $\bar{F}_{12}''$ şi din O'' la $\bar{F}_{21}'$. Intersecţia acestora determină punctul O.

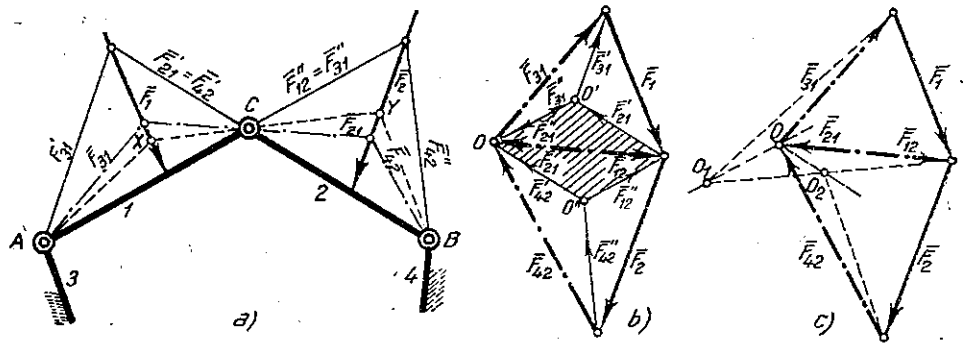


Fig. I.39.
a) Determinarea reacțiunilor în cuplele grupei de clasa a II-a, aspectul *1*; — *b*) prin metoda suprapunerii efectelor; — *c*) prin metoda poligoanelor ce trec prin trei puncte date.

b) *Metoda grafică 2.* Construind poligonul forțelor (fig. I.39, *c*), se va determina linia polilor pentru toate poligoanele funiculare ale elementului *1*, care trec prin A și C, și ale elementului *2*, care trec prin C și B, conform fig. I.38.

In acest scop se alege un punct arbitrar X pe $\overline{F}_1$. Unind acest punct cu A și C, se duc din extremitățile lui $\overline{F}_1$ paralele la aceste direcții în poligonul forțelor.

Paralela la direcția XC cuprinsă între cele două forțe $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ trebuie dusă din punctul unde $\overline{F}_1$ se atașează la $\overline{F}_2$.

Prin punctul de intersecție O_1 a acestora se duce o paralelă la AC. Astfel se obține linia polilor pentru elementul *1*, adică locul geometric pe care se sprijină toate reacțiunile posibile în A și C. Alegînd un alt punct arbitrar Y pe $\overline{F}_2$, se procedează la fel, obținîndu-se linia polilor pentru elementul *2*, adică locul geometric pe care se sprijină toate reacțiunile posibile în C și B (pentru simplificarea construcției punctul Y s-a ales chiar pe direcția XC determinată anterior).

In punctul de intersecție O a celor două linii ale polilor se sprijină reacțiunea reală în C, comună celor două poligoane, precum și reacțiunile reale în A și B. In consecință, O este polul poligonului funicular care trece prin cele trei puncte A, B, C. Sensul săgeților s-a stabilit pe baza considerentelor că atît fiecare element luat separat, cît și întreaga grupă, trebuie să fie în echilibru, adică sensul trebuie să fie același pentru fiecare dintre aceste cazuri — de exemplu: forțele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_{42}$, $\overline{F}_{31}$ fiind forțe exterioare care acționează asupra grupei, ele sînt în echilibru, adică sensul săgeților este același în continuare.

c) *Metoda grafo-analitică.* Se descompun forțele $\overline{F}_{31}$ și $\overline{F}_{42}$ în cîte două componente: paralele cu direcția barelor $\overline{F}_{31}^{AC}$ și $\overline{F}_{42}^{BC}$ și paralele cu direcția forțelor respective $\overline{F}_{31}^{1}$ și $\overline{F}_{42}^{2}$, adică:

$$\overline{F}_{31}=\overline{F}_{31}^{AC}+\overline{F}_{31}^{1} \quad \text{și} \quad \overline{F}_{42}=\overline{F}_{42}^{BC}+\overline{F}_{42}^{2}. \tag{I.59}$$

Din ecuațiile de momente care exprimă echilibrul lui *1* și *2* rezultă:

$$M_C(\overline{F}_1)+M_C(\overline{F}_{31}^{1})=0 \quad \text{și} \quad M_C(\overline{F}_2)+M_C(\overline{F}_{42}^{2})=0; \tag{I.60}$$

sau grafic, ca în fig. I.38, se vor determina cele două necunoscute $\overline{F}_{31}^{1}$ și $\overline{F}_{42}^{2}$. Din ecuațiile vectoriale care exprimă echilibrul grupei întregi

$$\overline{F}_{31}^{AC}+\overline{F}_{31}^{1}+\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_{42}^{2}+\overline{F}_{42}^{BC}=0, \tag{I.61}$$

se pot determina necunoscutele $\overline{F}_{31}^{AC}$ și $\overline{F}_{42}^{BC}$.

Reacțiunea din C se determină scriind și rezolvînd grafic ecuația de echilibru a unui element, de exemplu:

$$\overline{F}_{21}+\overline{F}_1+\overline{F}_{31}=0, \tag{I.62}$$

sau din ecuația:

$$\overline{F}_{21}=\overline{F}_{21}^{1}+\overline{F}_{21}^{AC}=\overline{F}_{21}^{1}-\overline{F}_{31}^{AC}.$$

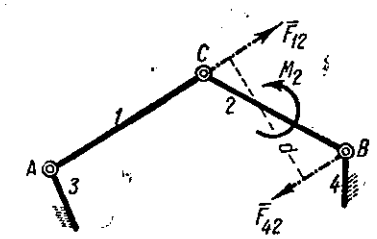


Fig. I.40. Reacțiunile la grupa de clasa a II-a, aspectul 1, în cazul particular.

d) *Caz particular.* Cînd asupra grupei acționează numai un moment M_2 pe elementul *2* (fig. I.40), reacțiunile în C și B vor fi egale, de sens contrar și paralele cu direcția AC. Valoarea reacțiunilor va fi

$$F_{12}=F_{42}=\frac{M}{d}.$$

10.3. Calculul reacțiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 2 (fig. I.41, *a*)

a) *Metoda grafică 1.* Considerînd elementul *1* încărcat cu forța $\overline{F}_1$ și elementul *2* descărcat, va trebui determinată direcția reacțiunilor în C și A. Elementul CB fiind descărcat și știind că reacțiunea $\overline{F}_{42}$ este perpendiculară pe direcția ghidajului xx, aceasta trebuie să treacă prin C, căci altfel nu poate fi echilibrată de $\overline{F}_{12}$ [două forțe sînt în echilibru cînd au aceeași linie de acțiune, fiind egale ca mărime și de sens contrar (fig. I.42)].

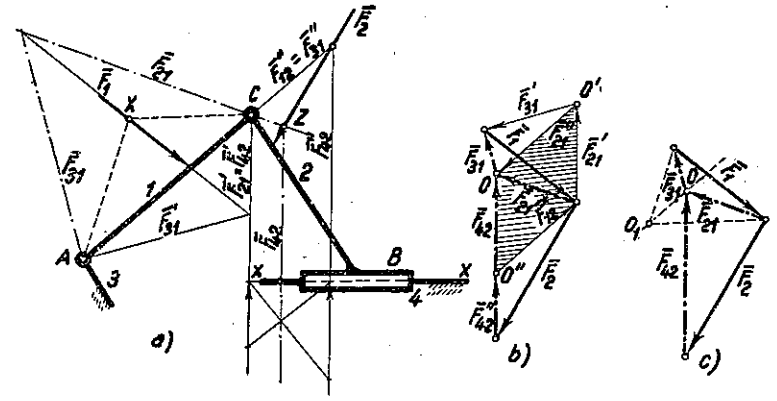


Fig. I.41. Determinarea reacțiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 2.

Prin urmare, perpendiculara în C pe xx va da direcție reacțiunii $\overline{F}'_{21}$. Prin punctul de intersecție a lui F_1 cu acesta va trece $\overline{F}'_{31}$. Procedînd la fel ca în fig. I.39, *b*, adică în poligonul forțelor ducînd din capetele lui $\overline{F}_1$ paralele la direcțiile stabilite, ținînd seamă de principiul fixat mai înainte, se obțin $\overline{F}'_{21}$ și $\overline{F}'_{31}$ (fig. I.41, *b*).

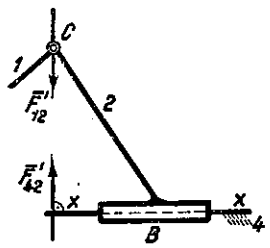


Fig. I.42. Reacțiunile la un element cu o cuplă de translație și una de rotație.

Descărcînd acum elementul *1*, $\overline{F}''_{12}$ va coincide cu direcția AC; iar $\overline{F}''_{42}$ perpendicular pe xx va trece prin punctul de intersecție a direcției AC cu $\overline{F}_2$. Procedînd la fel, se obțin în poligonul forțelor $\overline{F}''_{12}$ și $\overline{F}''_{42}$. Ducînd din O' și din O'' paralele, după cum s-a arătat la grupa de clasa I, aspectul 1, se obțin punctul O și paralelogramul haşurat. Unind O cu originea lui $\overline{F}_1$ și vîrful lui $\overline{F}_2$, se obțin forțele $\overline{F}_{31}$ și $\overline{F}_{42}$. Pentru determinarea punctului de aplicație al lui $\overline{F}_{42}$ s-a trasat prin C direcția lui $\overline{F}_{21}$, obținîndu-se punctul de intersecție Z cu $\overline{F}_2$. Deoarece cele trei forțe $\overline{F}_{12}$, $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_{42}$ trebuie să fie în echilibru, $\overline{F}_{42}$ va trece prin Z. Drept control s-a determinat grafic suportul lui $\overline{F}_{42}$ și prin compunerea celor două forțe $\overline{F}'_{42}$ și $\overline{F}''_{42}$.

b) *Metoda grafică 2.* In fig. I.41, *c* s-a construit poligonul forțelor cunoscute $\overline{F}_1+\overline{F}_2$. Alegînd punctul arbitrar X pe $\overline{F}_1$ (fig. I.41, *a*), s-a determinat, după metoda cunoscută, linia polilor pentru elementul *I*. Linia polilor pentru elementul *2* va porni din vîrful lui $\overline{F}_2$ avînd direcția perpendiculară pe xx. Intersecția celor două direcții dă polul O al poligonului funicular, care va trece prin punctele A, C și punctul de aplicație al lui $\overline{F}_{42}$. Punctul de aplicație al lui $\overline{F}_{42}$ se determină ca și în cazul precedent.

c) *Metoda grafo-analitică.* Știind că

$$\overline{F}_{31}=\overline{F}^{AC}_{31}+\overline{F}^{1}_{31},$$

unde $\overline{F}^{1}_{31}$ se determină prin metoda cunoscută, fie prin ecuația de momente ca la grupa de clasa a II-a, aspectul 1, fie grafic, ca în fig. I.38, se poate scrie următoarea ecuație de echilibru:

$$\overline{F}^{AC}_{31}+\overline{F}^{1}_{31}+\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_{42}=0. \qquad (I.63)$$

Cei doi vectori, cunoscuți numai după direcție, se pot determina astfel cu ajutorul acestei ecuații.

Pentru a determina punctul de aplicație al lui $\overline{F}_{42}$, se scrie echilibrul elementului *2* luat separat de restul grupei.

Din ecuația

$$M_C(\overline{F}_2)=M_C(\overline{F}_{42}) \qquad (I.64)$$

se poate astfel determina distanța de la C pînă la suportul forței $\overline{F}_{42}$.

d) *Cazuri particulare* (fig. I.43). Cînd asupra grupei acționează numai un moment M_1 pe elementul *1* (reprezentat cu linie punctată), reacțiunile $\overline{F}_{31}$ și $\overline{F}_{21}$ vor fi perpendiculare pe xx, formînd un cuplu de mărime $F_{31}d=F_{21}d=M_1$. Dacă momentul M_2 acționează pe elementul *2* reprezentat (cu linie plină), reacțiunile $F_{31}=F_{12}=0$, deoarece cupla de rotație nu poate transmite momentul. Intre elementele *4* și *2* va apărea un moment de echilibrare $M_{42}=-M_2$.

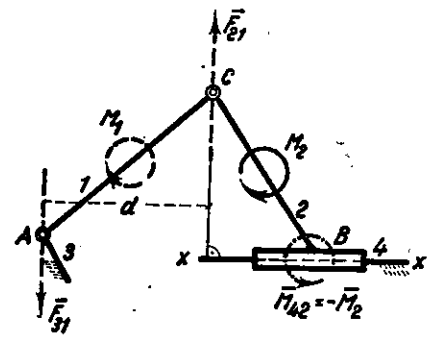


Fig. I.43. Determinarea reacțiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 2, cînd asupra ei acționează numai momente exterioare.

e) *Observații.* De multe ori punctul de aplicație U al reacțiunii din cupla de translație cade în afara cuplei. In acest caz este uneori indicat ca reacțiunea să fie reprezentată fie redusă la centrul cuplei (mijlocul patinei), fie prin două forțe care acționează la capetele cuplei de translație (în special cînd cupla este cu joc și sprijinirea patinei în ghidaj se poate considera ca făcîndu-se pe muchiile marginale).

In primul caz (fig. I.44) se obține o forță egală cu cea dată $\overline{F}_{12}$ și un moment $\overline{M}_{12}$ de mărimea

$$M_{12}=\overline{F}_{12}\overline{d},$$

unde d este distanța dintre punctul de aplicație U al forței $\overline{F}_{12}$ și centrul C al cuplei.

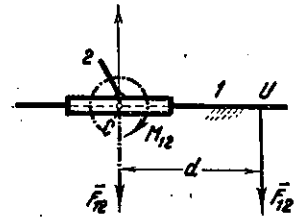


Fig. I.44. Reducerea reacțiunii la centrul ghidajului cuplei de translație.

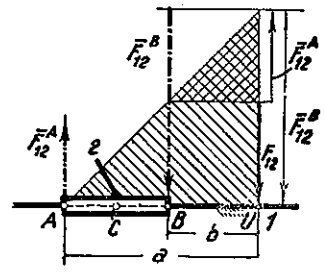


Fig. I.45. Reducerea reacțiunilor la două forțe care acționează în capetele ghidajului cuplei de translație.

In cazul 2 (fig. I.45), soluția va fi dată prin descompunerea forței $\overline{F}_{12}$ în cele două direcții. In fig. I.45 $\overline{F}_{12}$ a fost descompusă grafic în $\overline{F}^{A}_{12}$ și $\overline{F}^{B}_{12}$, după regulile cunoscute. Drept control, suma momentelor forțelor obținute față de U este egală cu 0:

$$F^{A}_{12}a-F^{B}_{12}b=0.$$

Din asemănarea celor două triunghiuri haşurate se poate scrie:

$$F^{A}_{12}/b=F^{B}_{12}/a$$

sau

$$F^{A}_{12}\cdot a=F^{B}_{12}\cdot b,$$

ceea ce verifică relația mecanică.

10.4. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 3 (fig. I.46, *a*)

a) *Metoda grafică 1.* Considerînd încărcate succesiv numai elementul *1*, apoi *2*, şi ţinînd seamă de cele stabilite la § 10.1, s-au determinat în fig. I.46, *b* reacţiunile parţiale, respectiv, punctele O' şi O''. Pentru a determina punctul O, vîrful paralelogramului de forţe, se observă că, aplicînd regula stabilită, paralelogramul se reduce la o dreaptă cu vîrful în O, $O'O$ fiind egal cu $\overline{F}''_{21}$ şi $O''O$ cu $\overline{F}'_{21}$. Unind O cu originea lui $\overline{F}_1$ şi vîrful lui $\overline{F}_2$, se obţin forţele $\overline{F}_{31}$ şi $\overline{F}_{42}$. Punctul de aplicaţie al lui $\overline{F}_{21}$ se determină analizînd separat echilibrul elementului *2* sau *1*, ştiind că direcţia lui $\overline{F}_2$ trebuie să treacă prin punctul de intersecţie a lui $\overline{F}_2$ cu $\overline{F}_{42}$ şi a lui $\overline{F}_1$ cu $\overline{F}_{31}$. Drept control, în fig. I.46, *a* s-a determinat prin metoda clasică suportul lui $\overline{F}_{21}$,

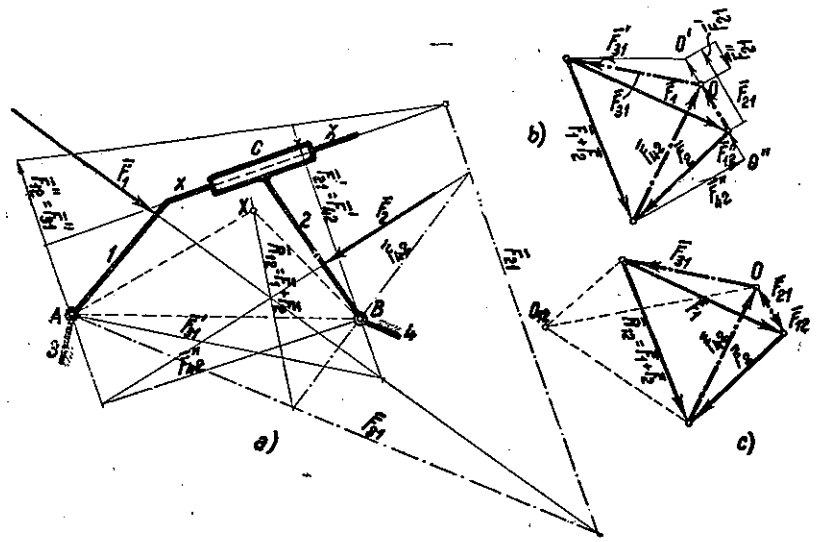


Fig. I.46. Determinarea reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 3.

cunoscînd suporturile şi valorile celor două forţe, $\overline{F}'_{21}$ şi $\overline{F}''_{21}$. Se observă că rezultanta lui $\overline{F}_1+\overline{F}_2$ este concurentă cu $\overline{F}_{31}$ şi $\overline{F}_{42}$, ceea ce verifică din nou construcţia.

b) *Metoda grafică 2.* In poligonul forţelor (fig. I.46, *c*) se construieşte rezultanta $\overline{R}_{12}=\overline{F}_1+\overline{F}_2$. Toate reacţiunile posibile în A şi B, care echilibrează pe $\overline{R}_{12}$, se vor sprijini pe linia polilor poligoanelor funiculare care trec prin A şi B. Alegînd un punct X pe R (fig. I.46, *a*), se trasează un poligon arbitrar prin A şi B. Paralelele duse din capetele lui R (fig. I.46, *c*) la laturile corespunzătoare ale poligonului funicular se intersectează în O_{12}. Paralela la AB prin O_{12} este linia polilor căutată.

Ştiind că prin punctul de intersecţie a lui $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ va trece $\overline{F}_{21}$, se duce din acest punct perpendiculara pe xx (direcţia lui $\overline{F}_{21}$). Punctul O unde aceasta intersectează linia polilor va fi polul poligonului funicular care trece prin A, B şi punctul de aplicaţie al lui $\overline{F}_{21}$. Poligonul forţelor astfel determinat satisface ecuaţia vectorială:

$$\overline{F}_{31}+\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_{42}=0,$$

precum şi ecuaţiile

$$\overline{F}_{31}+\overline{F}_1+\overline{F}_{21}=0$$

şi

$$\overline{F}_{12}+\overline{F}_2+\overline{F}_{42}=0.$$

c) *Metoda grafo-analitică.* $\overline{F}_{31}$ şi $\overline{F}_{42}$ se vor descompune în cîte două componente paralele cu AB şi cu rezultanta $\overline{R}_{12}$ a celor două forţe $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$, adică

$$\overline{F}_{31}=\overline{F}^{AB}_{31}+\overline{F}^{12}_{31} \quad \text{şi} \quad \overline{F}_{42}=\overline{F}^{AB}_{42}+\overline{F}^{12}_{42}. \tag{I.65}$$

$\overline{F}^{12}_{31}$ şi $\overline{F}^{12}_{42}$ se pot determina prin descompunerea rezultantei $\overline{R}_{12}$ în două componente paralele cu ea, care trec prin A şi B. Se scrie în continuare ecuaţia de echilibru a elementului *1*:

$$\overline{F}^{AB}_{31}+\overline{F}^{12}_{31}+\overline{F}_1+\overline{F}_{21}=0. \tag{I.66}$$

In această ecuaţie vectorială, cunoscînd direcţiile celor doi vectori extremi şi pe deplin cei doi vectori interiori, mărimea şi sensul primilor doi vectori se pot determina ca şi înainte. Determinînd pe $\overline{F}^{AB}_{31}$, acesta, compus cu $\overline{F}^{12}_{31}$, ne dă pe $\overline{F}_{31}$. $\overline{F}^{AB}_{42}$ se determină ştiind că $\overline{F}^{AB}_{42}=-\overline{F}^{AB}_{31}$. Punctul de aplicaţie al lui $\overline{F}_{21}$ se poate determina analitic scriind ecuaţiile de momente faţă de B ale forţelor aplicate, de exemplu, la elementul *2* considerat în echilibru:

$$M_B(\overline{F}_2)+M_B(\overline{F}_{21})=0. \tag{I.67}$$

d) *Caz particular.* Cînd asupra grupei acţionează numai un moment pe elementul *1* (fig. I.47), reacţiunile în A şi B vor fi perpendiculare pe xx formînd un cuplu de mărime:

$$F_{31}d=-F_{42}d=M_1.$$

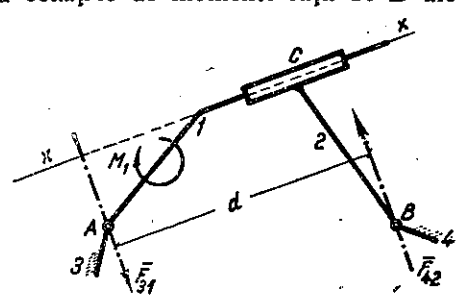


Fig. I.47. Reacţiunile la grupa de clasa a II-a, aspectul 3, în caz particular (un singur moment exterior).

10.5. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 4 (fig. I.48, *a*)

a) *Metoda grafică 1.* Considerînd încărcat numai elementul *1*, s-a descompus forţa $\overline{F}_1$ în cele două componente: $\overline{F}'_{31}$ perpendiculară pe xx şi $\overline{F}'_{21}$ perpendiculară pe yy. La fel s-a procedat şi în ipoteza cînd este încărcat numai elementul *2*. In acest caz, $\overline{F}_2$ s-a descompus după aceleaşi direcţii. In poligonul forţelor (fig. I.48, *b*) s-a respectat, ca şi înainte, ca $\overline{F}'_{21}$ şi $\overline{F}''_{12}$ să pornească din punctul de intersecţie a lui $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$. Din O' şi O'' ducînd paralele la $\overline{F}''_{12}$, respectiv la $\overline{F}'_{21}$, se determină punctul O şi paralelogramul forţelor (haşurat în figură). Prin metoda cunoscută se determină $\overline{F}_{31}$, $\overline{F}_{42}$ şi $\overline{F}_{21}$. Ducînd prin C o paralelă la $\overline{F}_{12}$, punctele de intersecţie a acesteia cu $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ determină un punct al suportului forţelor $\overline{F}_{31}$ şi $\overline{F}_{42}$.

b) *Metoda grafică 2.* In acest caz particular, linia polilor pentru elementele *1* şi *2* (fig. I.48, *c*) se trasează uşor ducînd prin originea lui $\overline{F}_1$ perpendiculara pe xx şi prin vîrful lui $\overline{F}_2$ perpendiculara pe yy. Punctul de intersecţie O este polul pentru poligonul care trece prin cele trei puncte de aplicaţie ale forţelor $\overline{F}_{31}$, $\overline{F}_{21}$ şi $\overline{F}_{42}$.

c) *Metoda grafo-analitică.* Din ecuaţia

$$\overline{F}_{31}+\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_{42}=0 \qquad (I.68)$$

se determină necunoscutele $\overline{F}_{31}$ şi $\overline{F}_{42}$ în mărime şi sens. Din ecuaţia

$$\overline{F}_{31}+\overline{F}_1+\overline{F}_{21}=0 \qquad (I.69)$$

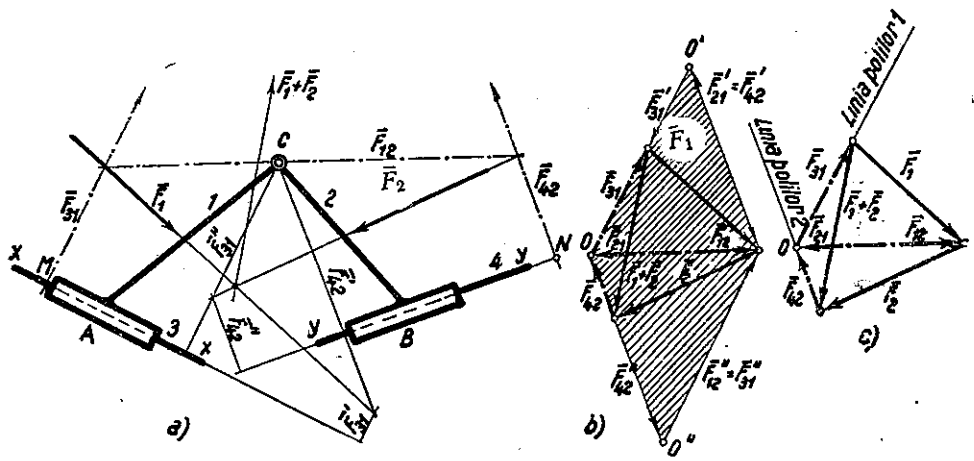


Fig. I.48. Determinarea reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 4.

se determină $\overline{F}_{21}$, iar din ecuaţiile de momente:

$$M_C(\overline{F}_1)+M_C(\overline{F}_{31})=0 \quad \text{şi} \quad M_C(\overline{F}_2)+M_C(\overline{F}_{42})=0 \qquad (I.70)$$

se determină punctele de aplicaţie ale lui $\overline{F}_{31}$ şi $\overline{F}_{42}$.

10.6. Calculul reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 5 (fig. I.49, *a*)

a) *Metoda grafică 1.* Considerînd elementul *2* descărcat, $\overline{F}_1$ va fi echilibrat de $\overline{F}'_{31}$, perpendicular pe xx, şi de $\overline{F}'_{21}$, perpendicular pe yy. Cele trei forţe sînt concurente. Cînd elementul *2* este încărcat, analizînd echilibrul lui *1*, se observă că ar trebui ca cele două forţe $\overline{F}''_{31}$ şi $\overline{F}''_{21}$, una perpendiculară pe xx, iar cealaltă pe yy, să fie în echilibru. Aceasta nu este posibil decît în cazul cînd $\overline{F}''_{31}=\overline{F}''_{21}=0$. Analizînd echilibrul lui *2*, se observă că $\overline{F}''_{42}=-\overline{F}_2$. Scriind suma momentelor faţă de B, se observă că $M_B(F_2)$ trebuie echilibrat de un alt moment, care poate fi dat numai de cupla de translaţie C, adică $M_B(F_2)=-M''_{12}$. Analizînd echilibrul lui *1*, M''_{12} trebuie să fie egal cu M''_{31}. In poligonul forţelor (fig. I.49, *b*) în mod analog s-a determinat punctul O, observînd că paralelogramul forţelor se reduce la o dreaptă. Unind O cu cele trei puncte, se obţin reacţiunile totale din cuple. Pentru a determina linia de acţiune a lui $\overline{F}_{31}$, va trebui compusă forţa $\overline{F}'_{31}=\overline{F}_{31}$ cu momentul M''_{31}. Conform fig. I.37, s-a determinat distanţa $d=M''_{31}/F_{31}$. Cu această distanţă este deplasată forţa $\overline{F}_{31}$ faţă de suportul lui $\overline{F}'_{31}$. Prin punctul de intersecţie u a lui $\overline{F}_{31}$ şi $\overline{F}_1$ va trece $\overline{F}_{21}$.

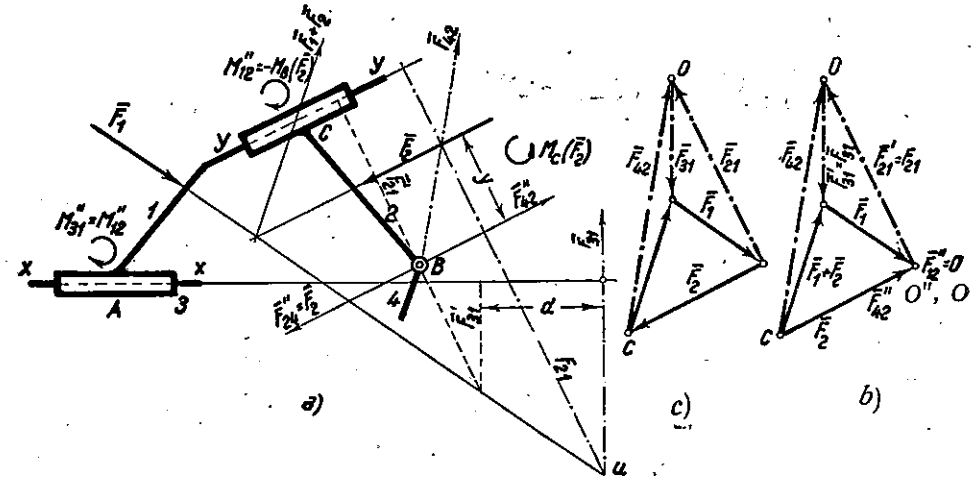


Fig. I.49. Determinarea reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 5.

Un punct al suportului lui $\overline{F}_{31}$ se poate determina şi mai simplu cunoscînd direcţia forţei $\overline{F}_{42}$, din condiţiile de echilibru ale elementului *2* se ştie că $\overline{F}_{21}$ va trece prin punctul de intersecţie a acestuia cu $\overline{F}_2$. Trasînd direcţia lui $\overline{F}_{21}$ din condiţiile de echilibru ale lui *1*, se ştie că $\overline{F}_{31}$ va trece prin intersecţia acesteia cu $\overline{F}_1$. Determinînd deci punctul de intersecţie *u*, se găseşte suportul căutat.

b) *Metoda grafică 2.* Linia polilor pentru elementul *1* este perpendiculară pe axă, trecînd prin originea lui $\overline{F}_1$, iar cea a lui $\overline{F}_2$ este perpendiculară pe *yy*, trecînd prin originea lui $\overline{F}_2$. Punctul de intersecţie a acestor două direcţii (fig. I.49, *c*) dă polul *O* al poligonului funicular care trece prin cele trei puncte de aplicaţie ale reacţiunilor.

c) *Metoda grafo-analitică.* Calculul grafo-analitic se va face în ordinea următoare: Din ecuaţia

$$\underline{\overline{F}_{31}}+\overline{F}_1+\underline{\overline{F}_{21}}=0, \qquad \text{(I.71)}$$

care exprimă echilibrul momentului *1*, se determină ca mărime şi sens $\overline{F}_{31}$ şi $\overline{F}_{21}$. Din ecuaţia de echilibru a elementului *2*

$$\underline{\overline{F}_{12}}+\overline{F}_2+\underline{\overline{F}_{42}}=0, \qquad \text{(I.72)}$$

se determină complet $\overline{F}_{42}$. Scriind ecuaţia de momente faţă de *B* pentru echilibrul grupei întregi, se poate determina punctul de aplicaţie al lui $\overline{F}_{31}$, adică:

$$\underline{M_B(\overline{F}_{31})}+M_B(\overline{F}_1)+M_B(\overline{F}_2)=0, \qquad \text{(I.73)}$$

iar din ecuaţia de momente faţă de *B* pentru echilibrul elementului *2* se determină suportul lui $\overline{F}_{21}$:

$$M_B(\overline{F}_{21})+M_B(\overline{F}_2)=0.$$

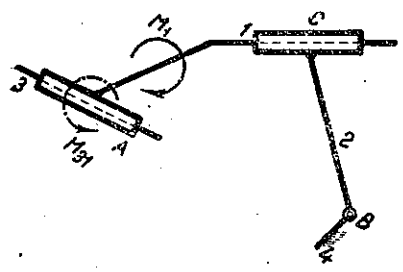


Fig. I.50. Determinarea reacţiunilor la grupa de clasa a II-a, aspectul 5, în caz particular.

d) *Caz particular.* Cînd asupra grupei acţionează numai un moment M_1 pe elementul *1* (fig. I.50), acesta va fi echilibrat de $M_{31}=-M_1$. In *C* şi *B* reacţiunile vor fi egale cu 0.

10.7. Calculul reacţiunilor din grupa de clasa a III-a, formată numai din cuple de rotaţie (fig. I.51, *a*)

Aici se va trata numai metoda suprapunerii efectelor şi cea grafo-analitică, deoarece, în acest caz, metoda poligoanelor funiculare prezintă dificultăţi.

a) *Metoda grafică 1.* Folosind teorema enunţată la § 10.1, se înlocuiesc, conform fig. I.38, forţele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ şi $\overline{F}_3$ prin componentele lor paralele, care acţionează în cuple. Forţele $\overline{F}_{1D}$, $\overline{F}_{2E}$ şi $\overline{F}_{3F}$, compunîndu-se cu $\overline{F}_4$ (fig. I.51, *b*), se obţine forţa $\overline{R}$ cu linia sa de acţiune determinată prin metoda

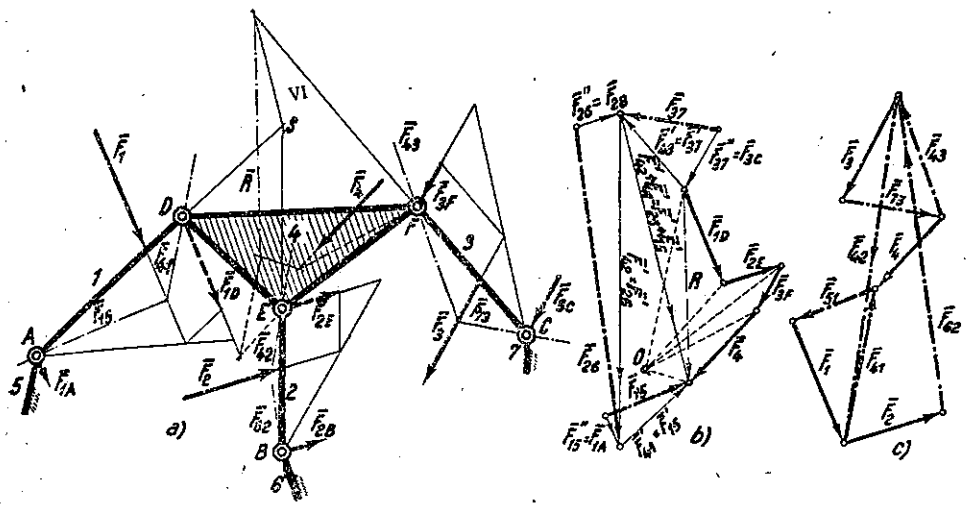


Fig. I.51. Determinarea reacţiunilor la grupa de clasa a III-a, cu cuple de rotaţie.

poligonului funicular. Sistemul obţinut, în care apare o singură forţă $\overline{R}$, care acţionează asupra elementului central, şi trei forţe care acţionează în cuplele *A*, *B* şi *C*, este echivalent din punct de vedere mecanic cu cel iniţial şi va da, prin urmare, aceleaşi reacţiuni în cuple. Problema se va rezolva în două etape. Prima dată se va considera că asupra grupei nu acţionează decît forţa $\overline{R}$. In acest caz, reacţiunile din cuple vor avea direcţia barelor *AD*, *BE* şi *CF*. Va trebui deci descompusă forţa $\overline{R}$ în trei direcţii. Se va descompune întîi $\overline{R}$ după direcţiile *3* (obţinîndu-se $\overline{F}'_{43}$) şi *VI*. Componenta după *VI* se va descompune mai departe după direcţiile *1* şi *2*, obţinîndu-se $\overline{F}'_{41}$ şi $\overline{F}'_{42}$. Considerînd apoi că asupra sistemului acţionează numai forţele din articulaţiile *A*, *D* şi *C*, se va determina $\overline{F}''_{15}$, care este egal cu $\overline{F}_{1A}$, $\overline{F}''_{26}=\overline{F}_{2B}$ şi $\overline{F}''_{37}=\overline{F}_{3C}$. Compunînd cele două forţe parţiale în fig. 51, *b*, se obţin reacţiunile totale pe baza ecuaţiilor:

$$\overline{F}_{15}=\overline{F}'_{15}+\overline{F}''_{15};\quad \overline{F}_{26}=\overline{F}'_{26}+\overline{F}''_{26};\quad \overline{F}_{37}=\overline{F}'_{37}+\overline{F}''_{37}.$$

Scriind echilibrul fiecăruia dintre elementele *1*, *2* şi *3* luate separat de grupă, se vor determina celelalte reacţiuni încă necunoscute:

$$\overline{F}_{51}+\overline{F}_1+\underline{\overline{F}_{41}}=0;\quad \overline{F}_{62}+\overline{F}_2+\underline{\overline{F}_{42}}=0;\quad \overline{F}_{73}+\overline{F}_3+\underline{\overline{F}_{43}}=0.$$

In fig. I.51, *c* s-au rezolvat grafic cele trei ecuaţii de mai sus.

Se observă că poligonul $\overline{F}_{31}$, $\overline{F}_{73}$, $\overline{F}_{41}$, $\overline{F}_{51}$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_{62}$ se închide.

b) *Metoda grafo-analitică.* Problema se poate rezolva şi grafo-analitic, ştiind că

$$\overline{F}_{51}=\overline{F}^{AD}_{51}+\underline{\overline{F}^1_{51}};\quad \overline{F}_{62}=\overline{F}^{BE}_{62}+\underline{\overline{F}^2_{62}};\quad \overline{F}_{73}=\overline{F}^{CF}_{73}+\underline{\overline{F}^3_{73}}, \qquad \text{(I.74)}$$

unde forțele subliniate se pot imediat determina, ca în fig. I.38. Se scrie apoi momentul tuturor forțelor care acționează asupra grupei față de S:

$$M_S(\bar{F}^1_{51})+M_S(\bar{F}_1)+M_S(\bar{F}^2_{62})+M_S(\bar{F}_2)+M_S(\bar{F}_4)+M_S(\bar{F}^3_{73})+M_S(\bar{F}^{CF}_{73})+ \\ +M_S(\bar{F}_3)=0. \qquad (I.75)$$

Din această ecuație se poate determina analitic necunoscuta $\bar{F}^{CF}_{73}$. Cunoscînd pe $\bar{F}^{CF}_{73}$ se poate determina $\bar{F}_{73}$ din a treia ecuație de mai sus.

Scriind ecuația de echilibru a întregii grupe:

$$\bar{F}^{AD}_{51}+\bar{F}^1_{51}+\bar{F}_1+\bar{F}_4+\bar{F}_3+\bar{F}_{73}+\bar{F}_2+\bar{F}^2_{62}+\bar{F}^{BE}_{62}=0, \qquad (I.76)$$

se pot determina grafic cei doi vectori necunoscuți ca mărime și sens.

Cu ajutorul acestora, reacțiunile din A, B și C sînt determinate. Reacțiunile din B, E și F se stabilesc pe baza ecuațiilor de echilibru pentru fiecare dintre elementele *1, 2, 3*.

10.8. Calculul reacțiunilor la grupa de clasa a III-a, cu cuple de translație și de rotație (fig. I.52)

a) *Metoda grafo-analitică*. Pentru acest caz se va propune numai metoda de calcul grafo-analitică.

Se descompun reacțiunile din articulații ca în fig. I.52. In primul rînd se vor stabili forțele $\bar{F}^\tau_{51}$ și $\bar{F}^\tau_{24}$, analizînd separat echilibrul elementelor *1* și *2*. Proiecțiile forțelor pe direcția paralelă cu yy vor da, în cazul elementului *1*, ecuația

$$\underline{F^\tau_{51}}+F_1\sin\alpha=0, \qquad (I.77)$$

iar proiecțiile după direcția xx, pentru elementul *2*, vor da ecuația

$$F_{42}+F_2\cos\beta=0. \qquad (I.78)$$

După determinarea forțelor $\bar{F}^\tau_{51}$ și $\bar{F}^\tau_{24}$ din ecuațiile de mai sus, se vor înlătura elementele *2* și *3* înlocuindu-le prin reacțiunile din E și F. Analizînd echilibrul sistemului astfel obținut și scriind ecuația de momente față de S

$$M_S(\bar{F}^\tau_{24})+M_S(\bar{F}_{3F})+M_S(\bar{F}_4)+M_S(\bar{F}_1)+M_S(\bar{F}^\tau_{51})+M_S(\bar{F}^\nu_{51})=0, \qquad (I.79)$$

se poate determina $\bar{F}^\nu_{51}$. Cunoscînd pe $\bar{F}^\nu_{51}$, și $\bar{F}^\tau_{51}$, reacțiunea din A va fi:

$$\bar{F}_{51}=\bar{F}^\nu_{51}+\bar{F}^\tau_{51}. \qquad (I.80)$$

Din ecuația de echilibru a elementului *1*

$$\bar{F}_{51}+\bar{F}_1+\bar{F}_{41}=0 \qquad (I.81)$$

se determină necunoscuta $\bar{F}_{41}$, iar din ecuația de momente a forțelor față de A pentru același element

$$\underline{M_A(\bar{F}_{41})}+M_A(\bar{F}_1)=0, \qquad (I.82)$$

se determină punctul de aplicație al reacțiunii $\bar{F}_{41}$, adică brațul h.

Din ecuația de echilibru pentru întreaga grupă

$$\underline{\bar{F}_{62}}+\bar{F}_2+\bar{F}_4+\bar{F}_1+\underline{\bar{F}_{51}}+\bar{F}_3+\bar{F}^3_{73}+\underline{\bar{F}^{CF}_{73}}=0, \qquad (I.83)$$

se pot determina $\bar{F}_{62}$ și $\bar{F}^{CF}_{73}$. In continuare, se va determina $\bar{F}_{73}$ din ecuația

$$\bar{F}_{73}=\bar{F}^{CF}_{73}+\bar{F}^3_{73}. \qquad (I.84)$$

Din ecuația de momente față de E pentru elementul *2* se va putea determina punctul de aplicație pentru $\bar{F}_{62}$:

$$M_E(\bar{F}_{62})+\underline{M_E(\bar{F}_2)}=0, \qquad (I.85)$$

care dă brațul g căutat. Din ecuația de echilibru a elementului *2*

$$\underline{\bar{F}_{42}}+\bar{F}_2+\bar{F}_{62}=0, \qquad (I.86)$$

se va putea determina în continuare $\bar{F}_{42}$. Din ecuația de echilibru a forțelor care acționează asupra elementului *3*

$$\bar{F}_{73}+\bar{F}_3+\underline{\bar{F}_{43}}=0, \qquad (I.87)$$

se determină $\bar{F}_{43}$.

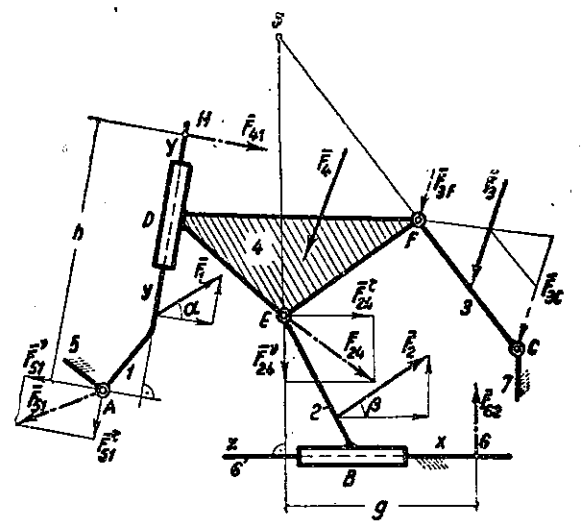


Fig. I.52. Determinarea reacțiunilor la grupa de clasa a III-a, cu cuple de rotație și translație.

10.9. Calculul reacțiunilor la grupa de clasa a III-a, de ordin superior cu cuple de rotație

a) *Metoda grafo-analitică*. Și în acest caz se va propune numai calculul grafo-analitic, fiind cel mai indicat.

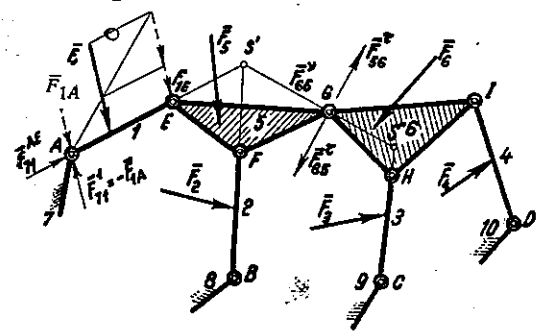


Fig. I.53. Determinarea reacțiunilor la grupa de clasa a III-a, de ordinul patru, cu cuple de rotație.

Se înlocuiesc forțele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ și $\bar{F}_4$ cu componentele lor, ca $\bar{F}_{1A}$ și $\bar{F}_{1E}$ etc., care acționează în articulațiile respective.

Analizînd echilibrul lanțului format din elementele *1, 2* și *5*, se scriu momentele forțelor față de S':

$$M_{S'}(\bar{F}^1_{71})+M_{S'}(\bar{F}_1)+M_{S'}(\bar{F}_5)+ \\ +M_{S'}(\bar{F}_2)+M_{S'}(\bar{F}^2_{82})+ \\ +M_{S'}(\bar{F}^\tau_{65})=0. \qquad (I.88)$$

Din această ecuație se poate determina forța necunoscută $\bar{F}^\tau_{65}$.

Analizînd apoi echilibrul lanțului format din elementele *6*, *3* și *4*, se scrie momentul forțelor față de S'':

$$M_{S''}(\bar{F}^{\tau}_{56})+M_{S''}(\bar{F}_6)+M_{S''}(\bar{F}_3)+M_{S''}(\bar{F}^3_{93})+M_{S''}(\bar{F}_4)+M_{S''}(\bar{F}^{DI}_{10,4})+$$
$$+M_{S''}(\bar{F}^4_{10,4})=0. \qquad (I.89)$$

Din această ecuație se determină forța $\bar{F}^{DI}_{10,4}$, deci se poate afla $\bar{F}_{10,4}$:

$$\bar{F}_{10,4}=\bar{F}^{DI}_{10,4}+\bar{F}^4_{10,4}. \qquad (I.90)$$

Scriind ecuația de echilibru a forțelor pentru același lanț

$$\underline{\bar{F}^{\nu}_{56}}+\bar{F}^{\tau}_{56}+\bar{F}_6+\bar{F}_4+\bar{F}_{10,4}+\bar{F}_3+\bar{F}^3_{93}+\bar{F}^{CH}_{93}=0, \qquad (I.91)$$

se pot determina grafic $\bar{F}^{\nu}_{56}$ și $\bar{F}^{CH}_{93}$. In continuare,

$$\bar{F}_{65}=\bar{F}^{\nu}_{65}+\bar{F}^{\tau}_{65} \quad \text{și} \quad \bar{F}_{93}=\bar{F}^3_{93}+\bar{F}^{CH}_{93}. \qquad (I.92)$$

Scriind ecuația de echilibru a forțelor pentru întreaga grupă

$$\bar{F}^{AE}_{71}+\bar{F}^1_{71}+\bar{F}_1+\bar{F}_5+\bar{F}_6+\bar{F}_4+\bar{F}_{10,4}+\bar{F}_3+\bar{F}_{93}+\bar{F}_2+\bar{F}^2_{82}+\bar{F}^{BF}_{82}=0, \qquad (I.93)$$

se pot determina grafic $\bar{F}^{AE}_{71}$ și $\bar{F}^{BF}_{82}$.

In continuare,

$$\bar{F}_{71}=\bar{F}^{AE}_{71}+\bar{F}^1_{71} \quad \text{și} \quad \bar{F}_{82}=\bar{F}^{BF}_{82}+\bar{F}^2_{82}. \qquad (I.94)$$

Forțele $\bar{F}_{51}$, $\bar{F}_{52}$, $\bar{F}_{63}$ și $\bar{F}_{64}$ se determină scriind ecuațiile de echilibru ale forțelor care acționează asupra elementelor *1*, *2* și *3*.

§ 11. DETERMINAREA REACȚIUNILOR ȘI A FORȚELOR DE ECHILIBRARE ALE ELEMENTELOR INIȚIALE

Elementul inițial avînd un grad de mobilitate și fiind legat de suport printr-o cuplă de rotație (sau de translație), adică c_5 fiind egal cu 1, nu satisface condiția determinării statice dată de (1.58).

Se notează cu X și Y cele două componente necunoscute ale reacțiunii din cuplă, cu $\sum F_x$ și cu $\sum F_y$ suma componentelor tuturor forțelor exterioare cunoscute, inclusiv a forțelor de inerție ale elementului și a forței de legătură cu grupa alăturată, si cu $\sum M_0(\bar{F})$ momentul acestor forțe față de punctul de aplicație al reacțiunii. Pentru a avea echilibru trebuie satisfăcute următoarele trei ecuații:

$$\sum F_x+X=0; \qquad (I.95)$$

$$\sum F_y+Y=0;$$

$$\sum M_0(\bar{F})=0. \qquad (I.96)$$

Pentru ca sistemul de mai sus să fie compatibil, între forțele cunoscute $\bar{F}$ trebuie să existe o relație dată de (I.96). Această relație în general nu este satisfăcută, momentul forțelor cunoscute față de punctul O fiind diferit de zero. Pentru a anula acest moment va trebui introdusă fie o forță $\bar{F}_e$, fie un moment M_e suplimentar, astfel ca $M_0(\bar{F}_e)=-\sum M_0(\bar{F})$ sau $\sum M_0(\bar{F})=-M_e$. Această forță $\bar{F}_e$, sau acest moment M_e, care echilibrează sistemul, adică face ca ecuația (I.96) să fie satisfăcută, se numește forță sau moment de echilibrare.

Forța sau momentul de echilibrare nu se pot considera egale cu forța sau cu momentul motor (la mașini-unelte) sau — în a doua variantă — cu forța sau cu momentul rezistenței tehnologice la mașinile motoare. In general, presupunînd un regim staționar de funcționare, aceste mărimi sînt egale numai în valoarea lor medie. Valorile locale diferă și această diferență este cu atît mai pronunțată, cu cît gradul de neregularitate este mai mare. La un grad mic de neregularitate, adică la un mers cu viteză unghiulară aproximativ constantă, sau la turații foarte joase, unde forțele de inerție se pot neglija, se poate admite ca forța de echilibrare să fie considerată identică cu forța motoare sau de rezistență tehnologică.

Cunoscînd punctul de aplicație al forței de echilibrare, ea nu este încă determinată, deoarece printr-un punct se pot duce o infinitate de forțe, care au același moment față de un punct. Pentru ca forța de echilibrare să fie bine definită, trebuie să se cunoască și suportul ei, de obicei notat cu *zz*. Se va studia echilibrul elementului inițial în cele două cazuri posibile.

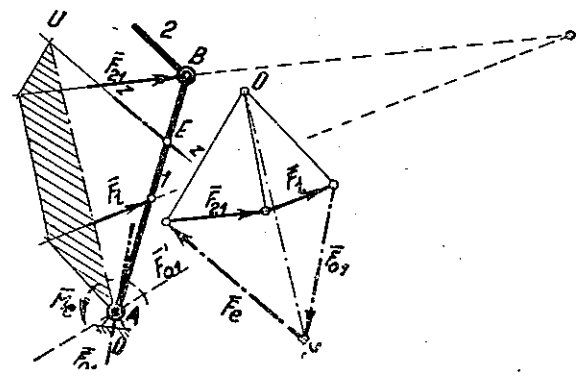


Fig. I.54. Determinarea reacțiunii și a forței de echilibrare la elementul inițial legat de batiu cu cuplă de rotație.

11.1. Elementul este legat de batiu printr-o cuplă de rotație (fig. I.54)

Se presupune cazul cînd sistemul de forțe cunoscute $\bar{F}_i+\bar{F}_{2i}$ ($\bar{F}_i$ fiind forța de inerție și $\bar{F}_{2i}$ reacțiunea elementului *2* al grupei alăturate) se va echilibra cu o forță $\bar{F}_e$, cunoscînd suportul *zz*.

Ecuațiile de echilibru vor fi:

$$\bar{F}_i+\bar{F}_{2i}+\underline{\bar{F}_{01}}+\underline{\bar{F}_e}=0$$

și

$$M_A(\bar{F}_i)+M_A(\bar{F}_{2i})+M_A(\underline{\bar{F}_e})=0. \qquad (I.97)$$

Din aceste două ecuații se determină necunoscutele $\bar{F}_e$ și $\bar{F}_{01}$.

Problema poate fi rezolvată și grafic. Ea se reduce la determinarea reacțiunilor unui sistem de forțe în două puncte, suportul uneia dintre reacțiuni fiind cunoscut *zz*.

Trasînd poligonul forțelor $\overline{F}_{21}+\overline{F}_t$, din O ca pol se va construi poligonul funicular astfel, încît să treacă prin A; ultima latură a poligonului va intersecta *zz* în U. U și A vor fi punctele pe unde vor trece cele două reacțiuni. Se va duce din pol în poligonul forțelor o paralelă cu linia UA. Pe această dreaptă se vor sprijini cei doi vectori necunoscuți. Intersecția y a acestei drepte cu paralela dusă din originea lui $\overline{F}_{21}$ la direcția *zz* ne dă forța $\overline{F}_e$. Unind y cu vîrful lui $\overline{F}_t$, obținem $\overline{F}_{01}$.

Construcția se poate executa și pe etape, obținînd întîi rezultanta lui $\overline{F}_{21}$ și $\overline{F}_t$, intersectînd apoi aceasta cu *zz*, unind apoi punctul de intersecție astfel obținut cu A (direcția reacțiunii în A) și descompunînd apoi rezultanta după cele două direcții.

In cazul cînd se propune ca sistemul să fie echilibrat de un moment (reprezentat cu linia punctată în figură) ecuațiile (I.97) se vor putea scrie:

$$\overline{F}_t+\overline{F}_{21}+\overline{F}'_{01}=0$$

și

$$M_e+M_A(\overline{F}_t)+M_A(\overline{F}_2)=0. \qquad \text{(I.98)}$$

De aici se pot determina necunoscutele $\overline{F}'_{01}$ și M_e. Direcția lui $\overline{F}'_{01}$ care trebuie cunoscută pentru rezolvarea ecuațiilor (I.98) se va determina unind punctul de intersecție a lui $\overline{F}_t$ și $\overline{F}_{21}$ cu A.

11.2. Elementul este legat de batiu printr-o cuplă de translație

In fig. I.55 s-au determinat forța de echilibrare și reacțiunea din cuplă cînd elementul se leagă de suport cu o cuplă de translație. Ecuațiile de echilibru sînt aceleași ca în cazul precedent (I.97), numai momentul se ia față de B (punctul de aplicație al reacțiunii $\overline{F}_{21}$).

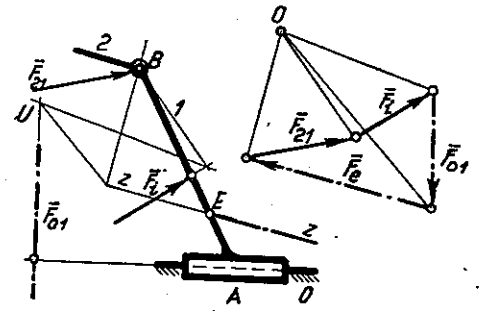


Fig. I.55. Determinarea reacțiunii și a forței de echilibrare la elementul inițial legat de batiu cu cuplă de translație.

Problema se poate soluționa și grafic, conform ecuației:

$$\overline{F}_e+\overline{F}_{21}+\overline{F}_t+\overline{F}_{01}=0. \qquad \text{(I.99)}$$

Poligonul reprezentativ al ecuației (I.99) se poate imediat trasa cunoscînd vectorii intermediari ($\overline{F}_{21}$ și $\overline{F}_t$) și direcțiile vectorilor extremi.

Pentru a determina linia de acțiune a lui $\overline{F}_{01}$ se va alege un pol O și se vor duce razele vectoare respective. $\overline{F}_{01}$ trebuie să treacă prin punctul de intersecție U a laturilor poligonului funicular paralele cu razele vectoare care unesc polul cu capetele lui $\overline{F}_{01}$ din poligonul forțelor.

Și în acest caz se poate adopta soluția grafică pe etape, compunînd $\overline{F}_t+\overline{F}_{21}$ și determinînd intersecția rezultantei astfel obținute cu *zz*. Prin punctul astfel obținut va trece suportul lui $\overline{F}_{01}$.

Ca o observație, sistemul dat nu poate fi echilibrat cu un moment, deoarece momentul nu schimbă direcția rezultantei lui $\overline{F}_{21}+\overline{F}_t$.

Pentru a avea însă echilibru trebuie ca rezultanta să fie perpendiculară pe direcția ghidajului.

§ 12. EXECUTAREA CALCULULUI CINETOSTATIC LA UN MECANISM DAT ȘI PREGĂTIREA DATELOR NECESARE PENTRU CALCULUL DE REZISTENȚĂ

12.1. Ordinea executării calculului cinetostatic al unui mecanism

Pentru determinarea reacțiunilor din cuple la un mecanism, în primul rînd se vor înlocui toate cuplele superioare cu cuple inferioare, formînd mecanismul de înlocuire. Deoarece lanțul cinematic de înlocuire al unei cuple superioare este compus dintr-un element fictiv și din două cuple inferioare, evident în calcule elementul fictiv se va considera fără masă, avînd doar rolul de a transmite forța între cele două elemente după direcția normalei comune în cupla superioară.

Se stabilește apoi care este elementul inițial asupra căruia acționează forța exterioară cunoscută (forța de rezistență tehnologică sau forța motoare, după caz) și se separă celălalt element inițial (care conține forța exterioară necunoscută). Se descompune apoi mecanismul în grupe, în ordinea în care ele se atașează la elementul inițial separat. Calculul va începe cu grupa care conține forța cunoscută de mai sus și se va aplica succesiv la grupele aderente pînă la elementul inițial separat, adică în ordinea inversă desfacerii în grupe ca mai sus.

De exemplu, la mecanismul concasorului din fig. I.56, *a*, după stabilirea mecanismului înlocuitor, se observă că forța cunoscută, de rezistență tehnologică $\overline{F}_R$ și cea a arcului $\overline{F}_A$ acționează asupra elementului inițial *GH*. In ordinea stabilită se separă elementul al doilea inițial *AB* și mecanismul se desface în grupele *1* (*BCD*) și *2* (*EFG*), (fig. I.56, *b*). Calculul va începe cu grupa *2* și va continua cu grupa *1*, adică în ordinea inversă desfacerii în grupe. Din echilibrul grupei *2* se determină reacțiunile din G și E. Reacțiunea din E cu semn schimbat este forța exterioară pentru grupa următoare *1*. Cunoscînd toate forțele care acționează asupra grupei *1*, se pot determina reacțiunile în D și B. Cunoscînd reacțiunea din B, în mod implicit se cunoaște și forța care

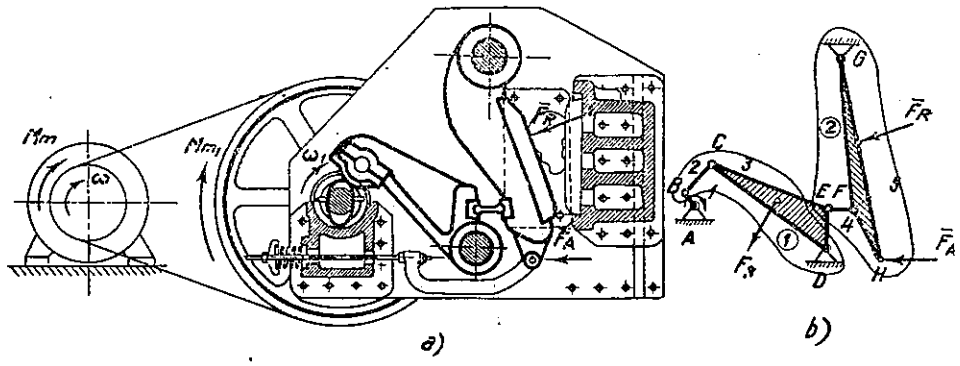


Fig. I.56. Schema mecanismului de concasor şi a mecanismului înlocuitor.

acţionează asupra elementului iniţial (motor) *1*, (reacţiunea în *B* cu semn schimbat). In sfirşit, se poate determina momentul de echilibrare M_{m_1} al elementului *1* sau forţa de echilibrare după o direcţie dată. Dacă s-ar inversa ordinea calculului, echilibrul grupei *1* nu s-ar putea stabili, necunoscîndu-se reacţiunea în *E*.

12.2. Pregătirea datelor necesare pentru calculul de rezistenţă

Cunoscînd reacţiunile din cuplele cinematice, acestea se vor descompune în cîte două componente: una perpendiculară pe bară, iar cealaltă, în lungul acesteia. Se vor descompune în aceleaşi componente şi forţele exterioare concentrate care acţionează asupra elementului. Componentele perpendiculare pe bară îl vor solicita la încovoiere, iar cele care coincid cu direcţia sa — fie la compresiune, fie la întindere. Elementul se va împărţi în intervale cuprinse între punctele de aplicaţie a două forţe consecutive. Pentru a stabili la ce solicitări în sensul barei este supus elementul, se porneşte totdeauna de la una dintre cuple, de exemplu, de la cupla *A* (fig. I.57). Se va cerceta acţiunea elementului vecin asupra celui analizat, adică forţa $\overline{F}_{21}$. Dacă $\overline{F}_{21}$ comprimă cupla, înseamnă că primul interval este supus la compresiune. In cazul cînd forţa ar fi dirijată în sens contrar, elementul este supus la întindere. Pentru al doilea interval cuprins între *X* şi *B* se foloseşte forţa $\overline{F}_{31}$, care se observă că solicită bara tot la compresiune.

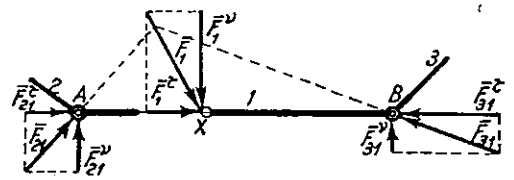
Dacă pe bară ar acţiona mai multe forţe, cuprinse între cele două cuple *A* şi *B*, solicitarea necunoscută într-un interval oarecare se va determina compunînd proiecţia pe direcţia barei a forţei de la marginea intervalului, cu forţa cunoscută, care solicită în sensul barei intervalul vecin. Dacă sensul rezultantei este acelaşi ca al forţei cunoscute din intervalul vecin ales, solicitarea este aceeaşi, în caz contrar, solicitarea este inversă. De exemplu, solicitarea în intervalul *XB* se poate determina şi compunînd $\overline{F}_1$ cu solicitarea în *AX*, adică cu $\overline{F}_{21}$; rezultanta avînd acelaşi sens ca şi $\overline{F}_{21}$, înseamnă că solicitarea necunoscută este aceeaşi, adică compresiune.

Pentru a putea urmări şi sistematiza mai bine cele de mai sus, se recomandă să se întocmească tabele de solicitări ca în fig. I.57.

Făcînd aceeaşi operaţie pentru o serie de poziţii ale elementului, în timpul funcţionării sale, se determină solicitările maxime pe baza cărora se dimensionează elementul.

Pentru dimensionarea elementului la încovoiere, trebuie să se ţină seamă dacă forţa $\overline{F}_1$ este o forţă concentrată, sau rezultanta unor forţe uniform distribuite de-a lungul elementului — cum ar fi în cazul forţelor de inerţie (v. fig. I.31).

Pentru uşurarea acestor calcule se recomandă să se determine întîi hodografele reacţiunilor din cuple ca la mecanismul patrulater din fig. I.58. In fig. I.58, *c* s-au construit diagramele carteziene, iar în fig. I.58, *d*, *e* şi *f* — hodografele reacţiunilor din cuple, determinate cu ajutorul planului forţelor (fig. I.58, *b*) pentru opt poziţii ale cursei active cuprinse între cele două puncte moarte ale elementului condus. Forţa cunoscută este $\overline{F}_R$ presupusă constantă. In fig. I.58, *c* s-a reprezentat şi variaţia forţei de echilibrare $\overline{F}_e$. Aceste hodografe dau totodată şi o imagine clară a variaţiei direcţiilor reacţiunilor din cuple în raport cu un element dat şi pot servi, de exemplu, şi la determinarea altor date constructive, ca: alegerea sistemului de ungere etc.



Intervalul solicitat	Felul solicitării	Forţele
AB	Incovoiere	$\overline{F}_{21}^{\nu}$ $\overline{F}_1^{\nu}$ $\overline{F}_{31}^{\nu}$
AX	Compresiune	$\overline{F}_{21}^{c}$
BX	Compresiune	$\overline{F}_{31}^{c}$

Fig. I.57. Tabela solicitărilor dintr-un element.

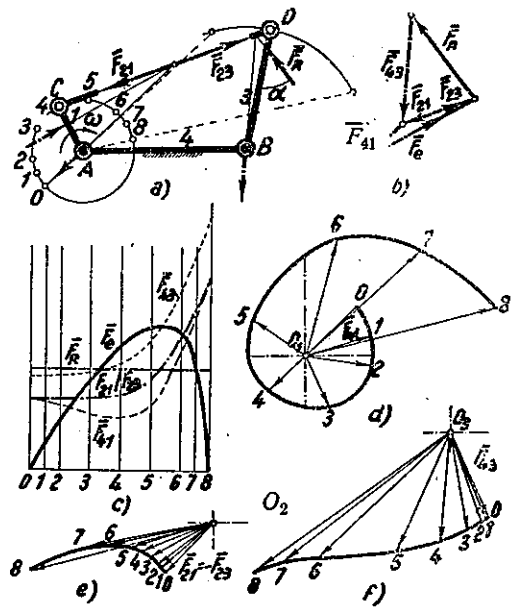


Fig. I.58. Hodografele reacţiunilor din cuplele unui mecanism patrulater.

Pentru dimensionarea cuplelor se aleg valorile maxime ale reacţiunilor, în acest scop fiind suficient doar o reprezentare carteziană a valorilor absolute, ca în fig. I.58, *c*.

12.3. Aplicaţii

1. Să se determine reacţiunile din cuple şi momentul de echilibrare la mecanismul de acţionare al suportului superior, la strungul automat monobroşe „Index", scos în relief în desenul de ansamblu din fig. I.59, *a*. Se dau: componenta orizontală a forţei de

aşchiere egală cu 200 kgf şi componenta verticală egală cu 80 kgf, precum şi toate dimensiunile mcanismului studiat.

Soluţie. După ce cele două cuple superioare corespunzătoare angrenării perechii de segmenţi dinţaţi şi angrenării cremalieră-segment dinţat s-au înlocuit cu cuple inferioare, s-a reprezentat schematic mecanismul înlocuitor (fig. I.59, *c*) la scara lungimilor

$$k_l = \frac{6 \text{ mm natură}}{1 \text{ mm desen}}.$$

Deoarece mecanismul are o mişcare foarte înceată (o rotaţie sau mai puţin pe minut), forţele de inerţie se vor putea neglija în calculul cinetostatic, acesta simplificîndu-se la un calcul pur static. Alegînd o scară pentru forţe

$$k_f = \frac{2 \text{ kgf natură}}{1 \text{ mm desen}},$$

s-au reprezentat în fig. I.59, *a* vectorul forţei orizontale $F_H = 200$ kgf şi vectorul forţei verticale $F_V = 800$ kgf, care atacă suportul *9* în vîrful *N* al cuţitului. Desfăcînd mecanismul în cele patru grupe, se va folosi metoda de calcul prin suprapunerea efectelor, care este cea mai indicată, deoarece în fiecare grupă există cîte un element neîncărcat, prin urmare reacţiunile parţiale determinate sînt în acelaşi timp şi reacţiuni totale. Calculele se vor începe cu grupa I de clasa a II-a, aspectul 5, asupra căreia acţionează forţa cunoscută

$$\overline{F}_{R9} = \overline{F}_H + \overline{F}_V.$$

In fig. I.59, *b* s-a echilibrat forţa $\overline{F}_{R9}$ cu cele două forţe $\overline{F}_{09}$ şi $\overline{F}_{89}$, cunoscute după direcţii. Ştiind că în lanţul cinematic de înlocuire, direcţia forţei coincide cu direcţia barei, $\overline{F}_{89}$ va fi egal cu $\overline{F}_{78}$, şi cu $\overline{F}_{79}$. Analizînd grupa II de clasa a II-a, aspectul 1, se va echilibra forţa cunoscută $\overline{F}_{97}$ cu forţele $\overline{F}_{07}$ şi $\overline{F}_{67}$, cunoscute după direcţii (toate se intersectează într-un singur punct).

Trecînd apoi la grupa III de clasa a II-a, aspectul 1, s-a echilibrat forţa $\overline{F}_{65} = \overline{F}_{76}$ cu $\overline{F}_{05}$ şi cu $\overline{F}_{45}$ de direcţii cunoscute.

Deoarece $\overline{F}_{56}$ şi $\overline{F}_{45}$ nu se intersectează în planul desenului, pentru a determina direcţia lui $\overline{F}_{05}$ se foloseşte o construcţie auxiliară.

Prin punctul de articulaţie *G* se duce o dreaptă care intersectează cele două direcţii cunoscute în *x* şi *y*. Din *x* se duce o dreaptă auxiliară înclinată *xz*. Se duce apoi o paralelă la *xy*, iar segmentul *x'z'* se măsoară pe dreapta înclinată auxiliară. Unind *z* cu *y* şi ducînd din *G* o paralelă la aceasta, se obţine punctul *u*. Măsurînd segmentul *h* din *z'*, se obţine *u'*, punctul pe unde va trece $\overline{F}_{05}$, care este concurentă cu $\overline{F}_{45}$ şi $\overline{F}_{56}$.

In sfîrşit, cunoscînd $\overline{F}_{45} = -\overline{F}_{43}$ s-a calculat grafic echilibrul ultimei grupe, obţinîndu-se $\overline{F}_{23} = \overline{F}_{13}$, presiunea camei asupra rolei. Pentru a determina valoarea reală a acesteia, se scrie:

$$\overline{F}_{13} = |\overline{F}_{13}|\, k_F = 35 \times 2 = 70 \text{ kgf}.$$

$\overline{F}_{13}$ este totodată şi forţa de echilibrare $\overline{F}_e$ a elementului motor (al camei) după direcţia normalei comune. Momentul de echilibrare se va determina cu relaţia

$$M_e = F_{13} \cdot h.$$

Deoarece problema a fost simplificată la un calcul static, forţele de inerţie fiind neglijabile, forţele de echilibrare se vor putea considera ca fiind egale cu cele motoare reduse pe acelaşi suport *NN*. La fel şi momentul de echilibrare se va putea considera ca fiind egal cu momentul motor.

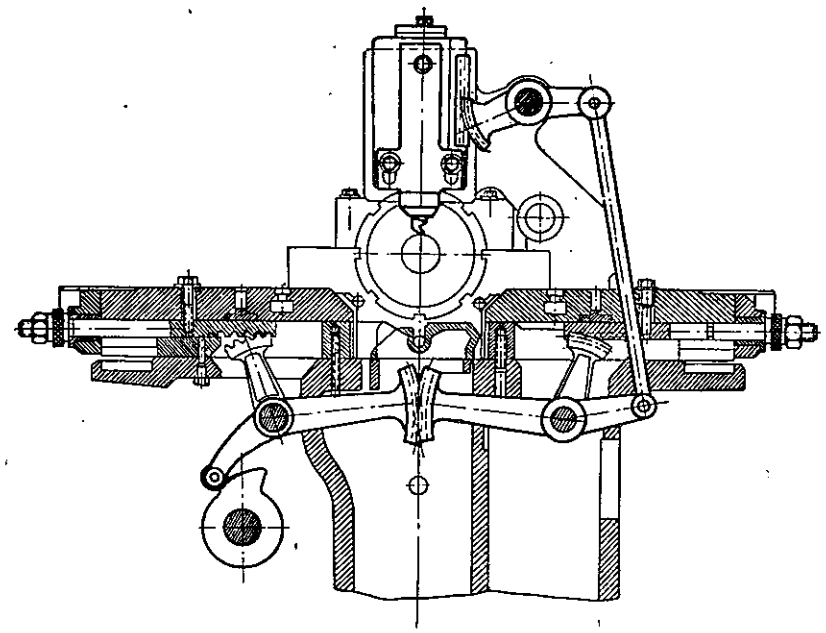


Fig. I.59, *a*. Detaliu la strungul automat monobroşă „Index".

2. Să se determine reacţiunile din cuple şi forţa de echilibrare pentru poziţia dată a mecanismului din fig. I.60, *a*. Se consideră date: viteza unghiulară $\omega = \text{const}$ a manivelei *AB* şi forţa de rezistenţă tehnologică $\overline{F}_{R5}$, care acţionează asupra elementului condus *5*. Manivela motoare *AB* se presupune echilibrată, centrul de greutate fiind în centrul de rotaţie *A*.

Soluţie. Se construieşte planul vitezelor (fig. I.60, *b*) începînd cu grupa care conţine viteza cunoscută, adică cu *BCD* de clasa a II-a, aspectul 1.

Scara adoptată este $k_v = k_l \omega$.

Cunoscînd planul vitezelor, se trece la construirea planului acceleraţiilor (fig. I.60, *c*), scara respectivă fiind

$$k_a = k_l\, \omega^2.$$

Determinînd punctele de oscilaţie pentru fiecare element, ca în fig. I.60, *a*, se află prin construcţia arătată în fig. I.17, T_2, şi T_4, pe unde vor trece suporturile forţelor de inerţie pentru bielele *2* şi *4*. Alegînd apoi o scară pentru forţa

$$k_f = \frac{\text{kgf natură}}{\text{mm desen}},$$

se transpun pe mecanism vectorii reprezentativi ai tuturor forţelor cunoscute de inerţie, de greutate şi de rezistenţă tehnologică. Insumînd mai departe toate forţele cunoscute care acţionează asupra unui element, se obţin rezultatele $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$ şi $\overline{F}_5$.

Se trece apoi la calculul cinetostatic al grupei *4, 5* de clasa a II-a, aspectul 2, asupra căreia acţionează direct forţa cunoscută de rezistenţă tehnologică $\overline{F}_{R_5}$. Metoda folosită este metoda a 2-a, cea a poligoanelor funiculare (v. fig. I. 41, *c*). Alegînd un punct *x* pe $\overline{F}_4$,

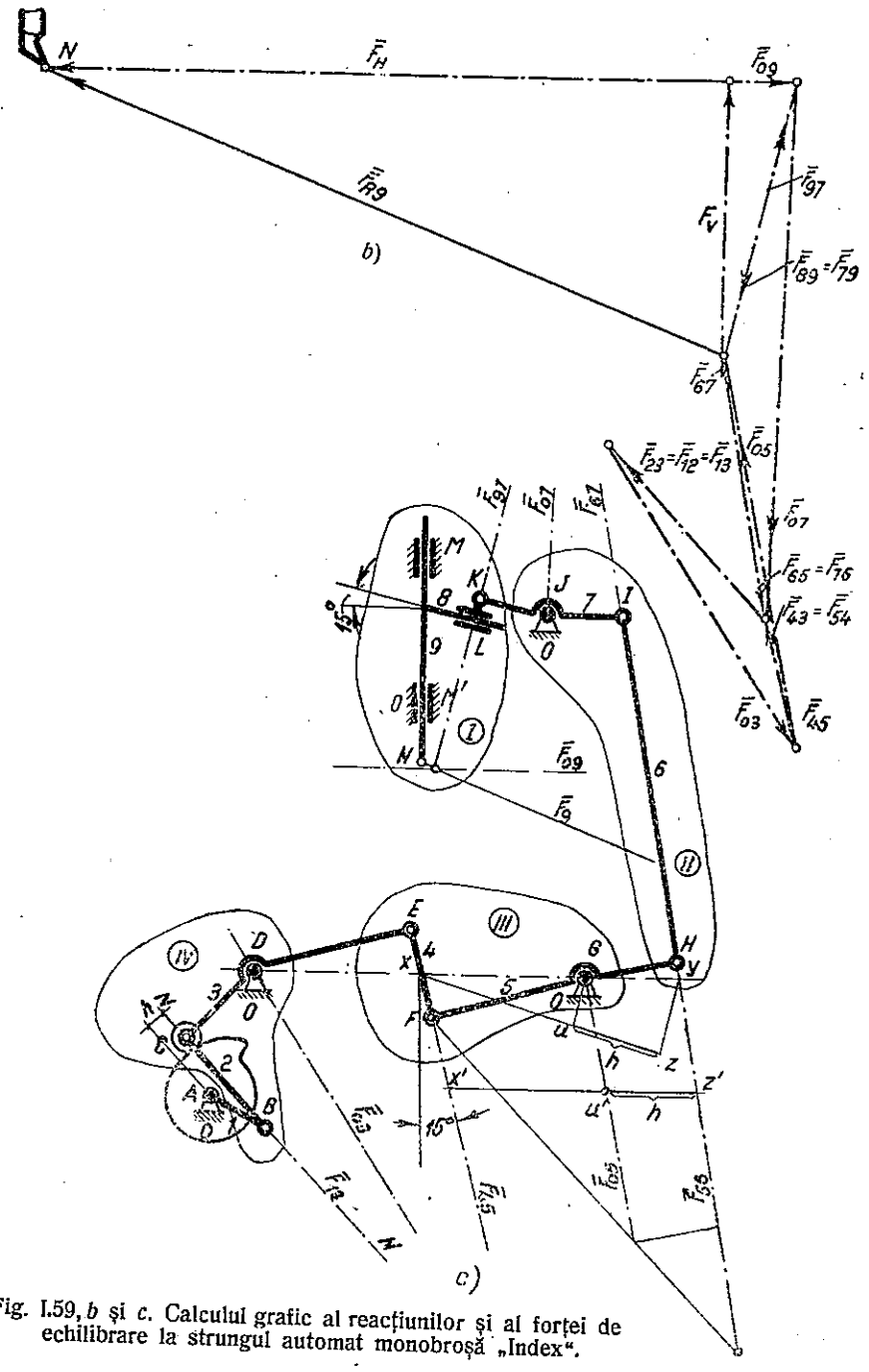


Fig. I.59, *b* și *c*. Calculul grafic al reacțiunilor și al forței de echilibrare la strungul automat monobroșă „Index".

s-a determinat în poligonul forțelor (fig. I.60, *d*) linia polilor pentru elementul *4* care trece prin O_4. Intersecția acesteia cu linia polilor corespunzătoare elementului *5* dă punctul O_5, *O* căutat. Cunoscînd pe *O* se vor putea determina $\overline{F}_{C4}$ și $\overline{F}_{54}$. Cunoscînd $\overline{F}_{4C}=-\overline{F}_{C4}$, se vor determina componentele acesteia după direcțiile *BC* și *BD*, conform ecuației

$$\overline{F}_{4C}=\overline{F}_{4C}^{BC}+\overline{F}_{4C}^{CD}.$$

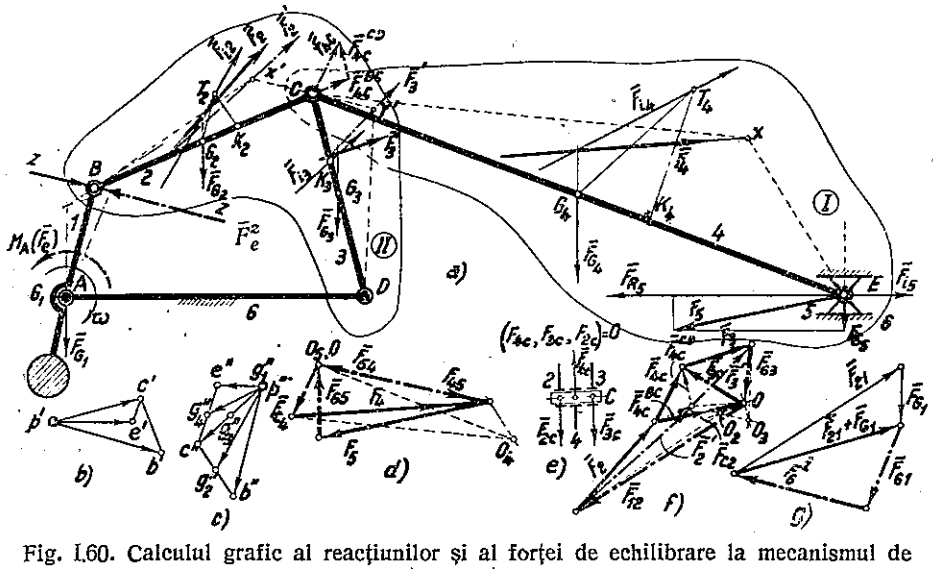


Fig. I.60. Calculul grafic al reacțiunilor și al forței de echilibrare la mecanismul de transportor.

Adunînd aceștia vectorial cu $\overline{F}_2$ și $\overline{F}_3$, se obțin forțele totale $\overline{F}_2'$ și $\overline{F}_3'$ care acționează asupra elementelor grupei *2, 3*. Se va analiza apoi echilbrul cinetostatic pentru grupa *2, 3* de clasa II-a, aspectul 1, folosind aceeași metodă ca în fig. I.39, *c*. In fig.I.60, *f* s-a determinat intersecția celor două linii ale polilor, punctul *O*, cu ajutorul căruia se determină reacțiunile $\overline{F}_{12}$ și $\overline{F}_{63}$. La aceleași reacțiuni s-ar fi ajuns dacă $\overline{F}_{4C}$ s-ar fi adunat vectorial fie cu $\overline{F}_3$ fie cu $\overline{F}_2$. Pentru a determina reacțiunile în cupla *C* se presupune că legarea elementelor *2, 3* și *4* se face printr-un bolț comun *C* (fig. I.60, *e*). Fie $\overline{F}_{4C}$, $\overline{F}_{2C}$, $\overline{F}_{3C}$, forțele care acționează asupra bolțului din partea elementelor. Evident că aceste forțe trebuie să fie în echilibru adică

$$\overline{F}_{4C}+\overline{F}_{2C}+\overline{F}_{3C}=0.$$

Pe de altă parte, $\overline{F}_{C_2}$ trebuie să echilibreze elementul *2*, iar $\overline{F}_{C_3}$, elementul *3*, conform ecuațiilor:

$$\overline{F}_2+\overline{F}_{12}+\overline{F}_{C2}=0 \quad \text{și} \quad \overline{F}_3+\overline{F}_{63}+\overline{F}_{C3}=0.$$

In poligonul forțelor aceste condiții sînt satisfăcute.

Soliciiarea maximă în *C* va fi dată de cea mai mare forță, în poziția din figură, de $\overline{F}_{2C}$.

Trecînd la studiul echilibrului elementului motor *AB*, cunoscînd forțele $\overline{F}_{G1}$ și $\overline{F}_{21}$ care acționează asupra lui, se determină forța de echilibrare după direcția *zz*, perpendicu-

lară pe AB în butonul motor B, precum și reacțiunea $\overline{F_{61}}$. In fig. I.60, g, s-a compus $\overline{F_{21}}$ cu $\overline{F_{G_1}}$ iar în fig. I.60, a s-a intersectat linia de acțiune a rezultantei cu direcția zz. Unind punctul astfel obținut cu A, s-a determinat linia de acțiune a lui $\overline{F_{61}}$. Descompunînd pe $\overline{F_{21}}+\overline{F_{G1}}$ după direcția $\overline{F_{61}}$ și zz, s-au determinat cele două forțe necunoscute. Cunoscînd pe $\overline{F_e^z}$, se poate stabili și momentul de echilibrare $M_A(F_e^z)=AB\cdot F_e^z$.

§ 13. DETERMINAREA FORȚELOR DE ECHILIBRARE CU AJUTORUL PRINCIPIULUI DEPLASĂRILOR

13.1. Generalități

După cum s-a arătat la § 12, forțele cunoscute dintr-un mecanism sînt echilibrate de o singură forță sau moment aplicat la elementul motor sau condus, adică la elementul asupra căruia acționează forța necunoscută.

Calea pe care s-a ajuns la determinarea acestor forțe a fost destul de lungă, trebuind să se treacă prin calculul cinetostatic al tuturor grupelor mecanismului. De multe ori, în calculele dinamice ale mașinilor, la dimensionarea volanților, la stabilirea caracteristicii regulatorului etc., se cere determinarea mediată a acestor forțe.

Soluția se va da cu ajutorul principiului deplasărilor virtuale.

Sistemul de forțe cunoscute, inclusiv forța de echilibrare, fiind în echilibru cinetostatic, suma lucrurilor mecanice date de deplasările virtuale compatibile cu legăturile punctelor de aplicație ale acestora trebuie să fie nulă.

In cazul mecanismelor, deplasările virtuale devin reale și, pe baza dezmodromiei, ele sînt pe deplin determinate de pozițiile manivelei.

Se consideră că asupra mecanismului din fig. I.61 acționează forțele cunoscute $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots, \overline{F_n}$, care includ și forțele de inerție date de mișcarea presupusă cunoscută a acestuia.

Dacă pe lîngă forțe, asupra elementelor acționează și momente, ele se vor compune într-o forță unică, ca în fig. I.37, iar dacă asupra elementului acționează numai un moment, acesta se va înlocui cu două forțe paralele și de sens contrar, ca în fig. I.14.

In sfîrșit, se consideră F_e sau M_e forța, respectiv, momentul de echilibrare al acestuia.

Notînd cu δs_j deplasarea elementară a punctului de aplicație al forței F_j, se va putea scrie ecuația de echilibru:

$$F_1\delta s_1\cos\alpha_1+\ldots+F_j\delta s_j\cos\alpha_j+\ldots+F_e\delta s_e\cos\alpha_e=0$$

sau

$$F_1\delta s_1\cos\alpha_1+\ldots+F_j\delta s_j\cos\alpha_j+\ldots+M_e\delta\varphi_e=0, \qquad \text{(I.100)}$$

în care

α_j este unghiul format de direcția forței cu direcția deplasării (a vitezei), iar $\delta\varphi_e$ — rotația elementară a elementului de echilibrare.

Impărțind fiecare membru al ecuațiilor (I.100) cu Δt și trecînd la limită, se obține:

$$\left.\begin{aligned}&F_1v_1\cos\alpha_1+F_2v_2\cos\alpha_2+\ldots+F_jv_j\cos\alpha_j+F_ev_e\cos\alpha_e=0\\ \text{și}\quad&F_1v_1\cos\alpha_1+F_2v_2\cos\alpha_2+\ldots+F_jv_j\cos\alpha_j+M_e\omega_e=0,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.101)}$$

în care $v_1, v_2, \ldots, v_j, v_e$ sînt vitezele punctelor de aplicație ale forțelor (I.101) respective.

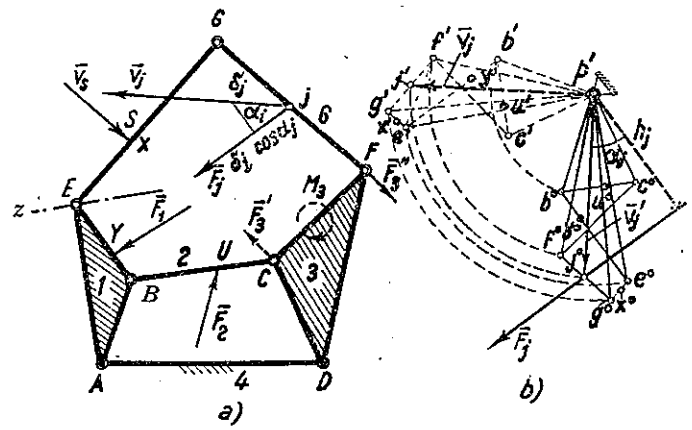


Fig. I.61. Determinarea forței de echilibrare cu ajutorul pîrghiei lui Jukovski.

Dacă mecanismul are două elemente motoare, există două forțe de echilibrare. Ele se determină în două faze. Prima forță de echilibrare se determină fixînd al doilea element motor de suport și aplicînd pentru mecanismul astfel obținut principiul deplasărilor virtuale.

A doua forță se determină fixînd primul element motor de batiu și aplicînd același calcul pentru mecanismul obținut.

Din ecuațiile (I.101) F_e sau M_e se pot determina ușor:

$$F_e=-\frac{F_1v_1\cos\alpha_1+F_2v_2\cos\alpha_2+\ldots+F_jv_j\cos\alpha_j}{v_e\cos\alpha_e}. \qquad \text{(I.102)}$$

Din (I.102) reiese că F_e se poate calcula dacă se cunoaște suportul său, adică unghiul α_e dintre forță și viteza respectivă a punctului de aplicație, lucru cunoscut din datele problemei.

La fel:

$$M_e=-\frac{F_1v_1\cos\alpha_1+F_2v_2\cos\alpha_2+\ldots+F_jv_j\cos\alpha_j}{\omega_e}. \qquad \text{(I.103)}$$

13.2. Metoda pîrghiei lui Jukovski

Pentru rezolvarea ecuației (I.102) se va folosi metoda propusă de Jukovski.

Se consideră planul vitezelor (fig. I.61, b) construit din p' (linie punctată) pentru toate punctele de aplicație ale forțelor în mecanismul dat (fig. 1.61, a).

Se rotește acest plan cu 90° într-un sens oarecare, obținînd punctele $u°$, $y°$, $e°$, $x°$, $j°$, $f°$, $c°$, $g°$.

Transpunînd paralel cu sine însuși și în același sens de exemplu vectorul $\overline{F}_j$, care are punctul de aplicație pe mecanism în j, în $j°$ corespunzător, se determină brațul h_j al vectorului în raport cu polul vitezelor.

Se observă că

$$h_j = v_j \cos\alpha_j .$$

Deci, expresia $F_j v_j \cos\alpha_j$, analogă cu termenul din membrul al doilea al ecuației (I.102), se mai poate scrie $F_j h_j$, ceea ce exprimă momentul forței $\overline{F}_j$ față de polul p'.

Transpunînd și celelalte forțe în mod analog în planul vitezelor rotit, expresia (I.101) va deveni:

$$F_1 h_1 + F_2 h_2 + \ldots + F_j h_j + F_e h_e = 0. \qquad (I.104)$$

Această relație arată că, materializînd planul vitezelor rabătut, ca o pîrghie rigidă care se poate roti în jurul polului p' (pîrghia lui Jukovski), și aplicînd asupra sa în punctele corespunzătoare aceleiași forțe ca în mecanismul real, aceasta se va găsi în echilibru, dacă în același timp și mecanismul este în echilibru.

Din (I.104) se poate determina forța de echilibrare a tuturor forțelor cunoscute:

$$F_e = -\frac{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \ldots + F_j h_j}{h_e}$$

sau

$$F_e = -F_1 \frac{h_1}{h_e} - F_2 \frac{h_2}{h_e} - \ldots - F_j \frac{h_j}{h_e}.$$

Din această ecuație se observă că valoarea lui F_e nu depinde de scara la care s-a construit planul vitezelor, deoarece raportul $\frac{h_j}{h_e}$ este constant în momentul considerat.

13.3. Aplicații.

1. Să se determine forța de echilibrare aplicată pe suportul zz la mecanismul din fig. I.62, presupunînd că asupra lui acționează o singură forță $\overline{F}_1$.

Soluție. Se va construi în primul rînd planul vitezelor (la scara k_v aleasă arbitrar). Se vor rabate apoi în același sens, arbitrar ales, vitezele corespunzătoare punctelor de aplicație ale forțelor din mecanism, adică z' și y'. In punctul $y°$ se va aplica la o scară oarecare k_F forța cunoscută $\overline{F}_1$, iar în $z°$ se va considera aplicată într-un sens oarecare forța necunoscută $\overline{F}_e^z$, după direcția suportului său zz. Scriind condiția de echilibru față de p', se obține:

$$-F_1 h_1 + F_e h_e^z = 0,$$

de unde

$$F_e = F_1 \frac{h_1}{h_e^z}.$$

Deoarece semnul lui F_e este pozitiv, înseamnă că sensul ales pentru el este cel corespunzător. Valoarea reală a lui F_e se va determina din relația

$$F_e = |F_e| k_F.$$

2. Determinarea eforturilor din bare la fermele static determinate (fig. I.63, *a*).

Soluție. Formula structurală a fermelor static determinate (mecanisme cu zero grade de mobilitate) este $M = 3n - 2c_5 = 0$. In exemplul din fig. I.63 se obține $M = 3\times 12 - 2\times 18 = 0$. Înlăturînd una dintre bare, numărul elementelor va fi $n' = n - 1$, iar numărul cuplelor $c_5' = c_5 - 2$. Formula structurală va deveni $M' = 3n' - 2c_5'$. Inlocuind aici valoarea lui n' și a lui c_5' și ținînd seamă de relația de mai sus, rezultă: $M' = 3(n-1) - 2(c_5 - 2) = 3n - 2c_5 + 1 = 1$, adică ferma devine un mecanism cu un element conducător.

La fermele static determinate forțele exterioare acționează direct în cuple. Se știe că barele sînt supuse numai la eforturi care coincid cu direcția acestora, adică la tensiuni sau la compresiuni.

Pentru a determina eforturile într-o bară oarecare, de exemplu în bara *6*, aceasta se va considera îndepărtată. Pentru ca ferma să fie în echilibru și fără bara în cauză, acțiunea acesteia din urmă asupra cuplelor de legătură egală și de sens contrar cu acțiunea cuplelor asupra barei (solicitările din bare) — trebuie aplicată sub formă de două forțe egale și de sens contrar în cuplele respective, adică $\overline{F}_{6D}$ în D și $\overline{F}_{6E}$ în E, știind că $\overline{F}_{6D} = -\overline{F}_{6E}$.

In acest caz, după cum s-a arătat mai sus, ferma devine un mecanism asupra căruia acționează o serie de forțe cunoscute și două forțe egale și de sens contrar necunoscute.

Folosind metoda pîrghiei lui Jukovski, aceste două forțe care echilibrează sistemul dat se pot determina.

Adoptînd, de exemplu, pentru punctul C o viteză oarecare, în fig. I.63, *b* s-a construit planul vitezelor pentru mecanismul bielă-manivelă obținut (hașurat). Rotind planul vitezelor și trans-

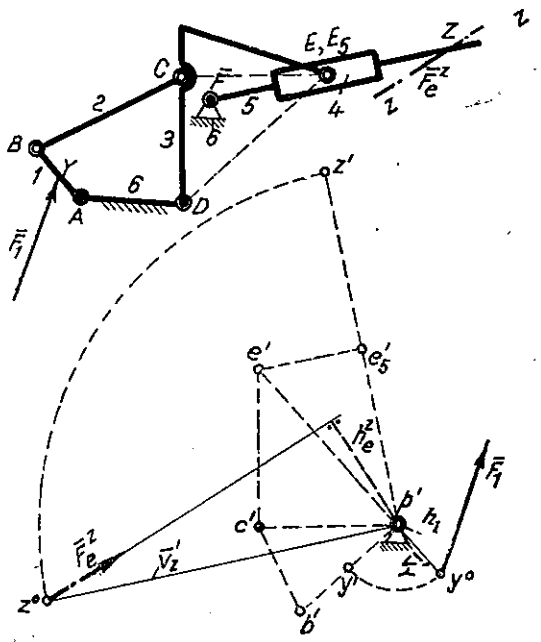


Fig. I.62. Determinarea forței de echilibrare cu ajutorul pîrghiei lui Jukovski.

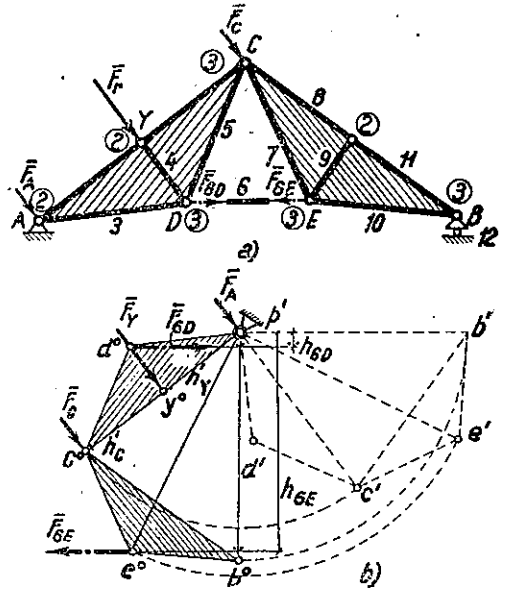


Fig. I.63. Determinarea eforturilor din bare la fermele static determinate cu ajutorul pîrghiei lui Jukovski.

punînd forţele la o scară k_F în punctele corespunzătoare punctelor de aplicaţie ale acestora din mecanism, se egalează ecuaţia de momente cu 0. Astfel:

$$-F_C h_C - F_Y h_Y + F_{6E} h_{6E} - h_{6D} F_{6D} = 0; \quad \text{cum} \quad |F_{6E}| = |F_{6D}|,$$

rezultă

$$F_{6D} = \frac{F_C h_C + F_Y h_Y}{h_{6E} - h_{6D}}.$$

Deoarece F_{6D} are valoare pozitivă, înseamnă că sensul acestuia s-a ales corect. Pentru a vedea dacă bara este supusă la compresiune sau la tensiune, se determină $F_{D6} = -F_{6D}$. Această forţă întinde bara *6*, deci ea va fi supusă la tensiune.

3. Să se determine reacţiunile din cuplele cinematice ale grupei de clasa a IV-a (fig. I.64, *a*).

Soluţie. Grupa fixată cu elementele sale marginale de batiu poate fi considerată, după cum se ştie, ca o fermă static determinată. Se procedează ca în cazul precedent. In acest caz se înlătură, de exemplu, bara *4*, înlocuind efectul său în *C* şi *D* cu două forţe egale şi de sens contrar, $\overline{F}_{41}^{CD}$ şi $\overline{F}_{43}^{CD}$, avînd direcţia barei, şi cu două forţe, $\overline{F}_{41}^{4}$ şi $\overline{F}_{43}^{4}$, paralele cu $\overline{F}_4$, obţinute prin descompunerea acesteia, după cele două direcţii care trec prin *C* şi *D* ca în fig. I.38.

Aplicînd metoda pîrghiei lui Jukovski pentru mecanismul patrulater astfel obţinut, se poate determina forţa necunoscută, $\overline{F}_{41}^{CD} = -\overline{F}_{43}^{CD}$. In fig. I.64, *b* s-a reprezentat, punctat, planul vitezelor la o scară oarecare pentru acest mecanism, construit după regulile cunoscute din cinematică. Rabatînd punctele corespunzătoare celor de aplicaţie ale forţelor din mecanism, se vor transpune toate forţele în planul vitezelor.

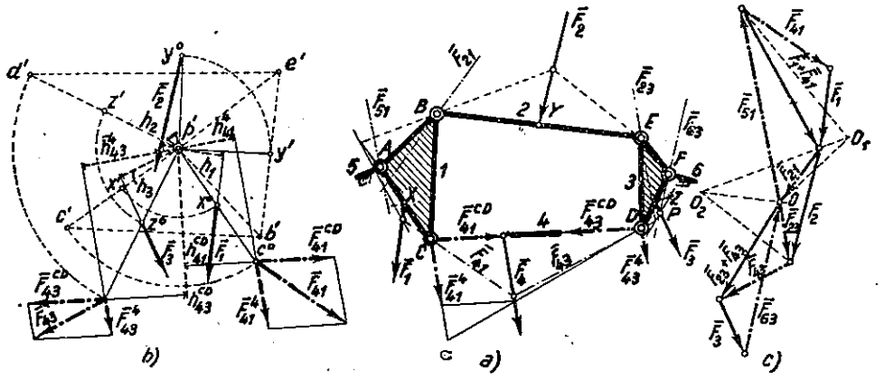


Fig. I.64. Determinarea reacţiunilor din cuplele cinematice la grupa de clasa a IV-a cu ajutorul pîrghiei lui Jukovski.

Scriind ecuaţia de momente faţă de p', pentru echilibrul sistemului se obţine

$$F_1 h_1 - F_2 h_2 - F_3 h_3 + F_{41}^{1} h_{41}^{4} - F_{43}^{4} h_{43}^{4} + F_{43}^{CD} \left(h_{43}^{CD} - h_{41}^{CD} \right) = 0.$$

Singura necunoscută din această ecuaţie fiind $\overline{F}_{43}^{CD}$, ea se poate determina. Deoarece pentru F_{43} se obţine o valoare pozitivă, înseamnă că sensul acesteia s-a ales corect. Compunînd vectorul determinat cu $\overline{F}_{43}^{4}$, la fel vectorul $\overline{F}_{41}^{CD} = -F_{43}^{CD}$ cu $\overline{F}_{41}^{4}$, se obţin reacţiunile $\overline{F}_{43}$ şi $\overline{F}_{41}$. Insumînd vectorul $\overline{F}_{41}$ cu $\overline{F}_1$, fig. I.64, *c* se obţine forţa rezultantă care acţionează asupra elementului *1* al grupei *1,2* din mecanismul patrulater obţinut prin înlăturarea elemen-

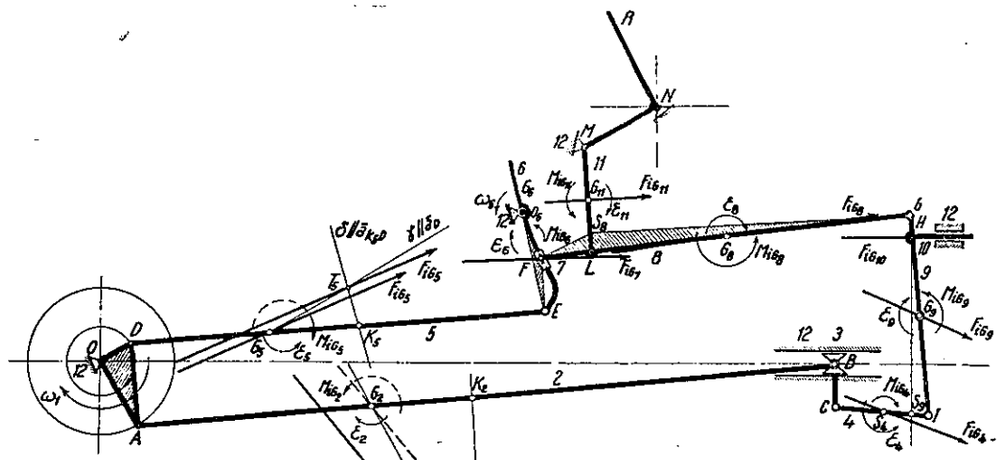


Fig. 1.

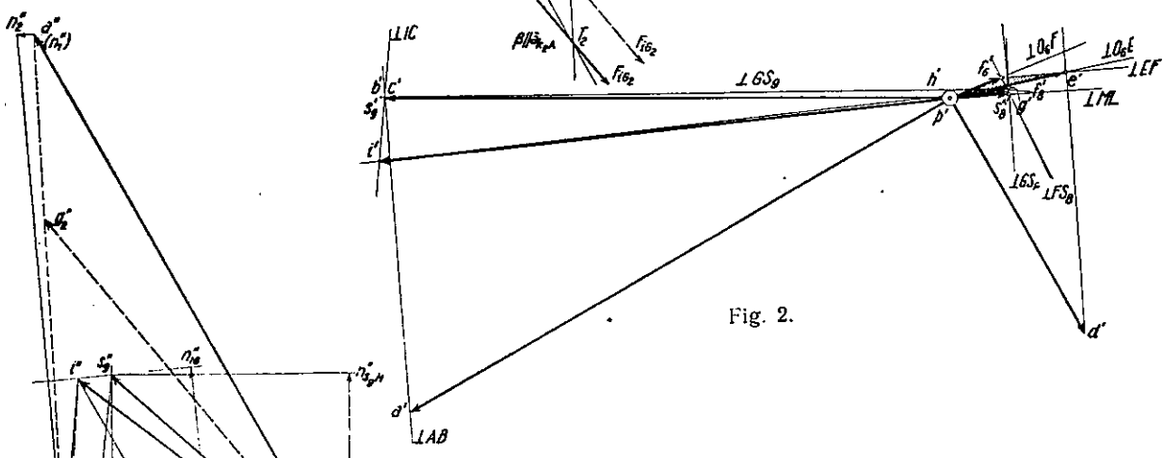


Fig. 2.

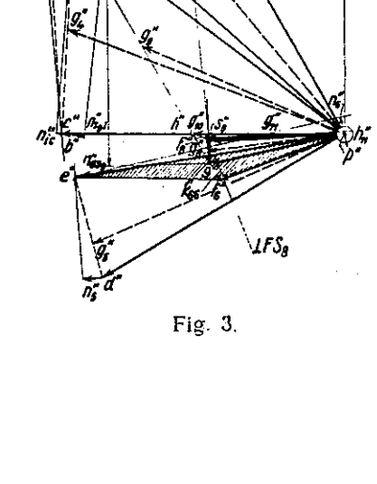


Fig. 3.

Planşa I. Calculul grafic al vitezelor, acceleraţiilor şi forţelor de inerţie la elementele mecanismului de distribuţie şi motor de la locomotiva seria 150.1000 din parcul C.F.R.

tului *4*. Cunoscînd forțele care acționează asupra grupei *1,2*, prin metoda poligonului funicular ce trece prin trei puncte ca în fig. I.39, s-au determinat în fig. I.64, *c* forțele $\overline{F}_{51}$, $\overline{F}_{21}$ și $\overline{F}_{32}$. Inchizînd poligonul vectorial $\overline{F}_{23}+\overline{F}_{43}+\overline{F}_3$, se obține $\overline{F}_{63}$. Compunînd $\overline{F}_{23}$ cu $\overline{F}_{43}$, se intersectează linia de acțiune a acestei rezultante cu $\overline{F}_3$. Prin punctul *P* astfel obținut, trece reacțiunea $\overline{F}_{63}$. Drept control, această direcție trebuie să fie paralelă cu direcția lui $\overline{F}_{63}$ din planul forțelor.

4. Aplicație generală. Să se determine eforturile în cuplele cinematice ale mecanismului de distribuție exterioară a locomotivei seria 150.1 000 a cărui schemă cinematică, în care sînt trecute dimensiunile principale, este dată în planșa I.

Se dau

1) viteza locomotivei $v=55$ km/h; 2) diametrul cilindrului $d=650$ mm; 3) timbrul căldării $p=15$ kgf/cm²; 4) cursa pistonului $s=720$ mm.

Greutățile elementelor.

— Biela motoare *2*	= 352 kg
— Capul de cruce *3*	= 95 kg
— Biela excentricului *5*	= 32 kg
— Culisa *6*	= 40 kg
— Bara de ridicare a pietrei de culisă *8*	= 15 kg
— Pîrghia de avans *9*	= 14 kg
— Biela de legătură *4*	= 3,5 kg
— Atîrnătorul *11*	= 4,0 kg
— Tija sertarului, discul pistonului sertarului *10* 35,4+24+5,5	= 64,9 kg
— Pistonul (face parte din elementul *3*)	= 106,0 kg
— Tija și contratija pistonului *3*	= 96,0 kg
— Piatra de culisă *7*	= 4,6 kg

Soluție. In cursul calculului se vor utiliza și celelalte date care figurează în planșă, ca, de exemplu, poziția centrelor de greutate și momentele de inerție.

1) *Calculul cinematic.* Din planul accelerațiilor, care figurează în planșa I, se determină restul mărimilor cinematice necesare ducerii mai departe a calculului:

Determinarea accelerațiilor centrelor de greutate ale elementelor mecanismului.

Cu ajutorul metodei asemănării se obține[1]):

$$a_{G_2}=k_a(\overline{p''g_2''})=\frac{1}{0,6}\times 67,5=112\ \text{ms}^{-2};$$

$$a_{G_3}=a_B=k_a(\overline{p''b''})=\frac{1}{0,6}\times 40,05=66,75\ \text{ms}^{-2};$$

$$a_{G_4}=k_a(\overline{p''g_4''})=\frac{1}{0,6}\times 41,85=69,75\ \text{ms}^{-2};$$

$$a_{G_5}=k_a(\overline{p''g_5''})=\frac{1}{0,6}\times 38,4=64\ \text{ms}^{-2};$$

$$a_{G_6}=0;$$

$$a_{G_7}=a_{F_8}=k_a(\overline{p''f_8''})=\frac{1}{0,6}\times 19,5=32,5\ \text{ms}^{-2};$$

$$a_{G_8}=k_a(\overline{p''h''})=\frac{1}{0,6}\times 19,44=32,4\ \text{ms}^{-2};$$

[1]) Planșa I este micșorată la 0,3 față de cea inițială, astfel că dimensiunile din planele vitezelor și accelerațiilor sînt reduse la 0,3, iar scara accelerațiilor devine:

$$k_a=\frac{1}{2\cdot 0,3}\ \frac{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{\text{mm}}$$ față de cea inițială, care a fost: $\frac{1}{2}\ \frac{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{\text{mm}}$.

$$a_{G_9}=k_a(\overline{p''g''_9})=\frac{1}{0,6}\times 31,2=52\ \text{ms}^{-2};$$

$$a_{G_{10}}=k_a(\overline{p''h''})=\frac{1}{0,6}\times 21,48=35,8\ \text{ms}^{-2};$$

$$a_{G_{11}}=k_a(\overline{p''g''_{11}})=\frac{1}{0,6}\times 9,6=16,0\ \text{ms}^{-2}.$$

Accelerațiile unghiulare

$$\varepsilon_2=\frac{a^{\tau}_{BA}}{\overline{AB}}=\frac{129,5}{3,32}=39\ \text{rads}^{-2};$$

$$\varepsilon_3=\frac{a^{\tau}_{ED}}{\overline{ED}}=\frac{24,25}{1,975}=12,28\ \text{rads}^{-2};$$

$$\varepsilon_4=\frac{a^{\tau}_{IC}}{\overline{CI}}=\frac{48,75}{0,443}=109,3\ \text{rads}^{-2};$$

$$\varepsilon_6=\frac{a^{\tau}_{E}}{\overline{EO_6}}=\frac{64}{0,48}=133,2\ \text{rads}^{-2};$$

$$\varepsilon_8=\frac{a^{\tau}_{GS_8}}{\overline{GS_8}}=\frac{5,55}{1,51}=3,68\ \text{rads}^{-2};$$

$$\varepsilon_9=\frac{a^{\tau}_{GI}}{\overline{GI}}=\frac{27}{0,96}=28,1\ \text{rads}^{-2};$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{a^{\tau}_{LM}}{\overline{ML}}=\frac{32}{0,5}=64,0\ \text{rads}^{-2}.$$

2) *Calculul cinetostatic*

a) Determinarea maselor elementelor

$$m_2=\frac{G_2}{g}=\frac{352}{9,81}=35,91\ \text{kgf m}^{-1}\text{s}^2;$$

$$m_3=\frac{G_3}{g}=\frac{96+106+95}{9,81}=30,3\ \text{kgf m}^{-1}\text{s}^2;$$

$$m_4=\frac{G_4}{g}=\frac{3,5}{9,81}=0,356\ \text{kgf m}^{-1}\text{s}^2;$$

$$m_5=\frac{G_5}{g}=\frac{32}{9,81}=3,26\ \text{kgf m}^{-1}\text{s}^2;$$

$$m_6=\frac{40}{9,81}=4,07;\quad m_7=0,458;\quad m_8=1,56;\quad m_9=1,425\ \text{kgf m}^{-1}\text{s}^2;$$

$$m_{10}=\frac{24+35,4+5,5}{9,81}=6,5\ \text{kgf m}^{-1}\text{s}^2;\quad m_{11}=0,409\ \text{kgf m}^{-1}\text{s}^2.$$

b) Determinarea poziției centrelor de oscilație ale bielelor *2* și *5*. Se dau momentele de inerție ale elementelor în raport cu axa perpendiculară pe planul mișcării și trecînd prin centrul de greutate, după cum urmează:

$I_{G_2}=18,1$ kgfm s²; $I_{G_4}=0,0059$ kgfm s²; $I_{G_5}=0,889$ kgfm s²;
$I_{G_6}=0,275$ kgfm s²; $I_{G_8}=0,405$ kgfm s²; $I_{G_9}=0,109$ kgfm s²;
$I_{G_{11}}=0,0138$ kgfm s².

Pozițiile centrelor de greutate:

$$\overline{AC_2}=\frac{1}{3}\overline{AB}=1,107\ \text{m};\quad \overline{DG_5}=\frac{1}{3}\overline{DE}=0,658\ \text{m};\quad \overline{O_6G_6}=0.$$

(Celelalte centre de greutate se află la mijlocul lungimii elementului respectiv).

Pozițiile centrelor de oscilație ale elementelor *2* și *5* rezultă din aplicarea formulei (I.45):

$$\overline{G_2K_2}=\frac{I_{G_2}}{m_2\cdot\overline{AG_2}}=\frac{18,1}{33,7\times 1,107}=0,485\ \text{m};$$

$$\overline{G_5K_5}=\frac{I_{G_5}}{m_5\,\overline{DG_5}}=\frac{0,889}{3,26\times 0,658}=0,413\ \text{m}.$$

De aici rezultă:

$$\overline{AK_2}=\overline{AG_2}+\overline{G_2K_2}=1,107+0,485=1,592\ \text{m};$$

$$\overline{DK_5}=\overline{DG_5}+\overline{G_5K_5}=0,658+0,413=1,071\ \text{m}.$$

c) Determinarea forțelor și a momentelor forțelor de inerție.

— Elementul *1* (butonul motor și contramanivela) echilibrat prin contragreutăți, nu va dezvolta forțe de inerție.

— Elementul *2* (biela motoare).

Prin metoda concentrării masei m_2 în A (butonul de manivelă) și K_2 (centrul de oscilație), se obține dreapta suport a forței de inerție rezultante (trasată cu linie plină în planșă). Valoarea acesteia este:

$$F_{i_{G_2}}=-m_2a_{G_2}=35,91\times 112,5=4\,040\ \text{kgf}.$$

In cazul cînd se face reducerea forțelor de inerție la o rezultantă $F_{i_{G_2}}$ și un moment $M_{i_{G_2}}$, atunci dreapta suport a lui $F_{i_{G_2}}$ trece prin G_2 (trasată cu linii întrerupte). $M_{i_{G_2}}$ are ca valoare:

$$M_{i_{G_2}}=-I_{G_2}\varepsilon_2=18,1\times 39=706\ \text{kgm}.$$

— Elementul *3* (capul de cruce, pistonul și tija)

$$F_{i_{G_3}}=-m_3a_{G_3}=30,3\times 66,75=2\,018\ \text{kgf}.$$

— Elementul *4*

$$F_{i_{G_4}}=-m_4a_{G_4}=0,356\times 69,75=24,8\ \text{kgf}.$$

$$F_{i_{G_4}}=-I_{G_4}\varepsilon_4=0,0059\times 109,3=0,646\ \text{kgm}.$$

— Elementul *5* (biela excentricului)

Se calculează în cele două alternative ca și biela *2*. Se obține (prin concentrarea la două mase):

$$F_{i_{G_5}}=-m_5a_{G_5}=3,26\times 64=208\ \text{kgf},$$

a cărei dreaptă suport este trasată cu linie continuă pe planșă; prin reducerea la o rezultantă și un moment: $F_{i_{G_5}}$ trasată cu linie întreruptă și

$$M_{i_{G_5}}=-I_{G_5}\varepsilon_5=0,889\times 12,28=10,9\ \text{kgm}.$$

— Elementul *6* (culisa)

$$M_{i_{G_6}} = -I_{G_6}\varepsilon_6 = 0{,}275 \times 133{,}2 = 36{,}7 \text{ kgm};$$
$$F_{i_{G_6}} = 0.$$

— Elementul *7* (piatra de culisă)

$$F_{i_{G_7}} = -m_7 a_{G_7} = 0{,}458 \times 32{,}5 = 14{,}9 \text{ kgf}.$$

(Forța lui Coriolis este neglijabilă).

— Elementul *8* (bara de ridicare a pietrei de culisă)

$$F_{i_{G_8}} = -m_8 a_{G_8} = 1{,}56 \times 32{,}4 = 50{,}6 \text{ kgf};$$
$$M_{i_{G_8}} = -I_{G_8}\varepsilon_8 = 0{,}405 \times 3{,}68 = 1{,}49 \text{ kgm}.$$

— Elementul *9* (pîrghia de avans)

$$F_{i_{G_9}} = -m_9 a_{G_9} = 1{,}425 \times 52 = 74{,}1 \text{ kgf};$$
$$M_{i_{G_9}} = -I_{G_9}\varepsilon_9 = 0{,}109 \times 28{,}1 = 3{,}06 \text{ kgm}.$$

— Elementul *10* (sertarul de distribuție) are mișcare de translație:

$$F_{i_{G_{10}}} = -m_{10} a_H = 6{,}5 \times 35{,}8 = 233 \text{ kgf}.$$

— Elementul *11* (atîrnătorul)

$$F_{i_{G_{11}}} = -m_{11} a_{G_{11}} = 0{,}409 \times 16 = 6{,}55 \text{ kgf};$$
$$M_{i_{G_{11}}} = -I_{G_{11}}\varepsilon_{11} = 0{,}0138 \times 64 = 0{,}88 \text{ kgm}.$$

d) Calculul reacțiunilor în articulații

α) Grupa de clasa a III-a, ordinul 4 (FLMGHIC) din planșa II, fig. 1.

Se folosește calculul grafo-analitic.

— Determinarea componentelor $F^{\tau}_{12,11}$ și F^{τ}_{34}

Se scriu ecuațiile de momente față de *L*, respectiv *I*, pentru elementele *11*, respectiv *4*, luate separat de restul grupei.

Se obține:

$$F^{\tau}_{12,11} = F_{i_{G_{11}}} \frac{h_{i_{11}}}{\overline{ML}} = 6{,}55 \frac{0{,}236}{0{,}500} = 3{,}09 \text{ kgf};$$

$$F^{\tau}_{34} = \frac{1}{CI}\left[F_{i_{G_4}} h_{i_4} - M_{i_{G_4}}\right] = \frac{1}{0{,}443}\left[24{,}8 \times 0{,}556 - 0{,}646\right] = 1{,}61 \text{ kgf}.$$

— Determinarea componentei F^{τ}_{98} se obține din ecuația de momente față de punctul lui Assur S_8, pentru lanțul format din elementele *7, 8* și *11*, luate separat de restul grupei. (În desen s-a luat $F^{\tau}_{98} \perp \overline{GS_8}$ și $F^{\nu}_{98} \parallel \overline{GS_8}$).

Se obține:

$$M_{S_8}(F^{\tau}_{12,11}) - M_{S_8}(F_{i_{G_{11}}}) + M_{S_8}(F_{i_{G_7}}) + M_{S_8}(F_{i_{G_8}}) + M_{i_{G_8}} - M_{S_8}(F^{\tau}_{98}) = 0.$$

Înlocuind, rezultă:

$$3{,}09 \times 0{,}410 - 6{,}55 \times 0{,}158 + 14{,}9 \times 0{,}107 + 50{,}6 \times 0{,}098 + 1{,}49 - 1{,}41\, F^{\tau}_{98} = 0,$$

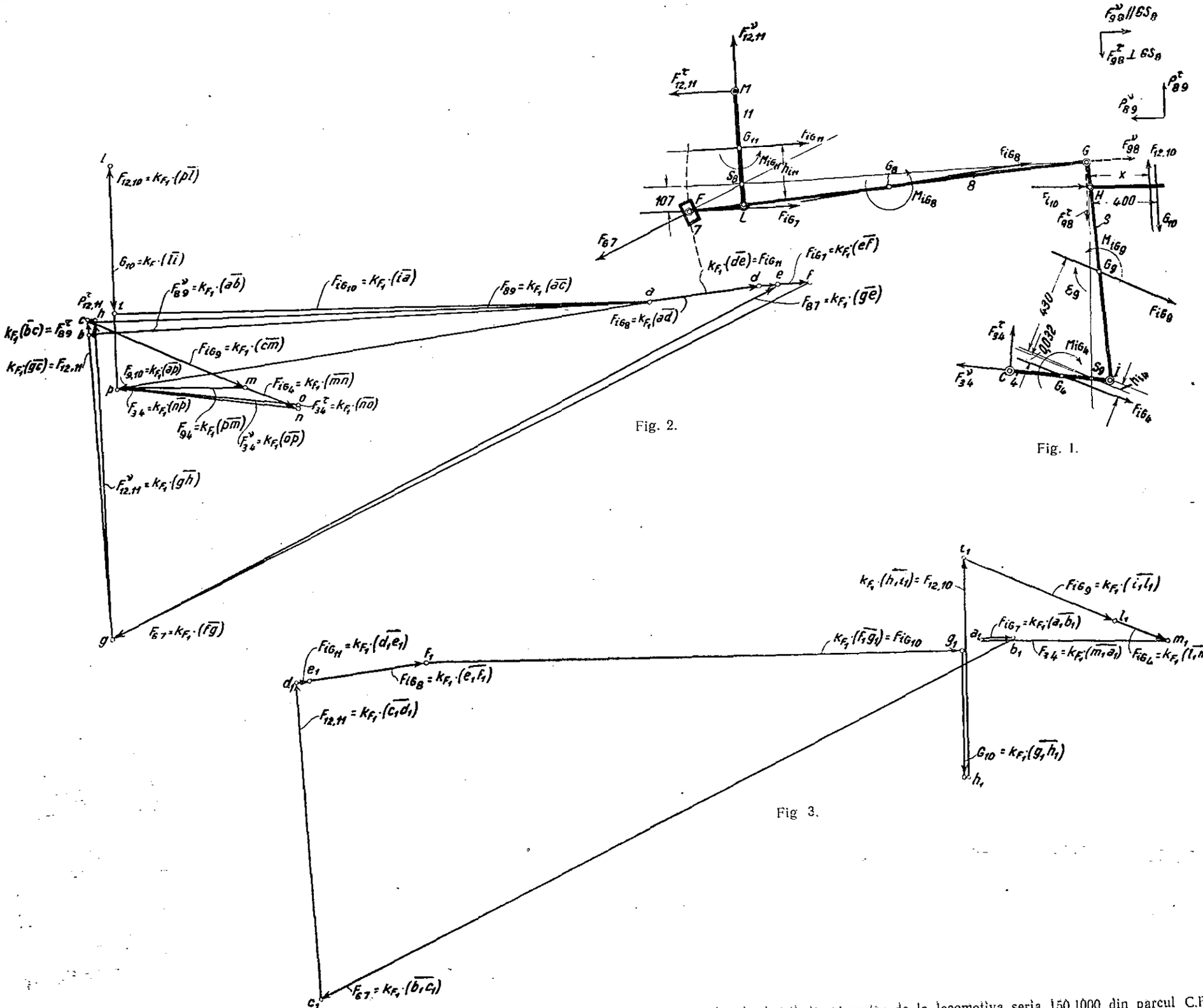


Fig. 2.

Fig. 1.

Fig 3.

Planșa II. Calculul reacțiunilor din articulațiile grupei cinematice de clasa a III-a, ordinul 4, a mecanismului de distribuție și motor de la locomotiva seria 150.1000 din parcul C.F.R.

de unde, făcînd calculele, se găsește:

$$F_{98}=5{,}67 \text{ kgf.}$$

— Determinarea componentei $F'_{98}=-F'_{89}$ se obține scriind ecuația de momente în raport cu punctul lui Assur S_9, pentru lanțul format din elementele *10*, *9* și *4* (luate separat de restul grupei). Se ia semnul + pentru sensul trigonometric:

$$M_{S_9}(F'_{89})+M_{S_9}(F''_{89})-M_{S_9}(F_{i_{G_{10}}})+M_{i_{G_9}}-M_{S_9}(F_{i_{G_9}})-M_{S_9}(G_{10})+M_{S_9}(F_{12,10})-$$
$$-M_{i_{G_4}}+M_{S_9}(F_{i_{G_4}})-M_{S_9}(F''_{34})=0.$$

Deoarece $M_{S_9}(F_{12,10})-M_{S_9}(G_{10})=0$ și $M_{S_9}(F''_{89})=0$, ecuația de mai sus, după ce se introduc valorile numerice, devine:

$$0{,}94\,F'_{89}-233\times 0{,}83+3{,}06-74{,}1\times 0{,}43-0{,}643+24{,}8\times 0{,}032-1{,}61\times 0{,}443=0,$$

de unde

$$F'_{89}=243{,}6 \text{ kgf.}$$

— Reacțiunea $\overline{F}_{98}$ rezultă: $\overline{F}_{98}=\overline{F}''_{98}+\overline{F}'_{98}$;

se alege în planul forțelor (planșa II, fig. 2) scara:

$$k_{F_1}=\frac{1 \text{ kgf}}{0.5 \text{ mm}}$$

și se construiește poligonul forțelor de mai sus

$$\overline{ca}=\overline{cb}+\overline{ba},$$

de unde se obține:

$$F_{98}=k_{F_1}(\overline{ca})=244 \text{ kgf.}$$

— Determinarea reacțiunilor $F'_{12,11}$ și F_{67}.

Se construiește poligonul forțelor pentru lanțul cinematic *7*, *8* și *11*:

$$\overline{F}'_{12,11}+\overline{F}''_{12,11}+\overline{F}_{98}+\overline{F}_{i_{G_8}}+\overline{F}_{i_{G_{11}}}+\overline{F}_{i_{G_7}}+\overline{F}_{67}=0.$$

Mai sus $\overline{F}'_{12,11} \parallel \overline{ML}$ și $\overline{F}_{67} \parallel \overline{FS}_8$.

In planul forțelor ecuația de mai sus devine:

$$\overline{gh}+\overline{hc}+\overline{ca}+\overline{ad}+\overline{de}+\overline{ef}+\overline{fg}=0,$$

din care rezultă:

$$\overline{F}_{67}=k_{F_1}(\overline{fg})=340 \text{ kgf}; \quad \overline{F}'_{12,11}=k_{F_1}(\overline{gh})=138 \text{ kgf};$$
$$\overline{F}_{12,11}=k_{F_1}(\overline{gc})=138 \text{ kgf.}$$

— Determinarea reacțiunii $\overline{F}_{87}$.

Din ecuația de echilibru a pietrei de culisă *7* rezultă:

$$\overline{F}_{i_{G_7}}+\overline{F}_{67}+\overline{F}_{87}=0,$$

sau, în planul forțelor:

$$\overline{ef}+\overline{fg}+\overline{ge}=0;$$
$$\overline{F}_{87}=k_{F_1}(\overline{ge})=328 \text{ kgf}.$$

— Determinarea reacțiunilor F^{v}_{34} și $F_{12,10}$.

Se construiește poligonul forțelor pentru lanțul cinematic al elementelor *4*, *9* și *10*, ținîndu-se seamă de greutatea tijei, a contratijei, a discurilor și a capului de cruce al sertarului de distribuție (G_{10}); se obține:

$$\overline{F}_{12,10}+\overline{G}_{10}+\overline{F}_{i_{G_{10}}}+\overline{F}_{89}+\overline{F}_{i_{G_9}}+\overline{F}_{i_{G_4}}+\overline{F}^{\tau}_{34}+\overline{F}^{v}_{34}=0,$$

sau, în planul forțelor:

$$\overline{pl}+\overline{li}+\overline{ia}+\overline{ac}+\overline{cm}+\overline{mn}+\overline{no}+\overline{op}=0,$$

de unde rezultă:

$$\overline{F}_{12,10}=k_{F_1}(\overline{pl})=97 \text{ kgf};$$
$$\overline{F}^{v}_{34}=k_{F_1}(\overline{op})=79 \text{ kgf},$$

și reacțiunea $\overline{F}_{34}$:

$$\overline{F}_{34}=\overline{F}^{v}_{34}+\overline{F}^{\tau}_{34}=k_{F_1}(\overline{no}+\overline{op})=k_{F_1}(\overline{np})=79 \text{ kgf}.$$

— Determinarea reacțiunii $\overline{F}_{94}$ rezultă din ecuația de echilibru a bielei *4*:

$$\overline{F}_{i_{G_4}}+\overline{F}_{34}+\overline{F}_{94}=0,$$

sau, în planul forțelor:

$$\overline{mn}+\overline{np}+\overline{pa}=0,$$

de unde:

$$\overline{F}_{94}=k_{F_1}(\overline{pm})=55 \text{ kgf}.$$

— Determinarea reacțiunii $F_{9,10}$.

Din poligonul forțelor care acționează asupra sertarului se obține:

$$\overline{F}_{12,10}+\overline{G}_{10}+\overline{F}_{i_{G_{10}}}+\overline{F}_{9,10}=0$$

sau, în planul forțelor:

$$\overline{pl}+\overline{li}+\overline{ia}+\overline{ap}=0$$

rezultă:

$$F_{9,10}=k_{F_1}(\overline{ap})=235 \text{ kgf}.$$

— Verificări:

Din ecuația de echilibru a elementului *9* se verifică valoarea reacțiunii $\overline{F}_{10,9}=-\overline{F}_{9,10}$.

Se construiește poligonul forțelor:

$$\overline{F}_{10,9}+\overline{F}_{89}+\overline{F}_{i_{G_9}}+\overline{F}_{49}=0,$$

adică

$$\overline{pa}+\overline{ac}+\overline{cm}+\overline{mp}=0;$$

poligonul se închide.

Se construiește poligonul forțelor (planșa II, fig. 3) pentru toate forțele exterioare care acționează asupra grupei de clasa a III-a ordinul 4 (*7*, *8*, *9*, *10*, *11* și *4*).

Se obține:

$$\overline{F}_{i_{G_7}}+\overline{F}_{67}+\overline{F}_{12,11}+\overline{F}_{i_{G_{11}}}+\overline{F}_{i_{G_8}}+\overline{F}_{i_{G_{10}}}+\overline{G}_{10}+\overline{F}_{12,10}+\overline{F}_{i_{G_9}}+\overline{F}_{i_{G_4}}+\overline{F}_{34}=0,$$

sau, în planul forțelor la aceeași scară $k_{F_1}=\frac{1 \text{ kgf}}{0{,}5 \text{ mm}}$, se obține:

$$\overline{a_1b_1}+\overline{b_1c_1}+\overline{c_1d_1}+\overline{d_1e_1}+\overline{e_1f_1}+\overline{f_1g_1}+\overline{g_1h_1}+\overline{h_1i_1}+\overline{i_1l_1}+\overline{l_1m_1}=0.$$

(În planșă a rămas o deschidere de 1,5 mm, ceea ce reprezintă o eroare de 3 kgf, deci neglijabilă față de valorile reacțiunilor).

β) Grupa de clasa a II-a, ordinul 2 [diada de aspectul 2: (2,3) sau *ABC*], (planșa III, fig. 1).

— Calculul forței motoare.

Pentru poziția pistonului se găsește că presiunea efectivă rezultantă pe piston (obținută din diferența presiunilor pe cele două fețe) este:

$$p=11{,}4 \text{ kgf/cm}^2.$$

Forța motoare este

$$F_M=p\frac{\pi d^2}{4}=11{,}4\times\frac{\pi\times 65^2}{4}=37\,820 \text{ kgf}.$$

Dacă se scade valoarea forței de inerție $F_{i_{G_3}}$, se obține:

$$\overline{F}_3=\overline{F}_M-\overline{F}_{i_{G_3}}=37\,820-2\,018=35\,802 \text{ kgf}.$$

— Determinarea componentei F^{τ}_{12} și a reacțiunii F_{12}.

Se scrie ecuația de momente în raport cu B a forțelor care acționează asupra bielei *2*:

$$M_B(F^{\tau}_{12})-M_B(F_{i_{G_2}})-M_B(G_2)=0.$$

Înlocuind, se obține:

$$\overline{F}^{\tau}_{12}\times 3{,}32-2\,018\times 1{,}98-331\times 2{,}20=0,$$

de unde

$$F^{\tau}_{12}=1\,448 \text{ kgf}.$$

— Determinarea reacțiunilor $\overline{F}_{12,3}$ și $\overline{F}^{v}_{12}$.

Se construiește poligonul forțelor pentru întreaga grupă:

$$\underline{\overline{F}^{v}_{12}}+\overline{F}^{\tau}_{12}+\overline{G}_2+F_{i_{G_2}}+\overline{F}_3+\overline{G}_3+\overline{F}_{43}+\underline{\overline{F}_{12,3}}=0.$$

În planul forțelor, la scara

$$k_{F_2}=\frac{200 \text{ kgf}}{1 \text{ mm}},$$ se obține (planșa III, fig. 2):

$$\overline{ha}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}+\overline{ef}+\overline{fg}+\overline{gh}=0,$$

de unde rezultă:

$$\overline{F}^{v}_{12}=k_{F_2}(\overline{ha})=35\,120 \text{ kgf};$$
$$\overline{F}_{12,3}=k_{F_2}(\overline{gh})=2\,760 \text{ kgf}.$$

— Reacțiunea $\overline{F}_{12}$ va fi deci:

$$\overline{F}_{12}=\overline{F}^{r}_{12}+\overline{F}^{v}_{12}=k_{F_2}(\overline{hb})=35\,400 \text{ kgf.}$$

— Determinarea poziției reacțiunii $\overline{F}_{12,3}$.

Se scrie ecuația de momente în raport cu B a tuturor forțelor care acționează asupra elementului *3*:

$$M_B(F_{43})-M_B(F_{12,3})=0,$$

de unde

$$x=0{,}0054 \text{ m}=5{,}4 \text{ mm.}$$

— Determinarea reacțiunii F_{23}.

Se construiește poligonul forțelor pentru elementul *3*:

$$\overline{F}_{23}+\overline{F}_3+\overline{G}_3+\overline{F}_{43}+\overline{F}_{12,3}=0,$$

sau, în planul forțelor:

$$\overline{hd}+\overline{de}+\overline{ef}+\overline{fg}+\overline{gh}=0,$$

de unde

$$\overline{F}_{23}=k_{F_2}(\overline{ha})=37\,800 \text{ kgf.}$$

γ) Grupa de clasa a II-a, ordinul 2, aspectul 1 (diada *5, 6*) (planșa III, fig. 3).

— Determinarea componentei $\overline{F}^{r}_{15} \perp \overline{DE}$.

Din ecuația de momente în raport cu E a forțelor care acționează asupra bielei *5* se obține:

$$M_E(F^{r}_{15})-M_E(F_{i_{G_5}})=0,$$

de unde

$$F^{r}_{15}=F_{i_{G_5}}\frac{h_{15}}{\overline{DE}}=218\,\frac{0{,}420}{1{,}975}=44{,}3 \text{ kgf.}$$

— Determinarea componentei $\overline{F}^{r}_{12,6} \perp \overline{EO}_6$.

Din ecuația

$$M_E(F^{r}_{12,6})-M_{i_{G_6}}+M_E(F_{76})=0,$$

după înlocuire,

$$F^{r}_{12,6}\times 0{,}478-36{,}7+340\times 0{,}23=0,$$

rezultă:

$$F^{r}_{12,6}=86{,}9 \text{ kgf.}$$

— Determinarea componentelor F^{v}_{15} și $F^{v}_{12,6}$.

Se construiește poligonul forțelor pentru întreaga grupă:

$$\overline{F}^{v}_{15}+\overline{F}^{r}_{15}+\overline{F}_{i_{G_5}}+\overline{G}_5+\overline{F}_{76}+\overline{G}_6+\overline{F}^{r}_{12,6}+\overline{F}^{v}_{12,6}=0.$$

In planul forțelor, la scara

$$k_{F_3}=\frac{2}{1}\frac{\text{kgf}}{\text{mm}},$$

se obține poligonul (planșa III, fig. 4):

$$\overline{ha}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}+\overline{ef}+\overline{fg}+\overline{gh}=0,$$

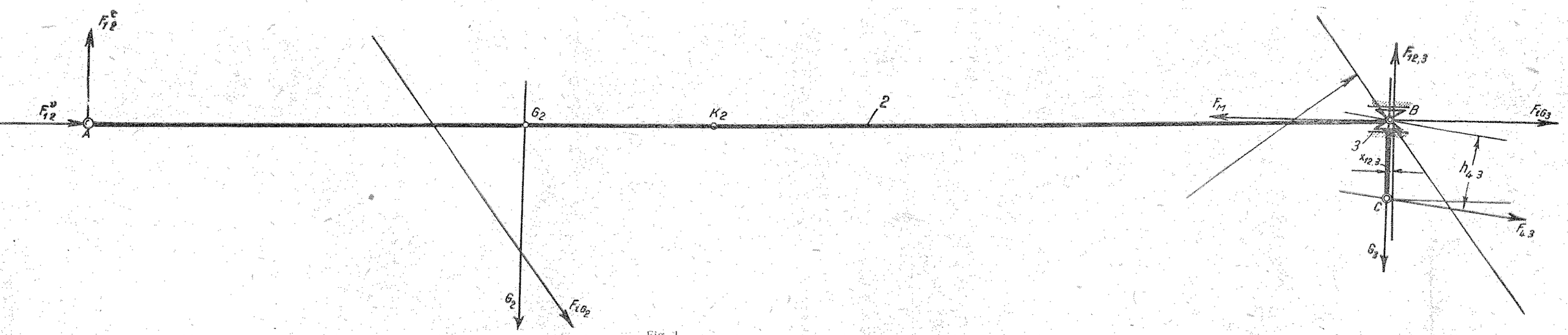


Fig. 1.

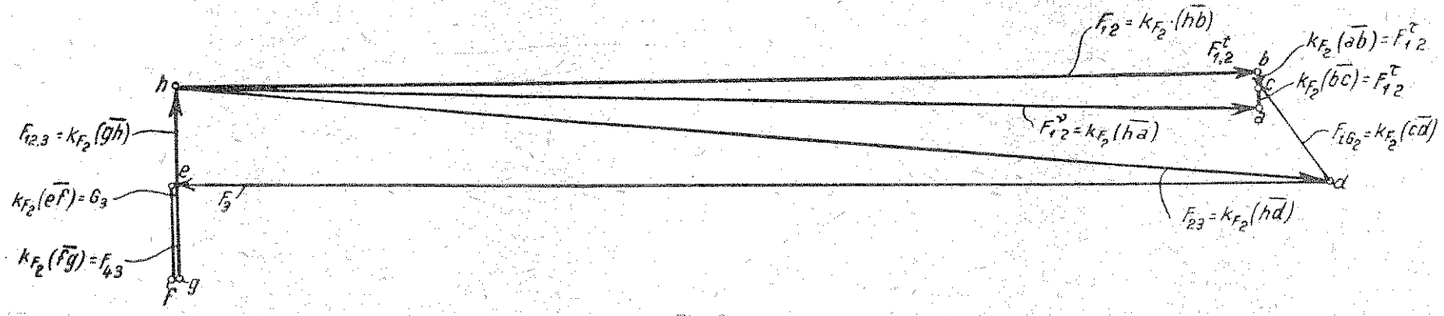


Fig. 2

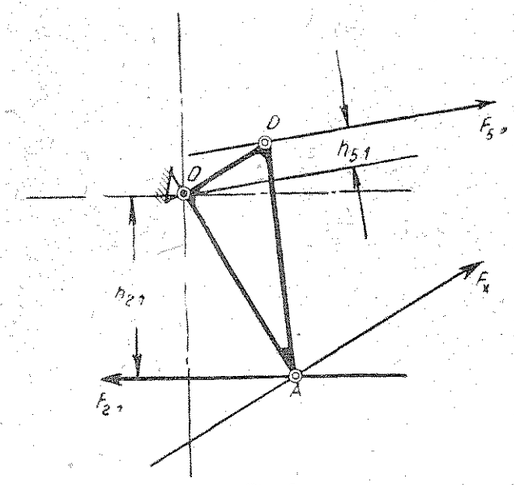


Fig. 5

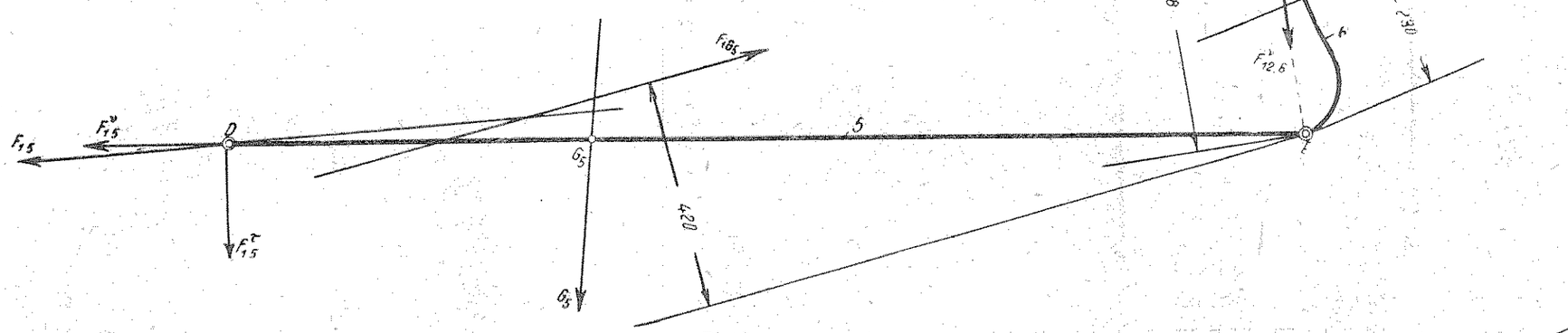


Fig. 3.

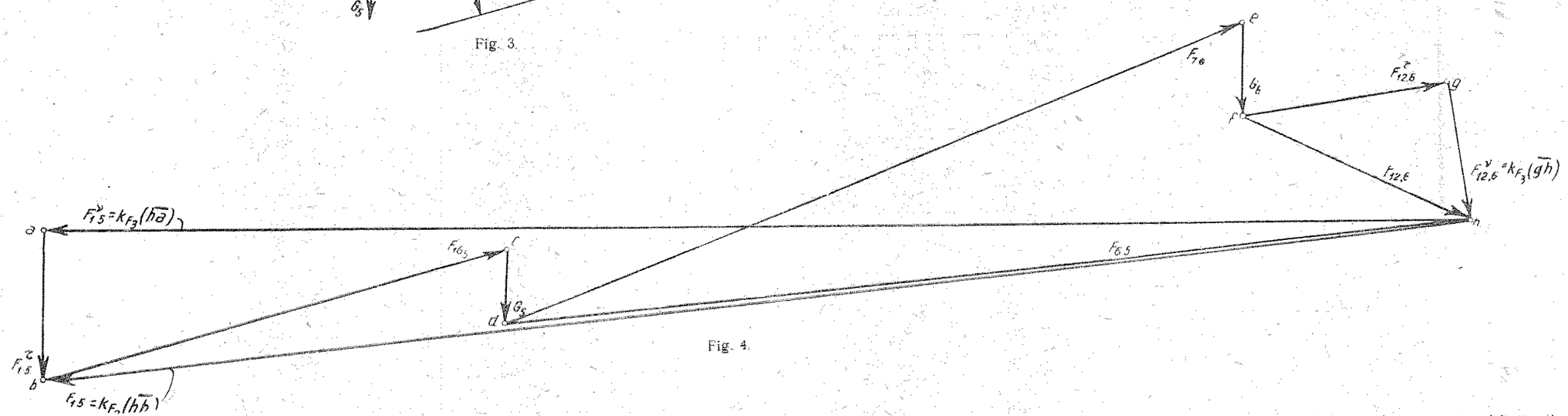


Fig. 4.

Fig. III. Calculul reacțiunilor la grupele de clasa a II-a, ordinul 2 (aspectul 2 din fig. 1 și 2 și aspectul 1 din fig. 3 și 4) și la elementul inițial (fig. 5), unde s-a determinat și forța de echilibrare F_x, de la mecanismul de distribuție și motor al locomotivei seria 150.1000 din parcul C.F.R.

de unde, făcînd calculele, se găsește:

$$F_{98}=5{,}67 \text{ kgf.}$$

— Determinarea componentei $F'_{98}=-F'_{89}$ se obține scriind ecuația de momente în raport cu punctul lui Assur S_9, pentru lanțul format din elementele *10*, *9* și *4* (luate separat de restul grupei). Se ia semnul + pentru sensul trigonometric:

$$M_{S_9}(F'_{89})+M_{S_9}(F''_{89})-M_{S_9}(F_{i_{G_{10}}})+M_{i_{G_9}}-M_{S_9}(F_{i_{G_9}})-M_{S_9}(G_{10})+M_{S_9}(F_{12,10})-$$
$$-M_{i_{G_4}}+M_{S_9}(F_{i_{G_4}})-M_{S_9}(F''_{34})=0.$$

Deoarece $M_{S_9}(F_{12,10})-M_{S_9}(G_{10})=0$ și $M_{S_9}(F''_{89})=0$, ecuația de mai sus, după ce se introduc valorile numerice, devine:

$$0{,}94\,F'_{89}-233\times 0{,}83+3{,}06-74{,}1\times 0{,}43-0{,}643+24{,}8\times 0{,}032-1{,}61\times 0{,}443=0,$$

de unde

$$F'_{89}=243{,}6 \text{ kgf.}$$

— Reacțiunea $\overline{F}_{98}$ rezultă: $\overline{F}_{98}=\overline{F}''_{98}+\overline{F}'_{98}$;

se alege în planul forțelor (planșa II, fig. 2) scara:

$$k_{F_1}=\frac{1 \text{ kgf}}{0.5 \text{ mm}}$$

și se construiește poligonul forțelor de mai sus

$$\overline{ca}=\overline{cb}+\overline{ba},$$

de unde se obține:

$$F_{98}=k_{F_1}(\overline{ca})=244 \text{ kgf.}$$

— Determinarea reacțiunilor $F'_{12,11}$ și F_{67}.

Se construiește poligonul forțelor pentru lanțul cinematic *7*, *8* și *11*:

$$\overline{F}'_{12,11}+\overline{F}''_{12,11}+\overline{F}_{98}+\overline{F}_{i_{G_8}}+\overline{F}_{i_{G_{11}}}+\overline{F}_{i_{G_7}}+\overline{F}_{67}=0.$$

Mai sus $\overline{F}'_{12,11} \parallel \overline{ML}$ și $\overline{F}_{67} \parallel \overline{FS}_8$.

In planul forțelor ecuația de mai sus devine:

$$\overline{gh}+\overline{hc}+\overline{ca}+\overline{ad}+\overline{de}+\overline{ef}+\overline{fg}=0,$$

din care rezultă:

$$\overline{F}_{67}=k_{F_1}(\overline{fg})=340 \text{ kgf}; \quad \overline{F}'_{12,11}=k_{F_1}(\overline{gh})=138 \text{ kgf};$$
$$\overline{F}_{12,11}=k_{F_1}(\overline{gc})=138 \text{ kgf.}$$

— Determinarea reacțiunii $\overline{F}_{87}$.

Din ecuația de echilibru a pietrei de culisă *7* rezultă:

$$\overline{F}_{i_{G_7}}+\overline{F}_{67}+\overline{F}_{87}=0,$$

sau, în planul forțelor:

$$\overline{ef}+\overline{fg}+\overline{ge}=0;$$
$$\overline{F}_{87}=k_{F_1}(\overline{ge})=328 \text{ kgf}.$$

— Determinarea reacțiunilor F^{v}_{34} și $F_{12,10}$.

Se construiește poligonul forțelor pentru lanțul cinematic al elementelor *4*, *9* și *10*, ținîndu-se seamă de greutatea tijei, a contratijei, a discurilor și a capului de cruce al sertarului de distribuție (G_{10}); se obține:

$$\overline{F}_{12,10}+\overline{G}_{10}+\overline{F}_{i_{G_{10}}}+\overline{F}_{89}+\overline{F}_{i_{G_9}}+\overline{F}_{i_{G_4}}+\overline{F}^{\tau}_{34}+\overline{F}^{v}_{34}=0,$$

sau, în planul forțelor:

$$\overline{pl}+\overline{li}+\overline{ia}+\overline{ac}+\overline{cm}+\overline{mn}+\overline{no}+\overline{op}=0,$$

de unde rezultă:

$$\overline{F}_{12,10}=k_{F_1}(\overline{pl})=97 \text{ kgf};$$
$$\overline{F}^{v}_{34}=k_{F_1}(\overline{op})=79 \text{ kgf},$$

și reacțiunea $\overline{F}_{34}$:

$$\overline{F}_{34}=\overline{F}^{v}_{34}+\overline{F}^{\tau}_{34}=k_{F_1}(\overline{no}+\overline{op})=k_{F_1}(\overline{np})=79 \text{ kgf}.$$

— Determinarea reacțiunii $\overline{F}_{94}$ rezultă din ecuația de echilibru a bielei *4*:

$$\overline{F}_{i_{G_4}}+\overline{F}_{34}+\overline{F}_{94}=0,$$

sau, în planul forțelor:

$$\overline{mn}+\overline{np}+\overline{pa}=0,$$

de unde:

$$\overline{F}_{94}=k_{F_1}(\overline{pm})=55 \text{ kgf}.$$

— Determinarea reacțiunii $F_{9,10}$.

Din poligonul forțelor care acționează asupra sertarului se obține:

$$\overline{F}_{12,10}+\overline{G}_{10}+\overline{F}_{i_{G_{10}}}+\overline{F}_{9,10}=0$$

sau, în planul forțelor:

$$\overline{pl}+\overline{li}+\overline{ia}+\overline{ap}=0$$

rezultă:

$$F_{9,10}=k_{F_1}(\overline{ap})=235 \text{ kgf}.$$

— Verificări:

Din ecuația de echilibru a elementului *9* se verifică valoarea reacțiunii $\overline{F}_{10,9}=-\overline{F}_{9,10}$.

Se construiește poligonul forțelor:

$$\overline{F}_{10,9}+\overline{F}_{89}+\overline{F}_{i_{G_9}}+\overline{F}_{49}=0,$$

adică

$$\overline{pa}+\overline{ac}+\overline{cm}+\overline{mp}=0;$$

poligonul se închide.

Se construiește poligonul forțelor (planșa II, fig. 3) pentru toate forțele exterioare care acționează asupra grupei de clasa a III-a ordinul 4 (*7*, *8*, *9*, *10*, *11* și *4*).

Se obține:

$$\overline{F}_{i_{G_7}}+\overline{F}_{67}+\overline{F}_{12,11}+\overline{F}_{i_{G_{11}}}+\overline{F}_{i_{G_8}}+\overline{F}_{i_{G_{10}}}+\overline{G}_{10}+\overline{F}_{12,10}+\overline{F}_{i_{G_9}}+\overline{F}_{i_{G_4}}+\overline{F}_{34}=0,$$

sau, în planul forțelor la aceeași scară $k_{F_1}=\frac{1 \text{ kgf}}{0{,}5 \text{ mm}}$, se obține:

$$\overline{a_1b_1}+\overline{b_1c_1}+\overline{c_1d_1}+\overline{d_1e_1}+\overline{e_1f_1}+\overline{f_1g_1}+\overline{g_1h_1}+\overline{h_1i_1}+\overline{i_1l_1}+\overline{l_1m_1}=0.$$

(În planșă a rămas o deschidere de 1,5 mm, ceea ce reprezintă o eroare de 3 kgf, deci neglijabilă față de valorile reacțiunilor).

β) Grupa de clasa a II-a, ordinul 2 [diada de aspectul 2: (2,3) sau *ABC*], (planșa III, fig. 1).

— Calculul forței motoare.

Pentru poziția pistonului se găsește că presiunea efectivă rezultantă pe piston (obținută din diferența presiunilor pe cele două fețe) este:

$$p=11{,}4 \text{ kgf/cm}^2.$$

Forța motoare este

$$F_M=p\frac{\pi d^2}{4}=11{,}4\times\frac{\pi\times 65^2}{4}=37\,820 \text{ kgf}.$$

Dacă se scade valoarea forței de inerție $F_{i_{G_3}}$, se obține:

$$\overline{F}_3=\overline{F}_M-\overline{F}_{i_{G_3}}=37\,820-2\,018=35\,802 \text{ kgf}.$$

— Determinarea componentei F^{τ}_{12} și a reacțiunii F_{12}.

Se scrie ecuația de momente în raport cu B a forțelor care acționează asupra bielei *2*:

$$M_B(F^{\tau}_{12})-M_B(F_{i_{G_2}})-M_B(G_2)=0.$$

Înlocuind, se obține:

$$\overline{F}^{\tau}_{12}\times 3{,}32-2\,018\times 1{,}98-331\times 2{,}20=0,$$

de unde

$$F^{\tau}_{12}=1\,448 \text{ kgf}.$$

— Determinarea reacțiunilor $\overline{F}_{12,3}$ și $\overline{F}^{v}_{12}$.

Se construiește poligonul forțelor pentru întreaga grupă:

$$\underline{\overline{F}^{v}_{12}}+\overline{F}^{\tau}_{12}+\overline{G}_2+F_{i_{G_2}}+\overline{F}_3+\overline{G}_3+\overline{F}_{43}+\underline{\overline{F}_{12,3}}=0.$$

În planul forțelor, la scara

$$k_{F_2}=\frac{200 \text{ kgf}}{1 \text{ mm}},$$ se obține (planșa III, fig. 2):

$$\overline{ha}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}+\overline{ef}+\overline{fg}+\overline{gh}=0,$$

de unde rezultă:

$$\overline{F}^{v}_{12}=k_{F_2}(\overline{ha})=35\,120 \text{ kgf};$$
$$\overline{F}_{12,3}=k_{F_2}(\overline{gh})=2\,760 \text{ kgf}.$$

— Reacțiunea $\overline{F}_{12}$ va fi deci:

$$\overline{F}_{12}=\overline{F}^{r}_{12}+\overline{F}^{v}_{12}=k_{F_2}(\overline{hb})=35\,400 \text{ kgf.}$$

— Determinarea poziției reacțiunii $\overline{F}_{12,3}$.

Se scrie ecuația de momente în raport cu B a tuturor forțelor care acționează asupra elementului *3*:

$$M_B(F_{43})-M_B(F_{12,3})=0,$$

de unde

$$x=0{,}0054 \text{ m}=5{,}4 \text{ mm.}$$

— Determinarea reacțiunii F_{23}.

Se construiește poligonul forțelor pentru elementul *3*:

$$\overline{F}_{23}+\overline{F}_3+\overline{G}_3+\overline{F}_{43}+\overline{F}_{12,3}=0,$$

sau, în planul forțelor:

$$\overline{hd}+\overline{de}+\overline{ef}+\overline{fg}+\overline{gh}=0,$$

de unde

$$\overline{F}_{23}=k_{F_2}(\overline{ha})=37\,800 \text{ kgf.}$$

γ) Grupa de clasa a II-a, ordinul 2, aspectul 1 (diada *5, 6*) (planșa III, fig. 3).

— Determinarea componentei $\overline{F}^{r}_{15} \perp \overline{DE}$.

Din ecuația de momente în raport cu E a forțelor care acționează asupra bielei *5* se obține:

$$M_E(F^{r}_{15})-M_E(F_{i_{G_5}})=0,$$

de unde

$$F^{r}_{15}=F_{i_{G_5}}\frac{h_{15}}{\overline{DE}}=218\,\frac{0{,}420}{1{,}975}=44{,}3 \text{ kgf.}$$

— Determinarea componentei $\overline{F}^{r}_{12,6} \perp \overline{EO}_6$.

Din ecuația

$$M_E(F^{r}_{12,6})-M_{i_{G_6}}+M_E(F_{76})=0,$$

după înlocuire,

$$F^{r}_{12,6}\times 0{,}478-36{,}7+340\times 0{,}23=0,$$

rezultă:

$$F^{r}_{12,6}=86{,}9 \text{ kgf.}$$

— Determinarea componentelor F^{v}_{15} și $F^{v}_{12,6}$.

Se construiește poligonul forțelor pentru întreaga grupă:

$$\overline{F}^{v}_{15}+\overline{F}^{r}_{15}+\overline{F}_{i_{G_5}}+\overline{G}_5+\overline{F}_{76}+\overline{G}_6+\overline{F}^{r}_{12,6}+\overline{F}^{v}_{12,6}=0.$$

In planul forțelor, la scara

$$k_{F_3}=\frac{2}{1}\frac{\text{kgf}}{\text{mm}},$$

se obține poligonul (planșa III, fig. 4):

$$\overline{ha}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}+\overline{ef}+\overline{fg}+\overline{gh}=0,$$

el

de

sau

de

(pla

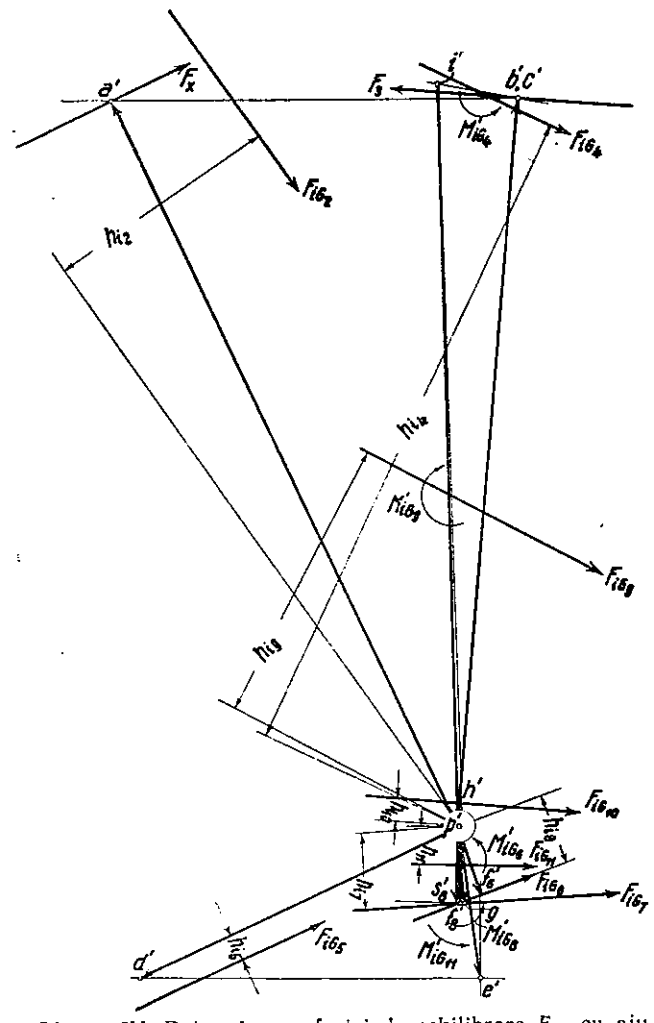
se

de

după

rezul

se ob



Planşa IV. Determinarea forţei de echilibrare F_x cu ajutorul metodei pîrghiei lui N. E. Jukovski, la mecanismul de distribuţie şi motor al locomotivei seria 150.1000 din parcul C.F.R.

de unde

$$\overline{F}^{v}_{15} = k_{F_3}(\overline{ha}) = 604 \text{ kgf};$$
$$\overline{F}_{15} = k_{F_3}(\overline{hb}) = 605 \text{ kgf};$$
$$\overline{F}^{v}_{12,6} = k_{F_3}(\overline{gh}) = 60 \text{ kgf};$$
$$\overline{F}_{12,6} = k_{F_3}(\overline{fh}) = 108 \text{ kgf}.$$

— Determinarea componentei $\overline{F}_{65}$.

Se construiește poligonul forțelor pentru elementul *5* (biela excentricului):

$$\overline{F}_{15} + \overline{F}_{i_{G_5}} + \overline{G}_5 + \overline{F}_{65} = 0;$$

în planul forțelor devine:

$$\overline{hb} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{dh} = 0,$$

de unde

$$\overline{F}_{65} = k_{F_3}(\overline{dh}) = 414 \text{ kgf}.$$

δ) Elementul inițial *1* (planșa III, fig. 5)

— Determinarea forței de echilibrare F_x.

Se scrie momentul în raport cu *O* al forțelor care acționează asupra elementului *1*, adică:

$$M_0(F_x) - M_0(F_{21}) - M_0(F_{51}) = 0,$$

sau

$$OA \cdot F_x - h_{21} \cdot F_{21} - h_{51} \cdot F_{51}) = 0,$$

de unde

$$F_x = \frac{1}{0{,}36}(35\,400 \times 0{,}295 + 605 \times 0{,}06) = 29\,100 \text{ kgf};$$
$$F_x = 29\,100 \text{ kgf}.$$

e) Determinarea forței de echilibrare F_x cu ajutorul metodei pîrghiei lui N. E. Jukovski. Se construiește planul vitezelor rotit cu 90° (planșa IV), pe care se transpun forțele și momentele forțelor de inerție în punctele corespunzătoare punctelor din planul mecanismului, respectiv asupra elementelor corespunzătoare.

La aplicarea ecuației de momente în raport cu polul p' forțele se iau în mărime naturală, iar momentele, reduse în raportul de mai jos, astfel:

$$M'_{i_{G_4}} = M_{i_{G_4}} \frac{(\overline{i'c'})}{\overline{IC}} = 0{,}646 \times \frac{10}{0{,}441} = 14{,}6 \text{ kgm};$$
$$M'_{i_{G_6}} = M_{i_{G_6}} \frac{(\overline{p'e'})}{\overline{D_6E}} = 36{,}7 \times \frac{18{,}5}{0{,}48} = 142{,}5 \text{ kgm};$$
$$M'_{i_{G_8}} = M_{i_{G_8}} \frac{(\overline{g'f'_8})}{GF_8} = 1{,}49 \times \frac{0{,}40}{1{,}765} = 0{,}34 \text{ kgm};$$
$$M'_{i_{G_9}} = M_{i_{G_9}} \frac{(\overline{g'i'})}{\overline{GI}} = 3{,}06 \times \frac{9{,}93}{0{,}96} = 317 \text{ kgm};$$
$$M'_{i_{G_{11}}} = M_{i_{G_{11}}} \frac{(\overline{p'l'})}{\overline{ML}} = 0{,}88 \times \frac{12{,}3}{0{,}5} = 21{,}6 \text{ kgm}.$$

Sensurile acestor momente se fixează pe planul vitezelor, ținînd seamă de orientarea figurilor asemenea.

Astfel, de exemplu, $M_{i_{G_9}}$ roteşte bara de avans *9* (*GHI*) în sensul invers acelor de ceasornic. $M'_{i_{G_9}}$ se transpune în planul vitezelor rotit cu 90°, astfel încît, cuplul dat de $M'_{i_{G_9}}$ să păstreze acelaşi sens cu $M_{i_{G_9}}$. Sensul obţinut pentru $M'_{i_{G_9}}$ este cel dat de acele de ceasornic.

La fel se procedează şi cu celelalte momente.

Ecuaţia de momente în raport cu polul p' este:

$$F_{i_{G_2}} \cdot h_{i_2} + F_{i_{G_4}} \cdot h_{i_4} - F_3 \cdot \overline{b'p'} - M'_{i_{G_4}} + M'_{i_{G_9}} + F_{i_{G_9}} \cdot h_{i_9} + F_{i_{G_{10}}} \cdot h_{i_{10}} - M'_{i_{G_6}} -$$

$$- F_{i_{G_{11}}} \cdot h_{i_{11}} - M'_{i_{G_{11}}} - F_{i_{G_8}} \cdot h_{i_8} - M'_{i_{G_8}} - F_{i_{G_5}} \cdot h_{i_5} + F_x \cdot \overline{p'a'} = 0.$$

Inlocuind valorile, rezultă:

$$F_x = \frac{2\,956\,754}{99{,}5} \cong 29\,500 \text{ kgf}.$$

Eroarea dintre cele două rezultate obţinute prin cele două metode este:

$$\frac{29\,500 - 29\,100}{29\,100} \times 100 = 1{,}3\%,$$

deci admisibilă pentru calculele ulterioare de rezistenţă.

Observaţie importantă.

In calculul cinetostatic al acestui mecanism nu s-a luat în consideraţie valoarea forţei de frecare dintre segmenţii discului sertarului cilindric şi cămaşa sertarului (frecarea dintre elementele *11* şi *12*) şi nici aceea dintre segmenţii pistonului şi cilindrul de abur (elementele *3* şi *12*), deoarece mărimea acestor frecări variază foarte mult, atît în funcţie de viteza de mers a locomotivei, cît şi în funcţie de presiunea aburului viu şi a celui de emisiune.

Aplicaţia are deci un caracter teoretic şi ea poate fi dusă mai departe în cadrul lucrărilor de seminar, admiţîndu-se valori corespunzătoare pentru forţa de frecare dintre segmenţi şi cămăşuială sau cilindru, cu care ocazie se vor introduce şi frecările din celelalte articulaţii.

La § 18.6, unde se face calculul analitic al forţelor de frecare şi al reacţiunilor la un mecanism bielă-manivelă, această forţă s-a notat cu $\mathfrak{S}''_{43}$.

Pentru determinarea acestei forţe la maşinile cu abur se recomandă pentru consultare lucrările docentului A. P. Novikov: „Analiza mişcării discului sertarului sistem Trofimov" (Extras din lucrările Institutului inginerilor de Cale Ferată „I. V. Stalin" din Moscova, culegerea 82/3, traducere Editura Căilor Ferate 1957 — pentru documentare) şi „Calculul forţei de frecare a segmenţilor sertarului pe cămăşuială" (Lucrările MEMIIT, fas. 62).

CAPITOLUL III

FRECAREA IN MECANISME

§ 14. INTRODUCERE, CLASIFICARE ŞI DEFINIŢII

In paragrafele precedente calculul cinetostatic s-a făcut considerînd contactul dintre suprafeţele, liniile şi punctele cuplelor cinematice ale elementelor mecanismului în aşa fel, încît nu a apărut nici o rezistenţă datorită mişcării relative dintre elementele cuplelor cinematice.

Din această cauză reacţiunile din cuplele cinematice treceau prin centrul articulaţiilor sau erau perpendiculare pe ghidaj, în cazul cuplelor de translaţie,

sau aveau direcţia normalei comune la cele două curbe în contact, în cazul cuplelor cinematice superioare.

Analiza fenomenului real impune luarea în consideraţie şi a frecării care apare în cuplele cinematice, ca urmare a imperfecţiunii prelucrării suprafeţelor de contact ale acestora.

Studiul fenomenului frecării este foarte vast.

Rezultatele şi concluziile care trebuie să servească drept bază pentru calculul cinetostatic al unui mecanism sau al unei maşini sînt deduse, în marea majoritate a cazurilor, din experienţe şi cercetări practice.

Calculele care se fac se bazează pe o serie întreagă de ipoteze simplificatoare şi rezultatele trebuie neapărat verificate de experienţe.

In ţara noastră, s-a căutat în primul rînd să se precizeze noţiunile de bază şi definiţiile legate de fenomenul frecării printr-un standard de Stat (STAS 1 814-50).

Acest standard a dat definiţiile frecării sub diferitele ei forme.

Mai departe se vor enumera diferitele feluri de frecări cu definiţiile şi caracteristicile lor.

In cuplele cinematice inferioare apare frecarea de alunecare, care se poate defini ca forţa ce se opune mişcării sau tendinţei de alunecare a două suprafeţe una asupra celeilalte. Această forţă este situată în planul tangent comun în punctele de contact ale suprafeţelor şi reprezintă componenta tangenţială a rezultantei acţiunilor de contact dintre cele două elemente.

In cuplele cinematice superioare apar frecarea de rostogolire şi frecarea de rostogolire cu alunecare, ca urmare a deplasării relative a liniilor sau a punctelor de contact ale celer două elemente.

Legile de care depind forţele frecării de alunecare sînt funcţie de starea suprafeţelor în contact, care se deplasează una faţă de alta.

Din acest punct de vedere frecarea de alunecare se poate clasifica în mai multe feluri de frecare, după cum urmează:

a) frecarea uscată de alunecare, cînd suprafeţele celor două corpuri vin în contact direct prin asperităţile datorite imperfecţiunii prelucrării lor (fig. I.65);

b) frecarea lichidă, cînd stratul de lubrifiant este atît de gros, încît asperităţile suprafeţelor nu pot veni în contact direct (fig. I.66)

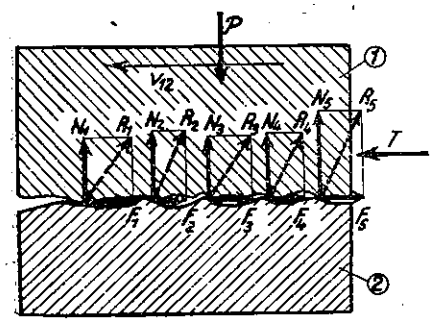


Fig. I.65. Reprezentarea mărită a două suprafeţe în timpul frecării uscate la alunecare.

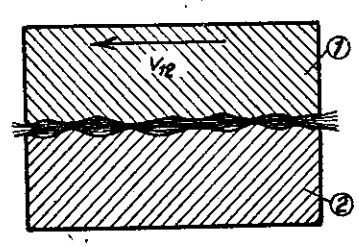


Fig. I.66. Reprezentarea mărită a două suprafeţe în timpul frecării lichide.

c) frecările semiuscată şi semilichidă, denumite uneori sub numele comun de frecare mixtă, sînt o situaţie intermediară între cele două frecări menţionate mai sus.

Astfel:

Frecarea semiuscată apare atunci cînd între suprafeţele celor două elemente există un strat subţire de ulei, însă majoritatea proeminenţelor de pe aceste suprafeţe sînt încă în atingere, se deformează şi pînă la urmă se rodează. In acest caz, deci, legile frecării uscate, aşa cum au fost anunţate de Coulomb, se pot considera suficient de exacte (fig. I.67).

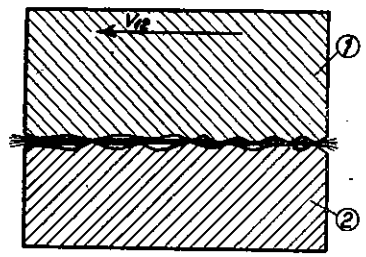


Fig. I.67. Reprezentarea mărită a două suprafeţe în cazul frecării semiuscate.

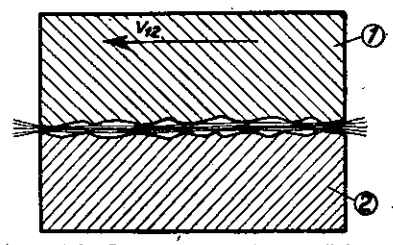


Fig. I.68. Reprezentarea mărită a două suprafeţe în cazul frecării semilichide.

Frecarea semilichidă apare atunci cînd stratul de lubrifiant sau de ulei (numit în mod curent „film de ulei" din cauza micii lui grosimi) are o grosime insuficientă, astfel încît proeminenţele mai mari ale suprafeţelor celor două elemente se ating. Cu toate acestea, în calcule pot fi luate în consideraţie cu suficientă exactitate legile frecării lichide (fig. I.68).

Nu există posibilitatea delimitării precise a celor două feluri de frecări citate mai sus, deoarece amîndouă apar cînd ungerea este incompletă, în cazul frecării semiuscate, predominînd asperităţile, în celălalt caz — stratul de lubrifiant.

Frecarea semiuscată apare la viteze mici, în special la pornirea maşinilor, iar cea semilichidă — în cazul ungerii defectuoase (la arborii oscilanţi acest fenomen poate apărea destul de des).

§ 15. FRECAREA USCATĂ DE ALUNECARE

S-a arătat că fenomenul frecării de alunecare, care apare între suprafeţele cuplelor cinematice, este foarte complex.

Numeroase experienţe şi cercetări care s-au făcut în această direcţie au căutat să găsească o funcţie care să lege între ele diferitele variabile (parametri) de care depinde fenomenul frecării uscate, şi anume: forţa normală dintre cele două suprafeţe, natura, starea şi calitatea prelucrării acestora, timpul cît durează fenomenul, viteza relativă dintre cele două suprafeţe, temperatura lor.

Pînă în prezent problema nu a putut fi rezolvată complet.

Cercetările au cuprins numai o parte din parametrii menţionaţi mai sus, astfel că astăzi cercetările sînt deschise în special în direcţia găsirii pe cale experimentală a legilor (curbelor) de variaţie a forţei de frecare în funcţie de viteză, de temperatură şi de presiunea normală.

Primele cercetări mai amănunţite au căutat să explice fenomenul de apariţie a forţei de frecare.

Dacă se priveşte fig. I.65 se poate deduce uşor că presiunea normală totală [1] care apasă asupra suprafeţei *2* se repartizează în mod neuniform pe punctele şi micile suprafeţe de contact ale asperităţilor celor două suprafeţe. Cu cît calitatea prelucrării este mai fină, cu atît şi aceste forţe vor diferi mai puţin unele de altele.

In momentul cînd asupra unuia dintre cele două elemente (de exemplu elementul *1*) se aplică o forţă T (presiunea normală $\mathfrak{P}$ rămînînd tot timpul constantă) care să-l deplaseze spre stînga, atunci în punctele de contact apar reacţiunile de contact $\sum \overline{R}_j$ ale elementului *1*; suma componentelor cuprinse în planele tangente paralele cu direcţia tendinţei de deplasare relativă a celor două suprafeţe, adică $\sum \overline{F}_{0j}$, va da o rezultantă care reprezintă componenta tangenţială a rezultantei reacţiunilor de contact $\sum \overline{R}_j$ şi este egală şi de sens contrar cu $\overline{T}$.

Dacă forţa T creşte, creşte evident şi $\sum \overline{F}_{0j}$. In acelaşi timp însă, se observă deplasări relative extrem de mici ale celor două suprafeţe, datorită deformaţiilor elastice ale proeminenţelor, deformaţii care trec apoi în domeniul plastic pe măsură ce forţa T creşte.

Fenomenul continuă pînă la un anumit moment, cînd proeminenţele sînt rupte şi începe alunecarea propriu-zisă dintre cele două suprafeţe.

Forţa de frecare $\overline{F}_0 = \sum \overline{F}_{0j} = \overline{T}$ din momentul imediat precedent al apariţiei alunecării se numeşte frecare de aderenţă.

După apariţia alunecării, cînd deci proeminenţele au fost în parte forfecate, forţa de frecare F este mai mică decît F_0 şi dacă forţa T continuă să rămînă constantă şi egală cu valoarea pe care a avut-o înainte de apariţia alunecării, atunci elementul *1* capătă o acceleraţie cu atît mai mare, cu cît $T-F$ este mai mare.

In cazul cînd se ajunge la situaţia $T-F=0$, elementul *1* rămîne în mişcare rectilinie şi uniformă.

In această fază a fenomenului, forţa de frecare se numeşte frecare de mişcare. Se poate deci scrie că, în cazul frecării de alunecare uscate, există totdeauna relaţia

$$F_0 > F. \qquad \text{(I.105)}$$

Frecarea de aderenţă este totdeauna mai mare decît frecarea de mişcare.

[1] In acest capitol forţele se vor nota cu $\mathfrak{P}$ (litera $\mathfrak{P}$ deosebită de P cu care, conform STAS 895-50, se notează puterea). Se va utiliza notaţia de mai sus în acest capitol şi mai departe pentru a se putea atribui frecării simbolul F.

Experienţele făcute au arătat că, la aceeaşi valoare $\mathfrak{N}$ a presiunii normale, valoarea lui F_0 depinde de natura, de starea şi de calitatea prelucrării suprafeţelor.

Experienţele nu s-au dus însă mai departe, astfel încît să se vadă în ce proporţie influenţează pe F_0 fiecare dintre cei trei parametri de mai sus.

Unele experienţe interesante au fost făcute de Verhovski, care a studiat variaţia lui $F_0 = T$ pentru $Q =$ const, în funcţie de deplasările relative ale suprafeţelor din cauza deformaţiilor elastice şi plastice ale proeminenţelor.

În fig. I.69 se dau (după Kojevnikov) diagramele de variaţie ale lui F_0 în funcţie de deplasările în microni (μ) ale celor două suprafeţe. Curba *1* reprezintă deplasarea totală, în timp ce curba *2* reprezintă deplasarea permanentă care rămîne între cele două suprafeţe după încetarea acţiunii forţei $T = F_0$.

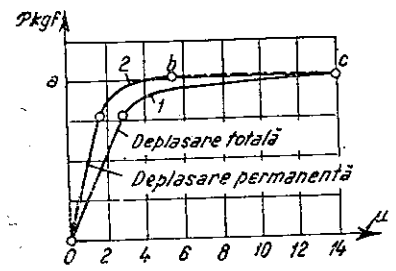


Fig. I.69. Curbele de variaţie ale frecării de aderenţă F_0 în funcţie de deformaţiile proeminenţelor celor două suprafeţe.

Astfel, pentru valoarea extremă a forţei $T = F_0$, deplasarea permanentă datorită deformaţiilor plastice este *ab*, în timp ce deformaţia elastică este *bc*. Cu alte cuvinte, la încetarea acţiunii forţei T, deplasarea relativă a celor două suprafeţe faţă de poziţia iniţială este *ab*.

Unele ipoteze susţin că fenomenul frecării de alunecare are o origine mai adîncă decît simplul fenomen al „angrenării" celor două suprafeţe din cauza asperităţilor. Aceste teorii susţin că, afară de acţiunea mecanică reciprocă dintre asperităţi, frecarea de aderenţă se datoreşte şi atracţiilor moleculare dintre moleculele celor două suprafeţe în contact.

Experienţe făcute pentru studiul frecării uscate de alunecare au fost foarte numeroase. Ele s-au făcut pentru diferite materiale şi pentru diferite presiuni normale, determinîndu-se valoarea unui raport, admis astăzi în mod universal în toate calculele tehnice.

Acesta este raportul dintre reacţiunea normală $N = |\mathfrak{N}|$ şi frecarea de mişcare F, adică

$$\mu = \frac{F}{N}, \tag{I.106}$$

şi se numeşte coeficient de frecare.

Frecarea de mişcare F va fi dată astfel de formula

$$F = \mu N. \tag{I.107}$$

Deoarece experienţele au dovedit că frecarea de aderenţă F_0 este mai mare decît cea de mişcare, aceste două forţe au fost legate între ele prin relaţia

$$F_0 = A + F,$$

sau, ţinînd seamă de (I.107),

$$F_0 = A + \mu N. \tag{I.108}$$

Mai sus A reprezintă o constantă care ţine seamă, la fiecare material în parte, de starea şi de calitatea prelucrării suprafeţelor în contact.

Dacă se împarte cu N, formula (I.108) devine

$$\frac{F_0}{N} = \frac{A}{N} + \mu$$

sau

$$\mu_0 = \frac{A}{N} + \mu, \tag{I.109}$$

în care μ_0 este coeficientul frecării de aderenţă.

Formulele (I.106) şi (I.109) reprezintă într-o formă simplificată legile frecării uscate de alunecare.

Legile acestei frecări s-au enunţat în funcţie de coeficienţii de frecare μ_0 şi μ. Astfel:

a) coeficientul de frecare μ depinde de natura, de starea şi de calitatea prelucrării suprafeţelor în contact;

b) atît frecarea de aderenţă F_0, cît şi cea de mişcare F, sînt proporţionale cu reacţiunea normală N [formulele (I.107) şi (I.108)];

c) coeficientul de frecare μ nu depinde de mărimea suprafeţelor în contact [formula (I.106)];

d) frecarea de aderenţă este mai mare decît frecarea de mişcare [formula (I.105)], deci şi coeficientul frecării de aderenţă este mai mare decît coeficientul frecării de mişcare [formula (I.109)];

e) coeficientul frecării de aderenţă μ_0 creşte cu creşterea timpului de contact dintre cele două suprafeţe înainte ca cele două suprafeţe să înceapă deplasarea relativă;

f) coeficientul frecării de aderenţă μ_0 depinde de reacţiunea normală N;

g) coeficientul frecării de mişcare μ nu depinde aproape de loc de viteza relativă a celor două suprafeţe în frecare şi nici de temperatura lor.

Legile enunţate mai sus sînt valabile numai pentru anumite materiale şi în anumite condiţii.

Legea de variaţie a lui μ_0 în funcţie de N este — după cum se poate uşor vedea — o hiperbolă echilateră (fig. I.70), μ_0 avînd valoarea teoretic minimă şi egală cu μ atunci cînd reacţiunea normală $N = \infty$.

Proporţionalitatea dintre frecările F_0 şi F şi reacţiunea normală N este reprezentată grafic prin dreptele *1*, respectiv *2*, din fig. I.71.

Coeficientul de frecare μ variază însă cu presiunea normală. Numeroasele experienţe care s-au făcut în această direcţie au arătat toate că μ creşte cu

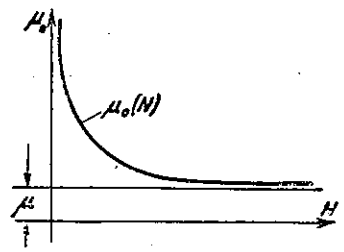


Fig. I.70. Variaţia lui $\mu_0(N)$.

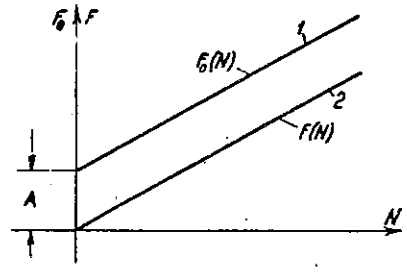


Fig. I.71. Variaţia lui $F_0(N)$ şi $F(N)$.

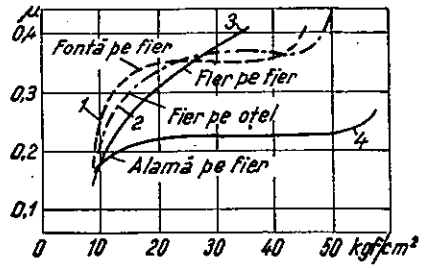


Fig. I.72. Variația lui μ în funcție de presiunea specifică dintre suprafețe.

creșterea lui N, legea după care crește variind însă de la material la material.

In fig. I.72 se arată (după Kojevnikov) cîteva curbe de variație ale lui μ în funcție de presiunea spècifică p dintre cele două suprafețe.

Cea mai uniformă creștere a lui μ are loc la fier pe fier (curba *3*); la celelalte materiale există o regiune destul de mare — cum este la curba *4* (alamă pe fier) — unde μ este constant și egal cu circa 0,23, în intervalul $p=20...45$ kgf/cm².

Cercetări foarte numeroase s-au făcut însă pentru găsirea influenței vitezei relative dintre suprafețe asupra coeficientului frecării de mișcare μ.

Experiențele lui Ch. Iakob au fost făcute cu viteze mici de alunecare, de ordinul mm/s. Rezultatele experiențelor sînt redate în fig. I.73.

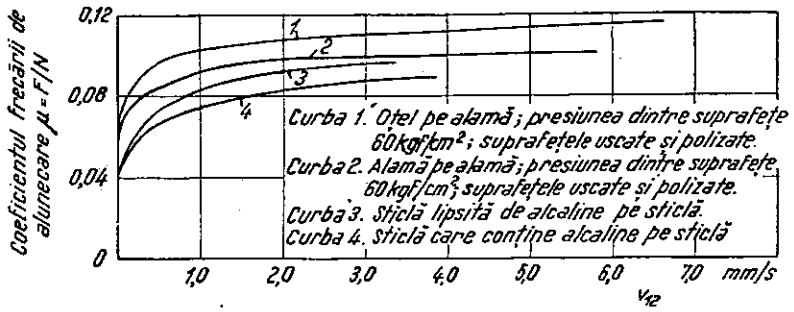


Fig. I.73. Curbele de variație ale lui $\mu(v)$ după Iakob.

Ceea ce interesează în aceste cazuri sînt valoarea maximă a lui μ pentru viteza de alunecare și presiunea specifică, găsite cu ocazia experiențelor.

In tabela I.1 se dau cîteva rezultate obținute de diferiți cercetători.

Forma generală a curbei de variație a lui μ în funcție de v este redată în fig. I.74, iar în fig. I.75 sînt redate porțiunile pînă la minimul lui μ pentru diferite metale.

Toate aceste experiențe nu țin seamă însă de variația temperaturii suprafețelor în

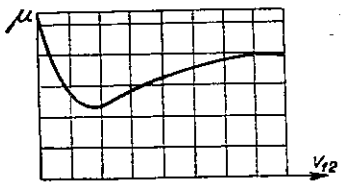


Fig. I.74. Forma generală a curbei $\mu(v)$.

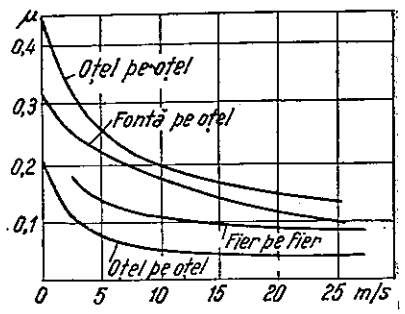


Fig. I.75. Curbele de variație ale lui μ în funcție de viteza relativă dintre suprafețe pentru diferite metale

contact, fenomen de o deosebită importanță într-o numeroasă serie de mașini și mecanisme.

Cercetările făcute au arătat că μ scade cu creșterea temperaturii pînă în jurul lui $t=150...200$°C, după care începe să crească din nou.

In fig. I.76 sînt redate rezultatele experiențelor efectuate cu diferite feluri de sticlă. Pentru metale nu s-au obținut pînă în prezent rezultate concludente. Se poate considera însă că μ scade cu creșterea temperaturii.

In calculele teoretice care se vor face mai departe, toate influențele pe care le au temperatura, presiunea specifică și viteza de alunecare se vor neglija, considerîndu-se că frecarea uscată de alunecare se conduce numai după legile clasice enunțate de Coulomb și Antimon.

In tabela I.2 se dau cele mai utilizate și mai potrivite valori pentru calculele teoretice și practice, în care μ este dat la aceleași materiale pentru diferite stări (Manualul inginerului, vol. 2, p. 50).

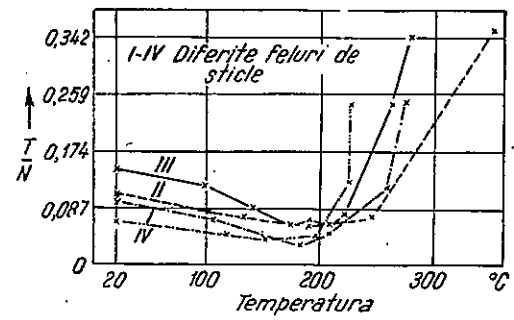


Fig. I.76. Curbele de variație ale lui μ în funcție de temperatură.

Tabela I.1. Influența presiunii specifice și a vitezei de alunecare asupra coeficientului de frecare

Materiale	μ_{max}	Viteza de alunecare pentru μ_{max} cm/s	Presiunea specifică p kgf/cm²
Alamă pe alamă	0,1025	0,3	60
Alamă pe alamă	0,1085	0,2	0,0035
Oțel pe oțel	0,115	0,5	60
Oțel pe oțel	0,1	0,12	—
Piele pe oțel	0,84	107	0,285
Piele pe oțel	0,28	800	—

Tabela I.2 Coeficienții de frecare

Materiale	μ	Starea suprafețelor
Oțel pe oțel	0,07 0,15 0,22—0,2 5	Unse cu seu Unse cu ulei Uscate
Bronz pe bronz	0,20	Unse puțin
Bronz pe fontă	0 21	Unse puțin
Fontă pe fontă sau pe bronz	0,15 0,31	Unse puțin cu apă
Oțel pe gheață	0,014	
Curea de piele pe tobă (tambur) de stejar	0,27	Uscat, cureaua || fibrele
Curea de piele pe fontă plată	0,28—0,6	

§ 16. FRECAREA USCATĂ ŞI SEMIUSCATĂ ÎN CUPLELE CINEMATICE DE TRANSLAŢIE

16.1. Con de frecare

Conform principiului acţiunii şi reacţiunii, forţa de frecare $F=\sum_1^n F_j$ are sens opus vitezei relative faţă de suprafaţa celuilalt element.

Acest fapt are o importanţă deosebită în calculul cinetostatic al unui mecanism în care se ia în consideraţie şi frecarea, deoarece permite determinarea imediată a sensului forţei de frecare cînd se cunoaşte din planul vitezelor sensul vitezei relative.

Se vor lua două elemente legate între ele printr-o cuplă cinematică de translaţie (fig. I.77): piatra de culisă şi culisa, sau capul de cruce şi glisiera (liniarul de ghid). Pentru simplificare se va considera că primul se mişcă fără acceleraţie pe glisieră. Rezultanta tuturor forţelor care acţionează asupra capului de cruce inclusiv greutatea proprie este $\mathfrak{R}$, care face cu normala pe ghidaj unghiul α. Se descompune $\mathfrak{R}$ după normala pe ghidaj $\mathfrak{R}''$ şi după direcţia acestuia $\mathfrak{R}'$.

Conform principiului acţiunii şi reacţiunii, $|\mathfrak{R}''|=N$ este reacţiunea ghidajului asupra pietrei de culisă.

$\mathfrak{R}$ va căuta să deplaseze capul de cruce în direcţia de acţiune (săgeata 1).

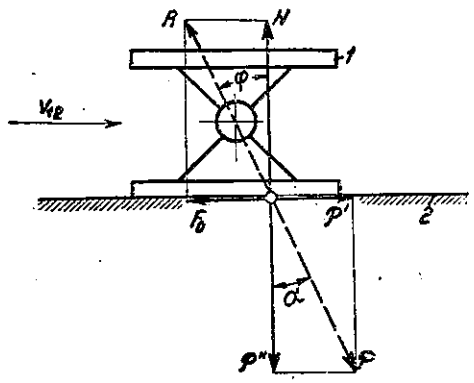


Fig. I.77. Unghiul de frecare la cupla de translaţie.

Tendinţei de alunecare imprimată capului de cruce de $\mathfrak{R}'$ i se opune frecarea de aderenţă F_0, dirijată în sens invers lui $\mathfrak{R}'$, şi proporţională cu reacţiunea normală $N=|\mathfrak{R}''|$, adică

$$F_0=\mu_0 N=\mu_0\mathfrak{R}''=\mu_0\mathfrak{R}\cos\alpha.$$

In momentul cînd capul de cruce se pune în mişcare are loc egalitatea evidentă

$$\mathfrak{R}'=F, \qquad (I.110)$$

sau, cum

$$\mathfrak{R}'=\mathfrak{R}\sin\alpha \quad \text{şi} \quad F=\mu N=\mu\mathfrak{R}\cos\alpha,$$

înlocuind, se obţine

$$\mathfrak{R}\sin\alpha=\mu\mathfrak{R}\cos\alpha,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\alpha=\mu=\operatorname{tg}\varphi, \qquad (I.111)$$

în care φ este unghiul de frecare.

Capul de cruce se deplasează fără acceleraţie pe ghidaj. Forţa de frecare F este în acest caz egală şi de sens contrar cu componenta $\mathfrak{R}'$ după direcţia de deplasare a rezultantei $\mathfrak{R}$ a tuturor forţelor care acţionează asupra capului de cruce.

Dacă

$$\mathfrak{R}'>F \qquad \text{(fig. I.78, } a\text{)}$$

atunci

$$\operatorname{tg}\alpha>\operatorname{tg}\varphi \qquad (I.112)$$

şi capul de cruce se va deplasa cu acceleraţie pe ghidaj (glisieră).

Dacă

$$\mathfrak{R}'<F \qquad \text{(fig. I.78, } b\text{)},$$

atunci

$$\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\varphi \qquad (I.113)$$

şi capul de cruce va rămîne în stare de repaus.

Forţa de frecare F şi reacţiunea normală N dau reacţiunea totală R asupra capului de cruce, care face cu normala unghiul de frecare φ.

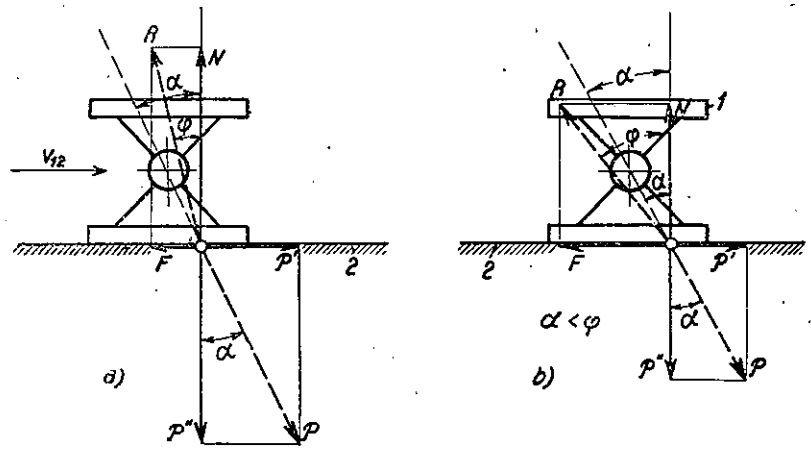


Fig. I.78. Poziţia rezultantei $\mathfrak{R}$ faţă de unghiul de frecare, cînd capul de cruce se mişcă sau stă pe loc.

Se vede deci destul de clar că, atunci cînd direcţia rezultantei $\mathfrak{R}$ se află în interiorul unghiului φ de frecare, capul de cruce este în repaus (fig. I.78, *b*), iar cînd iese din unghiul de frecare, se mişcă cu acceleraţie (fig. I.78, *b*).

Dacă $\alpha=\varphi$, adică direcţia rezultantei se află chiar pe unghiul de frecare, atunci capul de cruce se poate afla în stare de repaus sau de mişcare, după starea în care se afla înainte ca α să fie egal cu φ. Dacă, deci, el se afla în mişcare, atunci va continua să rămînă mai departe în această stare, cînd α devine egal cu φ.

Dacă se presupune că capul de cruce se află pe un plan şi că deci se poate mişca în orice direcţie, se obţin unghiuri de frecare în fiecare dintre planele direcţiilor de mişcare (fig. I.79), unghiuri care pot fi diferite, în cazul cînd materialul suprafeţelor în mişcare nu este omogen.

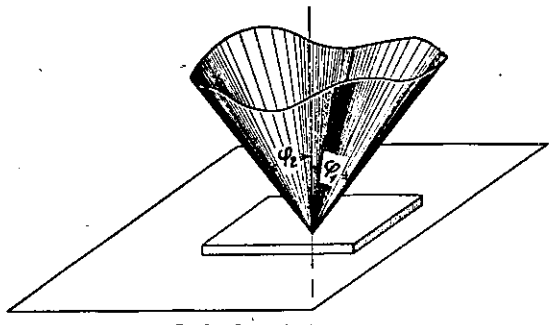


Fig. I.79. Conul de frecare.

Toate aceste unghiuri formează suprafaţa laterală a unui con, cu vîrful în punctul de intersecţie a normalei cu planul ghidajului.

Suprafaţa obţinută astfel se numeşte con de frecare. Pentru suprafeţe omogene (cazul metalelor din care sînt formate elementele cuplelor cinematice), conul este circular.

Generatoarele conului de frecare sînt astfel direcţiile limită ale rezultantelor care acţionează asupra capului de cruce corespunzător diferitelor direcţii de mişcare ale acesteia.

16.2. Ghidajul înclinat. Cazul particular al cuplei-şurub

Piatra de culisă se aşază acum pe un ghidaj înclinat, care face cu orizontala un unghi α.

Rezultanta $\mathfrak{R}$ a tuturor forţelor care acţionează asupra pietrei de culisă (exclusiv greutatea G a acesteia) face unghiul β cu normala la ghidaj.

La mişcarea uniformă a pietrei se deosebesc două cazuri:

a) piatra urcă pe ghidajul înclinat (fig. I.80, *a*);
b) piatra coboară pe ghidajul înclinat (fig. I.80, *c*).

Cazul a) *Piatra urcă pe ghidajul înclinat.*

Forţa $\mathfrak{R}$, greutatea G şi reacţiunea R a ghidajului asupra pietrei de culisă sînt în echilibru. In consecinţă, formează un poligon închis (fig. I.80, *b*).

Componentele lui R — cea după direcţia ghidajului şi cea perpendiculară pe el — rezultă imediat din poligonul forţelor.

Reacţiunea normală este

$$N=G\cos\alpha-\mathfrak{R}\cos\beta.$$

Forţa de frecare:

$$F=(G\cos\alpha-\mathfrak{R}\cos\beta)\operatorname{tg}\varphi.$$

Pentru echilibru se pot scrie imediat proiecţiile poligonului forţelor pe direcţia ghidajului:

$$\mathfrak{R}\sin\beta=G\sin\alpha+(G\cos\alpha-\mathfrak{R}\cos\beta)\operatorname{tg}\varphi,$$

de unde

$$\mathfrak{R}=G\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha}{\sin\beta+\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha}.$$

Făcînd calculele, rezultă:

$$\mathfrak{R}=G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta+\varphi)}. \qquad (I.114)$$

Se observă că, pentru ca piatra să urce, trebuie ca reacţiunea totală R să cadă la stînga normalei nn pe ghidaj.

Cazul b) *Piatra coboară pe ghidajul înclinat* (fig. I.80, *c*).

Dacă forţa $\mathfrak{R}$ este mică, prin construirea poligonului forţelor (fig. I.80, *d*) se observă că reacţiunea R cade la dreapta normalei nn pe ghidaj, făcînd cu aceasta unghiul de frecare φ.

Scriind proiecţia pe ghidaj a poligonului forţelor

$$\overline{G}+\overline{\mathfrak{R}}+\overline{R}=0,$$

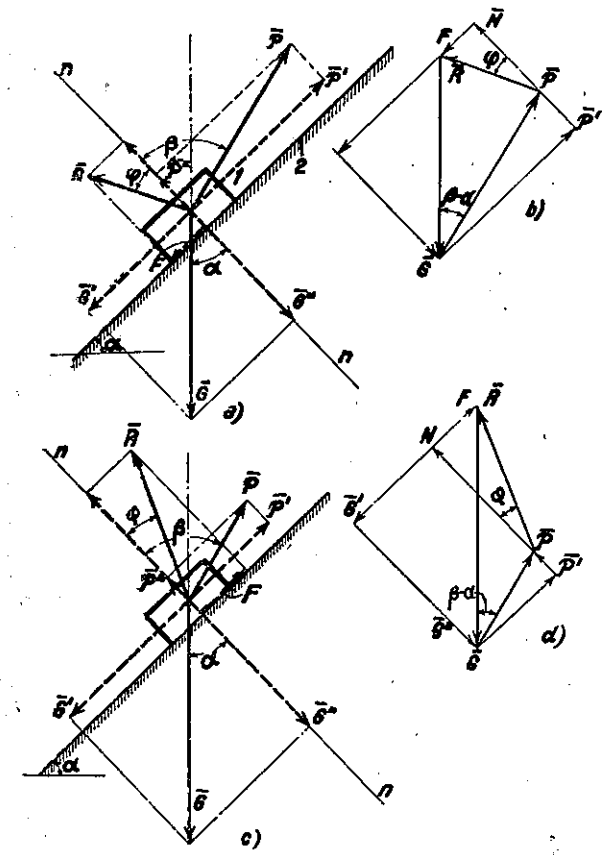


Fig. I.80. Echilibrul pietrei de culisă pe un ghidaj înclinat.

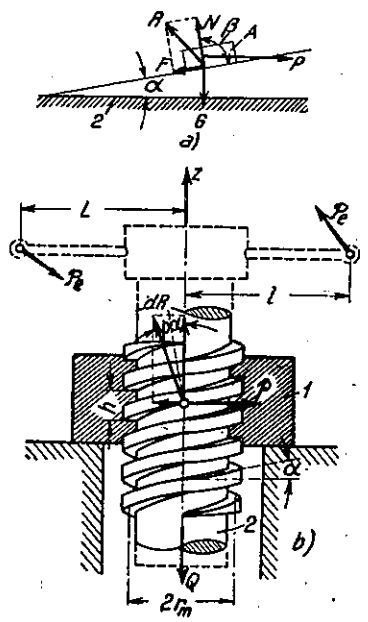


Fig. I.81. Şurubul cu flancul drept; caz particular al ghidajului înclinat.

rezultă:

$$G\sin\alpha-\mathfrak{R}\sin\beta-\mu(G\cos\alpha-\mathfrak{R}\cos\beta)=0,$$

de unde, făcînd calculele, se obţine:

$$\mathfrak{R}=G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}. \qquad (I.115)$$

Din formulele (I.114) şi (I.115) se deduce relaţia dintre $\mathfrak{R}$ şi G în cazul cuplei şurub-piuliţă, dacă se face $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$ (fig. I.81, *a*).

Astfel, înlocuind în formulele (I.114) şi (I.115) valoarea lui β, se obţine: în cazul ridicării piuliţei:

$$\mathfrak{Q}=G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}=G\operatorname{tg}(\alpha+\varphi); \qquad \text{(I.116)}$$

în cazul coborîrii piuliţei:

$$\mathfrak{Q}=G\operatorname{tg}(\alpha-\varphi). \qquad \text{(I.117)}$$

In fig. I.81, *b* este schiţat cazul înşurubării piuliţei *1* sau rotirii în piuliţa *1*, rotire care imprimă şurubului *2* o mişcare elicoidală în lungul axei *z*, cum se întîmplă în cazul vinciurilor pentru ridicat piese.

Forţa $\mathfrak{Q}_e$, care roteşte şurubul, acţionează la extremitatea unei manivele de lungime *l* faţă de axa *z*.

Relaţia dintre $\mathfrak{Q}_e$ şi $\mathfrak{Q}$ se obţine luînd momentele în raport cu axa *z*:

$$M=\mathfrak{Q}_e l=\mathfrak{Q}r_m=Gr_m\operatorname{tg}(\alpha+\varphi);$$

deci

$$\mathfrak{Q}_e=G\frac{r_m}{l}\operatorname{tg}(\alpha+\varphi), \qquad \text{(I.118)}$$

în care r_m este raza medie a filetului.

In cazul coborîrii sarcinii *G*, formula (I.118) devine

$$\mathfrak{Q}_e=G\frac{r_m}{l}\operatorname{tg}(\alpha-\varphi). \qquad \text{(I.119)}$$

Dacă filetul nu este drept, ci flancurile lui fac un unghi β (fig. I.82, *a*) cu o dreaptă perpendiculară pe axa şurubului, atunci formulele (I.118) şi (I.119) devin:

$$\mathfrak{Q}_e=G\frac{r_m}{l}\operatorname{tg}(\alpha+\varphi); \qquad \text{(I.120)}$$

$$\mathfrak{Q}_e=G\frac{r_m}{l}\operatorname{tg}(\alpha-\varphi), \qquad \text{(I.121)}$$

unde

$$\operatorname{tg}\varphi'=\mu'=\frac{\mu}{\cos\frac{\beta}{2}}. \qquad \text{(I.122)}$$

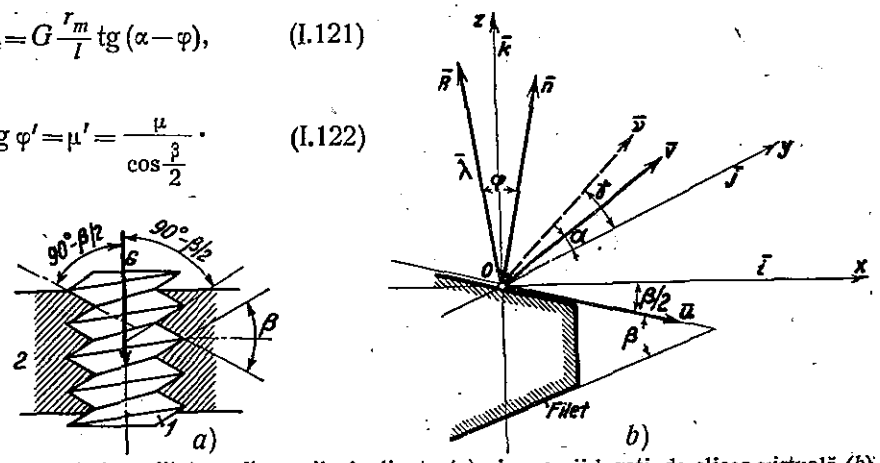


Fig. I.82. Şurubul cu filet cu flancurile înclinate (*a*) şi versorii legaţi de elicea virtuală (*b*).

Expresia mai exactă a unghiului φ' este dată de formula

$$\operatorname{tg}\varphi'=\mu'=\frac{\mu}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}. \qquad \text{(I.122')}$$

Determinarea acestei expresii se poate face şi printr-un calcul vectorial[1]), considerînd că drumul parcurs de reacţiunea $\bar{R}$ a şurubului se face pe o elice virtuală de înclinare $\alpha\pm\varphi$, după cum piuliţa urcă (+) sau coboară (−), astfel încît reacţiunea să fie totdeauna perpendiculară pe drumul parcurs şi deci lucrul său mecanic să fie nul.

Pentru găsirea relaţiei (I.122') se ia un sistem de axe de versori $\bar{u}$, $\bar{v}$ şi $\bar{n}$ (fig. I.82, *b*), după cum urmează:

$\bar{u}$ — dirijat după flancul filetului, cuprins în planul xOz şi face unghiul $\beta/2$ cu axa x;

$\bar{v}$ — dirijat după tangenta la elicea medie de înclinare, cuprins în planul yOz şi face unghiul α cu axa Oy;

$\bar{n}$ — perpendicular pe planul format de $\bar{u}$ şi $\bar{v}$.

Din fig. I.82, *b* rezultă imediat:

$$\bar{u}=\bar{i}\cos\frac{\beta}{2}-\bar{k}\sin\frac{\beta}{2};$$

$$\bar{v}=\bar{j}\cos\alpha+\bar{k}\sin\alpha; \qquad \text{a)}$$

$$\bar{n}=\frac{\bar{u}\times\bar{v}}{|\bar{u}\times\bar{v}|}.$$

Versorul $\bar{\lambda}$ al reacţiunii $\bar{R}$, situat în planul $\bar{v}$, $\bar{n}$, face unghiul $\pm\varphi$ (după caz) cu versorul $\bar{n}$.

In cazul cînd unghiul este $+\varphi$ (conform fig. I.82, *b*), expresia lui $\bar{\lambda}$ este:

$$\bar{\lambda}=\bar{n}\cos\varphi-\bar{v}\sin\varphi. \qquad \text{b)}$$

Versorul $\bar{\nu}$ al elicei virtuale, versor conţinut în planul yOz şi făcînd unghiul γ cu axa Oy are ca expresie:

$$\bar{\nu}=\bar{j}\cos\gamma+\bar{k}\sin\gamma. \qquad \text{c)}$$

Condiţia de perpendicularitate dintre $\bar{\lambda}$ şi $\bar{\nu}$ se scrie vectorial sub forma

$$\bar{\lambda}\cdot\bar{\nu}=0. \qquad \text{d)}$$

Inlocuind în b) valorile lui $\bar{n}$ şi $\bar{v}$, rezultă:

$$\bar{\lambda}=\frac{\bar{u}\times\bar{v}}{|\bar{u}\times\bar{v}|}\cos\varphi-(\bar{j}\cos\alpha+\bar{k}\sin\alpha)\sin\varphi. \qquad \text{e)}$$

[1]) V. Manafu şi C. Zeveleanu. Asupra mecanismului cu şurub, Comunicare la sesiunea ştiinţifică a Institutului alimentar, 1955.

Dar:

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos\frac{\beta}{2} & 0 & -\sin\frac{\beta}{2} \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}=\bar{i}\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}-\bar{j}\sin\alpha\cos\frac{\beta}{2}+\bar{k}\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}.$$

Modulul acestui produs este evident:

$$|\bar{u}\times\bar{v}|=\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}=$$

$$=\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}},$$

astfel că e) devine:

$$\bar{\lambda}=\frac{\bar{i}\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}-\bar{j}\sin\alpha\cos\frac{\beta}{2}+\bar{k}\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}}\cos\varphi-(\bar{j}\cos\alpha+\bar{k}\sin\alpha)\sin\varphi. \quad \text{f)}$$

Inlocuind expresiile lui $\bar{v}$ şi $\bar{\lambda}$ din c), respectiv f), în d) şi scoţînd valoarea lui $\operatorname{tg}\gamma$, se obţine:

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\frac{\mu}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}}{1-\operatorname{tg}\alpha\frac{\mu}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}}=\operatorname{tg}(\alpha+\varphi'),$$

unde $\operatorname{tg}\varphi'$ este dat tocmai de formula (I.122′).

Pentru valori mici ale lui α se poate neglija termenul $\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}$, astfel că în acest caz formula (I.122′) devine identică cu (I.122).

16.3. Randamentul şurubului

Randamentul şurubului, care, după cum s-a arătat, este un caz particular al ghidajului înclinat, se deduce uşor din studiul formulelor (I.120) şi (I.121).

In adevăr, dacă nu ar exista forţa de frecare, atunci forţa motoare necesară învingerii rezistenţei tehnologice G va fi:

$$\mathfrak{Q}_{e_0}=G\frac{r_m}{l}\operatorname{tg}\alpha. \qquad \text{(I.123)}$$

Randamentul mecanismului format dintr-o astfel de cuplă este raportul dintre mărimea forţei $\mathfrak{Q}_{e_0}$ necesară ridicării sarcinii în lipsa frecării şi a aceeaşi

forţe $\mathfrak{Q}_e$ în cazul existenţei frecării, adică

$$\eta_m=\frac{\mathfrak{Q}_{e_0}}{\mathfrak{Q}_e}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi')}, \qquad \text{(I.124)}$$

iar la coborîre

$$\eta_m=\frac{\mathfrak{Q}_e}{\mathfrak{Q}_{e_0}}=\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\varphi')}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad \text{(I.125)}$$

Pentru cazul filetului dreptunghiular, randamentul are aceleaşi expresii ca mai sus, cu deosebirea că în loc de φ' intervine φ.

La capitolul I al părţii II se va relua problema determinării randamentului la mecanismele şi maşinile cele mai utilizate în tehnică.

16.4. Autofrînarea

Dacă $\varphi>\alpha$, atunci în formulele (I.117) şi (I.119) forţele $\mathfrak{Q}$, respectiv $\mathfrak{Q}_e$, trebuie să schimbe de sens pentru ca piatra de culisă sau piuliţa să coboare.

Rezultă că pe un ghidaj sau un filet al cărui unghi de înclinare cu orizontala este mai mic decît unghiul de frecare, piatra de culisă sau piuliţa nu coboară decît dacă este acţionată de o forţă $\mathfrak{Q}$ sau $\mathfrak{Q}_e$ suplimentară.

Această condiţie trebuie să fie îndeplinită la şuruburile de fixare, la şuruburile maşinilor de ridicat, la angrenajele şurub-melc-roată melcată.

Primele nu trebuie să se deşurubeze sub acţiunea forţei axiale G, iar şurubul-melc nu trebuie să se rotească sub acţiunea roţii melcate.

Unghiul de pantă se poate mări, fără să existe pericol de deşurubare, dacă flancurile filetului se fac înclinate, ceea ce rezultă imediat din examinarea formulei (I.121).

In adevăr, la acelaşi coeficient de frecare μ din formula de mai sus, rezultă că va exista autofrînare dacă $\varphi'>\varphi$.

Cum însă $\varphi'>\varphi$, rezultă că unghiul de înclinare α al elicei filetului se poate mări peste valoarea φ a unghiului de frecare, fără ca să existe pericolul deşurubării sau al inversării mişcării, ca în cazul filetelor cu flancul filetului drept.

La maşinile de ridicat prevăzute cu mecanisme în care unghiul de înclinare al filetului este mare (în jurul lui 18°), evitarea inversării sensului de mers se face cu ajutorul frînelor.

16.5. Frecarea în ghidajul tachetului unui mecanism cu camă. Evitarea autofrînării (autoblocării)

Frecările uscată şi semiuscată se întîlnesc mai des la mecanismele cu came cu mişcare de translaţie rectilinie a tachetului, la ascensoare şi la maşinile de găurit.

Se vor cerceta mai jos cazurile limită ale poziţiei tachetului dincolo de care tija tachetului se înţepeneşte în ghidaj.

a) *Cazul tachetului cu vîrf.* Situaţia normală a poziţiei tachetului cu vîrf faţă de profilul camei este reprezentată în fig. I.83. Pentru simplificare se va neglija frecarea dintre vîrful tachetului şi profilul camei.

In acest caz, forţa $\mathfrak{Q}$ care acţionează asupra tachetului este normală pe profil şi face cu direcţia de deplasare xx unghiul de presiune δ.

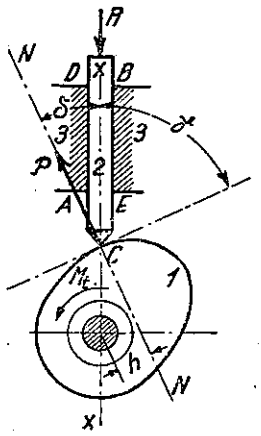


Fig. I.83. Forţele care acţionează asupra unui tachet cu vîrf.

Forţa $\mathfrak{Q}$ va da naştere reacţiunii ghidajului *3* asupra tijei tachetului *2*. Contactul dintre tijă şi ghidaj se face la început pe o suprafaţă, aşa cum este reprezentat de altfel în fig. I.83. Cu cît însă unghiul δ creşte, cu atît şi reacţiunea ghidajului asupra tijei creşte.

In situaţia din figură distribuţia acestei reacţiuni pe suprafaţa de contact este destul de complicată; în majoritatea cazurilor se consideră în calcul că are o distribuţie liniară.

La un moment dat însă, tija, sub influenţa forţei $\mathfrak{Q}$, ajunge într-o poziţie asemănătoare celei redate în fig. I.84, *a*, cînd teoretic contactul se face numai în punctele A şi B.

Dacă, după ce tija a ajuns în această poziţie, unghiul continuă să crească, se ajunge la un moment dat la înţepenirea tachetului în ghidaj, adică mecanismul se blochează.

Evident că în tehnică se caută ca la proiectarea mecanismelor să se evite aceste cazuri limită în timpul funcţionării.

La studiul mecanismelor cu came, se foloseşte relaţia dintre unghiul δ, coeficientul de frecare μ şi elementele geometrice ale mecanismului pentru evitarea apariţiei fenomenului de autoblocare. Această relaţie se foloseşte la proiectare.

In cele ce urmează se va determina atît această relaţie cît şi relaţia dintre forţele care acţionează asupra tachetului cu vîrf în cazul limită.

In fig. I.84, *b* este reprezentat ghidajul în contact cu tija numai în punctele A şi B pentru a evita desenarea poziţiei ca în fig. I.84, *a*.

Forţele care acţionează asupra tijei sînt următoarele:

$\mathfrak{Q}$ — acţiunea camei asupra tachetului;

T — reacţiunea arcului inclusiv forţele de inerţie;

N_1, N_2 — reacţiunile ghidajului asupra tijei în punctele A, respectiv B;

$F_1=\mu N_1$; $F_2=\mu N_2$ — frecările dintre ghidaj şi tijă, ale căror sensuri sînt inverse direcţiei de deplasare a tijei faţă de ghidaj.

Relaţia dintre $\overline{\mathfrak{Q}}$ şi $\overline{R}$ în cazul limită rezultă din echilibrul tijei tachetului sub acţiunea forţelor de mai sus.

Dacă coeficienţii de frecare μ sînt aceiaşi pentru cele două puncte A şi B, atunci rezultanta reacţiunilor

$$\overline{R}_1=\overline{F}_1+\overline{N}_1 \quad \text{şi} \quad \overline{R}_2=\overline{F}_2+\overline{N}_2$$

trece prin punctul C aflat la distanţa $\frac{l}{2\mu}$ de axa tijei tachetului.

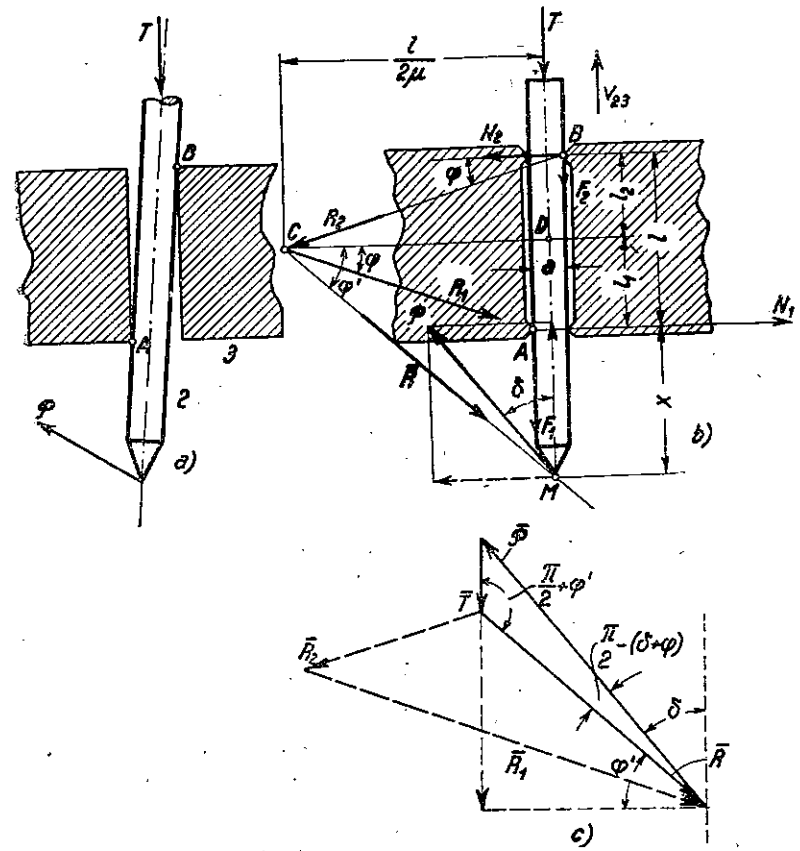


Fig. I.84. Mecanism cu camă cu tachet cu vîrf.

Pentru echilibru, rezultanta $\overline{R}=\overline{R}_1+\overline{R}_2$; $\overline{\mathfrak{Q}}$ şi $\overline{T}$ trebuie să fie concurente în punctul M.

Se cunoaşte astfel direcţia lui $\overline{R}$.

Construind poligonul forţelor (fig. 84, *c*) se găsesc $\overline{T}$ şi $\overline{R}$.

Unghiul φ' pe care rezultanta $\overline{R}$ îl face cu normala la ghidaj se numeşte şi unghi de frecare redus.

Din poligonul forţelor, scriindu-se legea sinusurilor, rezultă imediat raportul dintre $\overline{T}$ şi $\overline{\mathfrak{Q}}$ şi raportul dintre $\overline{R}$ şi $\overline{\mathfrak{Q}}$.

Astfel:

$$\frac{T}{\mathfrak{R}}=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\delta+\varphi')\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi'\right)}=\frac{\cos(\delta+\varphi')}{\cos\varphi'} \tag{I.126}$$

şi

$$\frac{R}{\mathfrak{R}}=\frac{\sin\delta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi'\right)}=\frac{\sin\delta}{\cos\varphi'}. \tag{I.127}$$

Valoarea unghiului φ' rezultă uşor din triunghiul CDM (fig. I.84, *b*):

$$\operatorname{tg}\varphi'=\frac{MD}{DC}=\frac{x+l_1}{\frac{l}{2\mu}}=\frac{2\mu}{l}\left(x+\frac{l}{2}-\frac{\mu a}{2}\right);$$

deci

$$\operatorname{tg}\varphi'=\left(1+\frac{2x}{l}-\frac{\mu a}{l}\right)\mu. \tag{I.128}$$

Ţinînd seamă de această relaţie, valoarea lui $\mathfrak{R}$ în funcţie de T este:

$$\mathfrak{R}=T\frac{\cos\varphi'}{\cos(\delta+\varphi')}=\frac{1}{\cos\delta-\operatorname{tg}\varphi'\sin\delta}. \tag{I.129}$$

Inlocuind valoarea lui $\operatorname{tg}\varphi'$ se obţine:

$$\mathfrak{R}=T\frac{1}{\cos\delta-\mu\left(1+\frac{2x}{l}-\frac{\mu a}{l}\right)\sin\delta}. \tag{I.130}$$

Pentru evitarea autoblocării trebuie ca totdeauna numitorul relaţiei (I.130) să fie pozitiv, deoarece în caz contrar ar trebui schimbat sensul lui T pentru a se putea menţine egalitatea. Ori, în acest caz, rezultă că pentru a putea deplasa tija în sensul săgeţii ar trebui ca şi rezistenţa T să acţioneze în acelaşi sens cu $\mathfrak{R}$.

De asemenea, cînd numitorul este egal cu zero, rezultă că este necesară o forţă $\mathfrak{R}=\infty$ pentru mişcarea tijei, ceea ce practic echivalează cu imposibilitatea funcţionării mecanismului.

Punînd condiţia ca mecanismul să nu se blocheze, rezultă imediat

$$\cos\delta-\mu\left(1+\frac{2x}{l}-\frac{\mu a}{l}\right)\sin\delta\geqq 0,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\delta<\frac{1}{1+\frac{2x}{l}-\frac{\mu a}{l}}. \tag{I.131}$$

b) *Cazul tachetului plat*. Situaţia în care este posibilă blocarea tijei în ghidaj (fig. I.85) se poate ivi — după cum s-a precizat şi la început — şi la ascensoare sau la coloanele maşinilor de găurit.

In poziţia din figură forţa $\mathfrak{R}$ acţionează paralel cu axa xx a tijei şi la distanţa d de aceasta. Tija tachetului, în mişcarea ei în sensul de acţiune a lui $\mathfrak{R}$, ajunge în contactul limită cu ghidajul în punctele A şi B.

Pentru funcţionare trebuie evident ca

$$\mathfrak{R}\geqq T+\mu N_1+\mu N_2. \tag{I.132}$$

Din ecuaţia de proiecţii pe direcţia perpendiculară pe xx rezultă

$$N_1=N_2=N.$$

Luînd momentele tuturor forţelor care acţionează asupra tijei în raport cu unul dintre punctele E sau F, rezultă

$$N=\mathfrak{R}\frac{d}{l}. \tag{I.133}$$

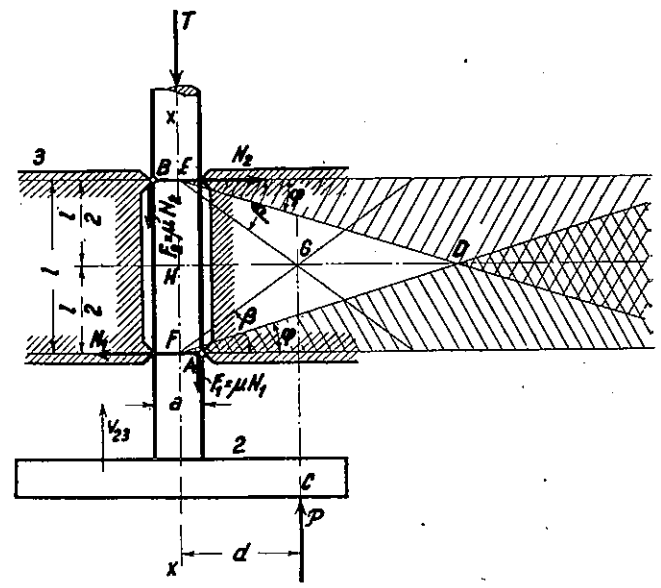


Fig. I.85. Tachet cu taler plat în poziţie de funcţionare.

Introducînd această valoare în (I.132) şi făcînd calculele, se obţine:

$$T\leqq\mathfrak{R}\left(1-2\mu\frac{d}{l}\right). \tag{I.134}$$

Pentru ca inegalitatea de mai sus să fie valabilă este necesar ca

$$1-2\mu\frac{d}{l}>0,$$

de unde rezultă

$$\mu<\frac{l}{2d}. \tag{I.135}$$

In figură se vede că

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{HE}{HG}=\frac{l}{2d}.$$

Dacă se înlocuieşte această valoare în formula (I.135) rezultă că, pentru ca tija să nu se blocheze în ghidaj, este necesar şi suficient ca

$$\operatorname{tg}\varphi<\operatorname{tg}\beta,$$

de unde

$$\varphi < \beta. \qquad (I.136)$$

De aici se trage următoarea concluzie:

In cazul cînd linia de acţiune (suportul) a forţei care acţionează asupra tijei

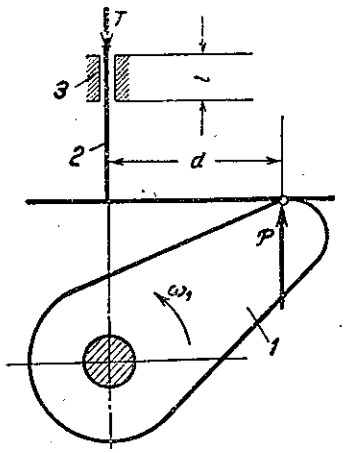


Fig. I.86. Poziţia extremă a camei faţă de talerul tachetului, pentru evitarea autoblocării.

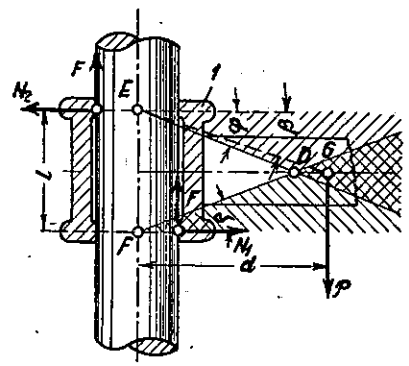


Fig. I.87. Poziţia centrului de greutate G al manşonului unei maşini de găurit, pentru evitarea alunecării.

tachetului trece prin interiorul triunghiului DEF format de cele două unghiuri de frecare, mişcarea tijei este posibilă.

In cazul cînd această direcţie trece prin zona comună celor două unghiuri de frecare corespunzătoare reacţiunilor normale N_1 şi N_2 (zona haşurată dublu), tija se blochează (autofrînează).

La mecanismele cu came la care profilul camei este dat se cunoaşte deci punctul cel mai depărtat al forţei $\mathfrak{Q}$ de axa geometrică a ghidajului (fig. I.86).

In acest caz se alege lungimea ghidajului în aşa fel, încît relaţia (I.135) să fie satisfăcută.

La maşinile de găurit radiale cu coloană, reacţiunea $\mathfrak{Q}$ a piesei de găurit nu trebuie să împingă în sus ghidajul pe coloană. In acest caz trebuie deci ca linia de acţiune a lui $\mathfrak{Q}$ să cadă în afara zonei EFD, adică să fie satisfăcută relaţia

$$\mu > \frac{l}{2d}. \qquad (I.137)$$

Deoarece d este dat, se determină lungimea ghidajului.

Condiţia care se mai impune acestor maşini este ca nici manşonul 1 al maşinii de găurit (fig. I.87) să nu alunece în jos sub influenţa greutăţii proprii $\mathfrak{Q}$. Centrul de greutate G al acesteia trebuie deci să se afle în afara triunghiului DEF, adică în porţiunea haşurată dublu.

16.6. Frecarea în cazul repartizării liniare a reacţiunii

Cazul limită descris la subparagraful precedent are loc atunci cînd între tijă şi ghidaj există un joc destul de mare, astfel încît să fie posibilă poziţia din fig. I.84, *a*.

In general însă, între ghidaj şi tijă sau piatră de culisă jocul nu poate fi prea mare, astfel că reacţiunea ghidajului va varia după o lege oarecare, presiunile specifice în diferitele puncte de contact fiind diferite şi depinzînd şi de proprietăţile mecanice ale materialului. Forma pe care o poate lua variaţia presiunii specifice, deci şi a reacţiunii, se arată în fig. I.88.

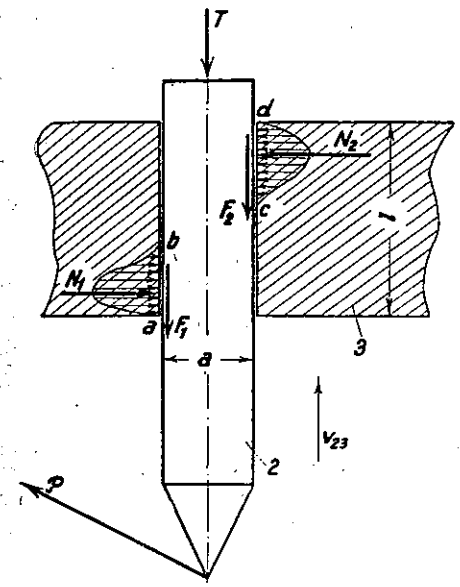


Fig. I.88. Repartizarea presiunii specifice într-un ghidaj fără joc.

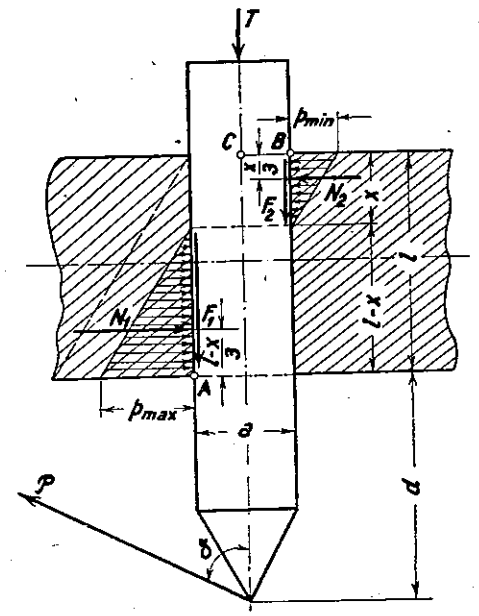


Fig. I.89. Repartizarea liniară a presiunii specifice într-un ghidaj cu joc.

Pe porţiunile ab de o parte şi cd de cealaltă parte a tijei 2 vor apărea, datorită reacţiunilor N_1 respectiv N_2, forţele de frecare $F_1 = \mu N_1$ şi $F_2 = \mu N_2$. Determinarea acestora este însă dificilă, din cauza imposibilităţii determinării exacte a legilor de variaţie a presiunilor specifice, care să permită calcularea rezultantelor N_1 şi N_2.

Calculele se simplifică dacă se consideră o variaţie liniară pentru presiunile specifice (fig. I.89).

In acest caz reacţiunile normale rezultante N_1 şi N_2 sînt aplicate la distanţele $\frac{l-x}{3}$, respectiv $\frac{x}{3}$, de marginile ghidajului, unde $l-x$ şi x sînt lungimile bazelor celor două triunghiuri, care reprezintă legile de variaţie a presiunilor.

Se pune problema ca, în ipoteza repartizării liniare a presiunilor p_{max} la marginea inferioară a ghidajului şi p_{min} la marginea superioară, să se găsească condiţia ca tija să nu se blocheze în ghidaj.

Din ecuaţia de proiecţie pe direcţia perpendiculară pe axa tijei, se obţine

$$N_1 = N_2 + \mathfrak{Q} \sin \delta. \tag{I.138}$$

Valorile lui N_1 şi N_2 se pot determina însă în funcţie de p_{max}, după cum se arată mai jos.

Din triunghiurile de repartizare a presiunii rezultă

$$\frac{p_{max}}{l-x} = \frac{p_{min}}{x},$$

de unde

$$p_{min} = p_{max} \frac{x}{l-x}.$$

Pe de altă parte, din aceleaşi triunghiuri se obţine:

$$N_1 = \frac{1}{2} p_{max} (l-x); \tag{I.139}$$

$$N_2 = \frac{1}{2} p_{min} x = \frac{1}{2} p_{max} \frac{x^2}{l-x}. \tag{I.140}$$

Înlocuind aceste valori în (I.138) şi făcînd calculele, se obţine

$$p_{max} = \frac{2\mathfrak{Q}}{l} \cdot \frac{l-x}{l-2x} \sin \delta. \tag{I.141}$$

Introducînd valoarea lui p_{max} din (I.141) în expresiile lui N_1 şi N_2, rezultă

$$N_1 = \frac{\mathfrak{Q}}{l} \frac{(l-x)^2}{l-2x} \sin \delta; \tag{I.142}$$

$$N_2 = \frac{\mathfrak{Q}}{l} \frac{x^2}{l-2x} \sin \delta. \tag{I.143}$$

Dacă acum se iau momentele tuturor forţelor care acţionează asupra tijei în raport cu punctul C de pe axa tijei, se obţine:

$$\mathfrak{Q}(d+l) \sin \delta - N_1 \left(l - \frac{l-x}{3}\right) - F_1 \frac{a}{2} + N_2 \frac{x}{3} + F_2 \frac{a}{2} = 0. \tag{I.144}$$

Ştiind că

$$F_1 = \mu N_1 = \mu \frac{\mathfrak{Q}}{l} \frac{(l-x)^2}{l-2x} \sin \delta \tag{I.145}$$

şi

$$F_2 = \mu N_2 = \mu \frac{\mathfrak{Q}}{l} \frac{x^2}{l-2x} \sin \delta, \tag{I.146}$$

înlocuind pe F_1, F_2, N_1 şi N_2 în (I.144) şi făcînd calculele, se obţine valoarea lui x:

$$x = \frac{l}{6} \frac{6d - 3\mu a + 2l}{2d - \mu a + l}. \tag{I.147}$$

Pentru $x=0$, adică în cazul repartizării presiunii numai pe o parte a ghidajului printr-o lege triunghiulară (desenată punctat), distanţa d de la mijlocul ghidajului a punctului de aplicaţie al forţei $\mathfrak{Q}$ rezultă din relaţia

$$6d - 3\mu a + 2l = 0,$$

de unde

$$d = \mu \frac{a}{2} - \frac{l}{3}. \tag{I.148}$$

Cum, în general, $\mu \frac{a}{2} < \frac{l}{3}$, rezultă că o repartizare triunghiulară a presiunii nu poate avea loc decît dacă forţa $\mathfrak{Q}$ acţionează în interiorul ghidajului, ceea ce se întîmplă în practică.

Dacă $d=\infty$, rezultă din (I.147) $x = \frac{l}{2}$, ceea ce este de asemenea imposibil în practică, deoarece dă $N_1 = N_2 = \infty$.

Între cele două valori limită ale lui d se întîlnesc cazurile din practică la maşini de găurit, mecanisme cu came etc.

Evitarea autofrînării (blocării tijei în ghidaj) se va realiza cînd va fi satisfăcută inegalitatea

$$\mathfrak{Q} \cos \delta \geqq F_1 + P_2 + T. \tag{I.149}$$

Înlocuind mai sus expresiile lui F_1 şi F_2 date de formulele (I.145) şi (I.146) şi făcînd calculele, se obţine relaţia

$$\mathfrak{Q} \geqq T \frac{1}{\cos \delta - \frac{l^2 - 2lx + 2x^2}{l(l-2x)} \mu \sin \delta}. \tag{I.150}$$

Relaţia de mai sus nu va fi valabilă decît dacă

$$\cos \delta - \frac{l^2 - 2lx + 2x^2}{l(l-2x)} \mu \sin \delta \geqq 0,$$

sau, făcînd calculele, se obţine condiţia pe care trebuie să o îndeplinească δ şi x pentru evitarea autofrînării:

$$\operatorname{ctg} \delta \geqq \mu \left[1 + \frac{2x^2}{l(l-2x)}\right]. \tag{I.151}$$

Expresia analitică a lui $\operatorname{ctg} \delta$ în funcţie de d este complicată, de aceea în cazul proiectării se deduce din (I.151) valoarea lui $x = f(\operatorname{ctg} \delta)$ după care, cu ajutorul lui (I.147), se găseşte $d = f(\operatorname{ctg} \delta)$.

§ 17. FRECAREA USCATĂ ŞI FRECAREA SEMIUSCATĂ ÎN CUPLELE DE ROTAŢIE

Frecarea în cuplele de rotaţie trebuie limitată astfel, încît suprafeţele elementelor în contact să se uzeze cît mai puţin şi deci lucrul mecanic consumat de forţele de frecare să fie minim.

Consumul minim de lucru mecanic de frecare se realizează printr-o frecare lichidă care, evident, depinde foarte mult de uzinarea precisă a suprafeţelor în contact, adică a lagărului şi fusului, a bulonului şi bucelei etc.

Dar acest lucru nu poate fi realizat totdeauna deoarece, oricît de perfectă ar fi ungerea, în majoritatea cazurilor fusurile şi pivoţii lucrează în anumite perioade de timp cu frecare semilichidă şi chiar semiuscată.

Este deci necesară studierea frecării uscate şi a frecării semiuscate în cuplele de rotaţie, care permite, prin rezultatele la care se ajunge, să se completeze calculul cinetostatic al unui mecanism în cazul cînd se ia în consideraţie şi frecarea.

17.1. Frecarea în fusurile cu joc. Cerc de frecare

Se va considera fusul *1* care se roteşte, fără frecare şi cu viteză unghiulară uniformă, în lagărul *2*.

Rezultanta $\mathfrak{Q}$ a tuturor forţelor exterioare care acţionează asupra fusului *1* trece, evident, în lipsa frecării, prin centrul de rotaţie O al acestuia (fig. I.90).

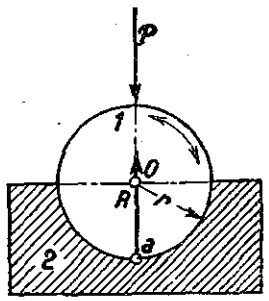


Fig. I.90. Poziţia fusului în cuzinet în lipsa frecării.

Reacţiunea R a lagărului *2*, egală şi de sens contrar cu $\mathfrak{Q}$, trece tot prin centrul de rotaţie O, independent de sensul lui ω. Linia de contact dintre fus şi lagăr (cuzinet) proiectată în a în fig. I.90 este şi linia de acţiune a reacţiunii R. Nu interesează, în cazul mişcării plane, repartizarea presiunii specifice pe linia de contact. Aceasta este o problemă care interesează dimensionarea fusului şi se tratează în cadrul studiului organelor de maşini.

Aici se ia în consideraţie numai rezultanta R a tuturor presiunilor specifice cu punctul de aplicaţie proiectat în a (v. fig. I.90).

Dacă acum între cele două suprafeţe se ia în consideraţie şi frecarea, fenomenul îşi modifică aspectul.

Se va considera în cele de mai jos cazul frecării uscate şi al celei semiuscate.

In momentul cînd fusul începe să se rotească sub acţiunea momentului de răsucire M_t, din cauza existenţei frecării între cele două suprafeţe, fusul va începe să se rostogolească peste lagăr (cuzinet) ajungînd în punctul a, unde era în contact la începutul mişcării, pînă în punctul b, cînd apare fenomenul de alunecare dintre cele două suprafeţe (fus şi cuzinet), (fig. I.91).

Problema care se pune este determinarea poziţiei punctului b. In fig. I.91 este desenată poziţia limită a fusului în momentul cînd alunecă pe cuzinet.

In această situaţie momentul de răsucire M_t este egal cu momentul forţei de frecare $M_F=F\cdot r$, unde r este raza fusului.

Dar forţa de frecare $F=\mu N$ nu este decît componenta după tangenta comună la cele două cercuri (ale fusului şi cuzinetului) a reacţiunii $R=|\mathfrak{Q}|$.

Reacţiunea normală $N=R\cos\varphi$ trece în acest caz prin centrele fusului şi cuzinetului (O_1 respectiv O_2).

Ecuaţia de echilibru a fusului sub acţiunea momentului M_t şi a reacţiunii cuzinetului se poate scrie, aplicînd ecuaţia de momente în raport cu centrul O_1.

Se obţine:

$$M_t=M_F. \qquad \text{(I.152)}$$

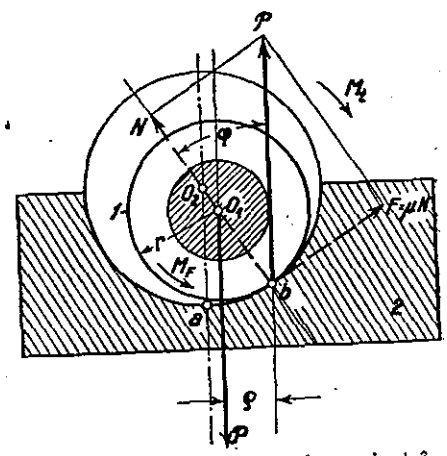


Fig. I.91. Poziţia fusului în cuzinet în cazul frecării uscate. Cercul de frecare.

Condiţia de funcţionare a fusului este îndeplinită cînd ecuaţia (I.152) devine

$$M_t\geqq M_F. \qquad \text{(I.153)}$$

Urmează acum să se determine expresia analitică a momentului de frecare.

S-a văzut că

$$M_F=F\cdot r, \qquad \text{(I.154)}$$

dar

$$f=\mu N=\mu R\cos\varphi=\mu\mathfrak{Q}\cos\varphi;$$

deoarece

$$\mu=\operatorname{tg}\varphi,$$

expresia lui F devine

$$F=\mathfrak{Q}\sin\varphi. \qquad \text{(I.155)}$$

Inlocuind valoarea de mai sus în (I.154), se obţine

$$M_F=\mathfrak{Q}r\sin\varphi.$$

Deoarece φ este în general mic, se poate considera cu suficientă aproximaţie că $\sin\varphi\cong\operatorname{tg}\varphi=\mu$, astfel că expresia momentului de frecare într-o cuplă de rotaţie devine

$$M_F=\mu r\mathfrak{Q}=\rho\mathfrak{Q}, \qquad \text{(I.156)}$$

unde s-a notat (v. fig. I.91):

$$\rho=\mu r. \qquad \text{(I.157)}$$

Direcţia reacţiunii $R=|\mathfrak{Q}|$ este astfel tangentă la un cerc cu raza $\rho=\mu r$, numit cerc de frecare.

Poziţia punctului b şi deci depărtarea reacţiunii $R=|\mathfrak{Q}|$ a cuzinetului depinde de valoarea coeficientului de frecare μ. Ea va fi cu atît mai depărtată, cu cît μ va fi mai mare.

Se poate enunța astfel următoarea regulă:

La cuplele cinematice de rotație, reacțiunea R trece prin centrul de rotație al fusului — în lipsa frecării — și este tangentă la cercul de frecare de rază $\rho=\mu r$ atunci cînd în calcul se ia în considerație frecarea.

Dacă reacțiunea totală R trece prin interiorul cercului de frecare, fusul nu se poate roti, deoarece componenta tangențială a lui R, adică $F=\mu N$, dă un moment mai mare decît M_t. Apare deci fenomenul de autofrînare.

17.2. Frecarea în fusurile nerodate (neuzate) fără joc

Calculul făcut la subparagraful precedent a presupus existența unui joc între fus și cuzinet, ceea ce a permis rostogolirea fusului pe cuzinet pînă în momentul apariției fenomenului de alunecare.

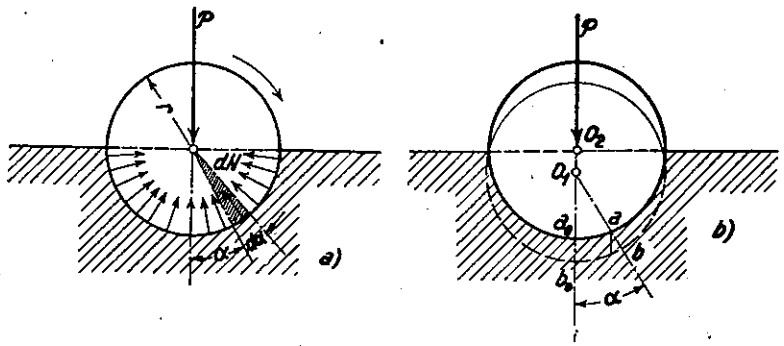


Fig. I.92. Repartizarea presiunii specifice între fus și cuzinet în cazul:
a — fusului nerodat; *b* — fusului rodat.

La fusurile noi, așa cum se prezintă la ieșirea mașinii din montaj, datorită prelucrării exacte a suprafețelor, contactul dintre fus și cuzinet nu mai are loc după o linie, ca în primul caz, ci după o suprafață (fig. I.92, *a*).

Prima problemă care se pune — înainte de determinarea expresiei analitice a momentului de frecare M_F — este alegerea expresiei analitice a repartizării presiunii specifice p dintre fus și cuzinet.

Expresia analitică se alege în funcție de condițiile de funcționare a fusului în cuzinet. Ipoteza care a fost adoptată în primul rînd a fost aceea a repartizării uniforme a presiunii pe proiecția $2rl$ a suprafeței de contact pe planul orizontal.

In acest caz

$$p=\frac{\mathfrak{Q}}{2rl}, \tag{I.158}$$

în care: $\mathfrak{Q}$ este rezultanta acțiunii fusului asupra cuzinetului;

r — raza fusului;

l — lungimea fusului.

In funcție de presiunea specifică, expresia momentului de frecare este

$$M'_F=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\,dF=2r\int_0^{\frac{\pi}{2}} dF;$$

deoarece

$$dF=\mu\,dN=\mu plr\,d\alpha,$$

înlocuind, se obține

$$M'_F=2r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mu plr\,d\alpha=2r^2\mu pl\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha.$$

Integrînd și înlocuind valoarea lui p din (I.158), rezultă

$$M'_F=\frac{\pi}{2}\mu r\mathfrak{Q}. \tag{I.159}$$

Se poate deci scrie că, în cazul repartizării presiunii specifice după legea dată de formula (I.158), expresia momentului de frecare (I.159) devine:

$$M'_F=1{,}57\mu r\mathfrak{Q}=\mu' r\mathfrak{Q}=\rho'\mathfrak{Q}, \tag{I.160}$$

unde

$$\mu'=1{,}57\mu$$

și

$$\rho'=r\mu'. \tag{I.161}$$

Raza cercului de frecare în cazul fusului fără joc și nerodat este deci mai mare decît în cazul fusului cu joc dată de formula (I.157).

Razele cercurilor de frecare stau în raportul

$$\frac{\rho'}{\rho}=1{,}57.$$

În consecință, momentele de frecare stau și ele în același raport, adică

$$M'_F=1{,}57M_F. \tag{I.162}$$

17.3. Frecarea în fusurile rodate

După un anumit timp de funcționare asperitățile suprafețelor de contact se retează și contactul dintre fus și cuzinet devine din ce în ce mai intim. „Retezarea" asperităților continuă într-un ritm mai accentuat în regiunile unde presiunea specifică este mai mare.

Uzura se va realiza astfel după o anumită lege de variație, în funcție de poziția suprafețelor de contact față de planul vertical. Ipoteza de variație a uzurii cuzinetului se admite cosinusoidală, ca fiind cea mai aproape de realitate.

In acest caz,

$$U_a=U_{max}\cos\alpha, \tag{I.163}$$

în care: U_a este uzura ab într-o direcţie care face unghiul α cu axa verticală;

$U_{max}=a_0b_0$ — uzura maximă în direcţia verticală (fig. I.92, *b*).

Deoarece experienţele au arătat că uzura este proporţională cu presiunea specifică, rezultă că şi legea de variaţie a acesteia va fi asemănătoare, adică:

$$p_a=p_{max}\cos\alpha. \tag{I.164}$$

Momentul de frecare din fus are astfel valoarea

$$M''_F=2r\int_0^{\frac{\pi}{2}}dF=2r\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}dN=2r\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}p_a lr\,d\alpha.$$

Dacă se înlocuieşte valoarea lui p_a din (I.164) şi se fac calculele, se obţine

$$M''_F=2r^2l\mu p_{max}. \tag{I.165}$$

Valoarea lui p_{max} se obţine din ecuaţia de proiecţie pe axa verticală (direcţia de acţiune a lui $\mathfrak{Q}$):

$$\mathfrak{Q}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dN\cos\alpha=\int_0^{\frac{\pi}{2}}p_a lr\cos\alpha\,d\alpha=2rlp_{max}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha\,d\alpha.$$

Efectuînd integrala şi scoţînd valoarea lui p_{max}, se obţine

$$p_{max}=\frac{2\mathfrak{Q}}{\pi lr}. \tag{I.166}$$

Dacă se înlocuieşte această valoare în expresia momentului de frecare M''_F dată de (I.165) şi se fac calculele, rezultă:

$$M''_F=\frac{4}{\pi}\mu r\mathfrak{Q}=1{,}27\mu r\mathfrak{Q}=\mu''r\mathfrak{Q}=\rho''\mathfrak{Q}, \tag{I.167}$$

unde:

$$\mu''=1{,}27\mu$$

şi

$$\rho''=r\mu''. \tag{I.168}$$

Dacă se compară între ele formulele (I.156), (I.160) şi (I.167) se constată că în aceste trei cazuri momentele de frecare din cupla cinematică fus-cuzinet stau între ele în raportul:

$$M_F : M'_F : M''_F=1 : 1{,}57 : 1{,}27. \tag{I.169}$$

In consecinţă, cercurile de frecare ρ, ρ' şi ρ'' stau şi ele în acelaşi raport.

Se constată că frecarea într-un fus rodat este mai mică decît într-unul nerodat.

De aceea la ieşirea unei maşini din fabrică (automobil, camion, motor etc.) se fixează un termen în interiorul căruia viteza de funcţionare să nu depăşească o anumită limită. După expirarea acestui termen (stabilit în timp sau după kilometrajul parcurs) funcţionarea motorului se poate admite la viteza maximă. Asperităţile dintre suprafeţele cuplelor de rotaţie s-au rodat şi momentul de frecare s-a micşorat în raportul dat de relaţia (I.169). Nu va mai exista pericolul încălzirii şi al topirii cuzinetului din cauza căldurii degajată de frecare.

17.4. Frecarea în pivoţi

Determinarea momentului de frecare în cazul repartizării uniforme a presiunii specifice.

Valoarea momentului de frecare la un pivot inelar se obţine dacă se ia momentul tuturor forţelor de frecare în raport cu axa de rotaţie a pivotului (fig. I.93).

Pentru aceasta se va considera întîi că presiunea specifică este uniform repartizată pe suprafaţa inelară a suprafeţei frontale; cu alte cuvinte,

$$p=\frac{\mathfrak{Q}}{\pi(R^2-r^2)}, \tag{I.170}$$

în care: $\mathfrak{Q}$ este sarcina totală a pivotului;

R — raza exterioară a pivotului;

r — raza interioară a pivotului.

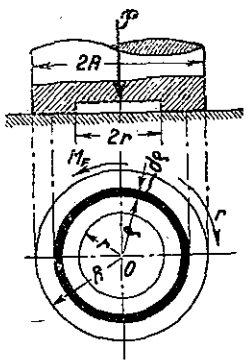


Fig. I.93. Pivotul inelar

Momentul de frecare este în acest caz:

$$M_F=\int_r^R\rho\,dF=\int_r^R\rho\mu\,dN=\mu\int_r^R\rho p2\pi\rho\,d\rho=2\pi\mu p\int_r^R\rho^2\,d\rho.$$

Integrînd şi înlocuind valoarea lui p din (I.170) se obţine

$$M_F=\frac{2}{3}\mu\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\mathfrak{Q}=\mu r'\mathfrak{Q}, \tag{I.171}$$

în care s-a notat

$$r'=\frac{2}{3}\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}. \tag{I.172}$$

Şi în acest caz expresia momentului de frecare se poate pune sub forma clasică:

$$M_F=\rho_1\mathfrak{Q}, \tag{I.173}$$

în care $\rho_1=\mu r'$ — raza cercului de frecare.

Dacă pivotul este plin, adică dacă $r=0$ (fig. I.94), expresia momentului de frecare devine

$$M_{F_0}=\frac{2}{3}\mu R\mathfrak{Q}. \tag{I.174}$$

Formula (I.174) poate fi interpretată în sensul că forţa de frecare totală $\mu\mathfrak{Q}$ este aplicată la un braţ de pîrghie $\rho=\frac{2}{3}R$.

In cazul pivotului inelar, braţul de pîrghie este

$$\rho=\frac{2}{3}\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}.$$

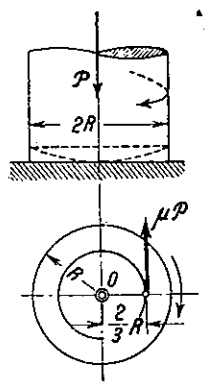


Fig. I.94. Forma pivotului în cazul cînd uzura variază cu viteza dintre suprafeţe (punctat).

In multe situaţii se poate considera că suprafaţa frontală a pivotului nu se uzează uniform, ci mai accentuat la margine, unde lucrul mecanic de frecare este mai mare. Din această cauză, după un anumit timp, ea se uzează neuniform şi capătă forma punctată din fig. I.94.

Determinarea momentului de frecare în cazul uzurii uniforme. Experienţa şi constatările făcute în cursul exploatării au arătat că suprafeţele în contact au o uzură uniformă, adică rămîn plane şi după uzare.

Deoarece uzura este funcţie atît de presiunea specifică dintre pivot şi lagăr în elementul de suprafaţă considerat, cît şi de viteză, se poate scrie

$$U=cpv=\text{const}, \qquad \text{(I.175)}$$

în care: c este o constantă;

p — presiunea specifică dintre suprafaţa frontală a pivotului şi lagăr;

v — viteza relativă dintre cele două suprafeţe în elementul de suprafaţă considerat. In acest caz,

$$v=x\omega,$$

în care x este distanţa de la axa de rotaţie a pivotului pînă la centrul de greutate al elementului de suprafaţă considerat (fig. I.95).

Cu aceste notaţii se obţine:

$$U=cp\omega x=c_1px=\text{const.},$$

de unde

$$px=A=\text{const.} \qquad \text{(I.176)}$$

Legea de variaţie a lui px este deci o hiperbolă echilateră.

Din această lege de variaţie rezultă că, pentru $x=0$, se obţine $p=\infty$.

Rezultatul de mai sus a dus la concluzia că este mai practic ca pivoţii să fie confecţionaţi inelari în loc de plini, deoarece în apropierea axei de rotaţie presiunile specifice devin extrem de mari.

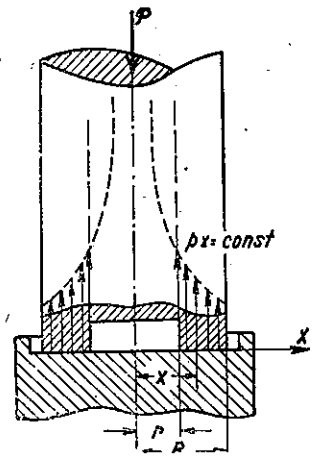


Fig. I.95. Variaţia presiunii dintre pivot şi lagăr în cazul uzurii constante.

Se va arăta mai departe modul cum se determină mărimea momentului de frecare.

Se scrie întîi ecuaţia de proiecţie a tuturor forţelor după axa p (fig. I.95) din care rezultă:

$$\mathfrak{Q}=\int_r^R p2\pi x\,dx=\int_r^R\frac{A}{x}2\pi x\,dx.$$

Făcînd calculele, se obţine valoarea constantei A

$$A=\frac{\mathfrak{Q}}{2\pi(R-r)}.$$

Dacă se notează cu

$$r_m=\frac{R+r}{2} \quad \text{şi} \quad p_m=\frac{\mathfrak{Q}}{\pi(R^2-r^2)}, \qquad \text{(I.177)}$$

expresia lui A devine

$$A=p_m r_m.$$

Introducînd această valoare în (I.176), se obţine

$$p=\frac{p_m r_m}{\rho}. \qquad \text{(I.178)}$$

Momentul de frecare în pivot se poate acum determina uşor dacă se scrie ecuaţia de momente în raport cu axa de rotaţie a pivotului:

$$M_F=\int_r^R x\,dF=\int_r^R\rho\mu p\,2\pi x\,dx=\int_r^R x\mu\frac{p_m r_m}{x}2\pi x\,dx.$$

După integrare, se obţine

$$M_F=\pi\mu r_m p_m(R^2-r^2).$$

Dacă acum se înlocuieşte valoarea lui p_m din (I.177), rezultă expresia

$$M_F=\mu r_m\mathfrak{Q}. \qquad \text{(I.179)}$$

Se vede deci că în ultimă analiză expresia momentului de frecare în pivot are aceeaşi formă ca şi la fusuri.

Ceea ce diferă ca rezultat în toate ipotezele ce se fac este mărimea razei cercului de frecare.

In cazul de faţă, se vede că:

— în ipoteza presiunii specifice constante raza cercului de frecare este

$$\rho_1=\mu r'=\frac{2}{3}\mu\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}, \qquad \text{(I.180)}$$

— iar în cazul uzurii constante

$$\rho_m=\mu r^m=\mu\frac{R+r}{2}. \qquad \text{(I.181)}$$

17.5. Determinarea poziţiilor de autofrînare cu ajutorul cercului de frecare

Cercul de frecare a cărui rază este dată de una dintre formulele (I.157), (I.161) sau (I.168) constituie, după cum s-a precizat şi mai înainte, zona în interiorul căreia rezultanta nu mai poate pune în mişcare fusul, deoarece momentul de frecare M_F este mai mare decît momentul dat de rezultantă.

Această proprietate se foloseşte la determinarea condiţiilor de realizare a autoblocării la dispozitivele de strîngere cu excentric, la determinarea poziţiilor moarte ale unui mecanism etc.

Se va da mai jos un exemplu de modul cum se stabilesc condiţiile de realizare a autoblocării la un dispozitiv de strîngere cu excentric (fig. I.96, *a*) de la păpuşa mobilă a strungului.

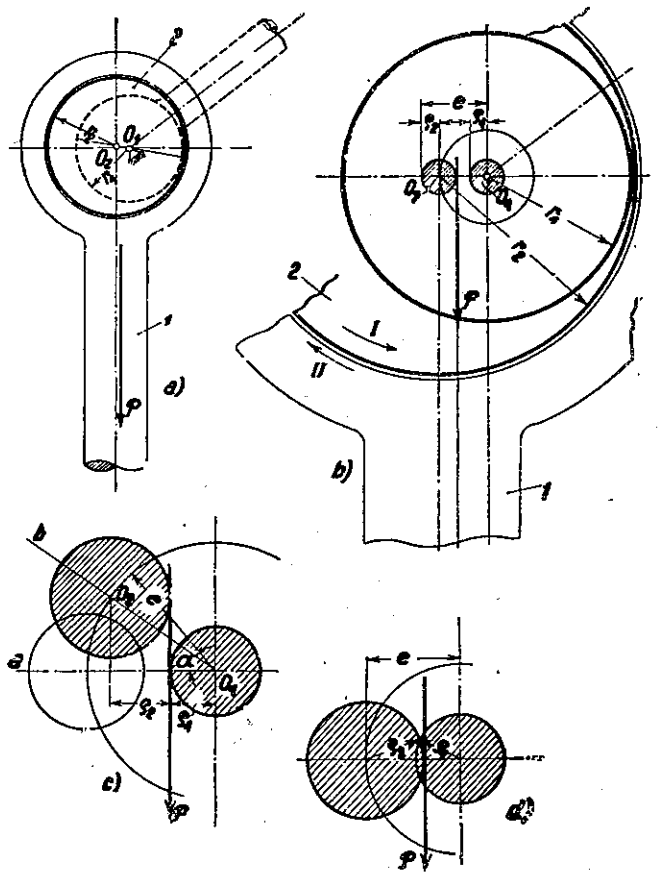


Fig. I.96. Determinarea excentricităţii dispozitivului de strîngere cu excentric, de la păpuşa mobilă a strungului.

Se cere ca la acest dispozitiv să se determine valoarea excentricităţii, astfel încît să existe blocare pentru orice poziţie a excentricului. Sînt date:

$r_1=25$ mm este raza fusului cu centrul în O_1;
$r_2=30$ mm — raza excentricului cu centrul în O_2;
$\mu=0{,}15$ mm — coeficientul de frecare dintre excentric şi bara de strîngere şi dintre fus şi bucea.

Se determină întîi razele cercurilor de frecare ale fusului şi excentricului

$$\rho_1=\mu r_1=0{,}15\times 25=3{,}75 \text{ mm};$$

$$\rho_2=\mu r_2=0{,}15\times 30=4{,}5 \text{ mm}.$$

Se presupune că $\overline{O_1O_2}$ este orizontală.

In acest caz, dacă dispozitivul strînge, atunci reacţiunea tijei *1* asupra excentricului *2*, reacţiune care caută să rotească excentricul şi fusul în sens invers acelor de ceasornic (săgeata *I*) va fi tangentă la cercul de frecare ρ_2, deoarece viteza relativă a suprafeţei de contact a bucelei tijei faţă de a excentricului este dată de săgeata *II* (fig. I.96, *b*).

Dacă acum

$$\rho_1+\rho_2<e,$$

atunci dispozitivul se deblochează, deoarece rezultanta $\mathfrak{L}$ trece în afara cercului de frecare de rază ρ_1.

Rotind de mînerul de strîngere (solidar cu excentricul *2*) în sensul acelor de ceasornic pînă cînd reacţiunea $\mathfrak{L}$ devine tangentă la cercul de frecare ρ_1 (fig. I.96, *c*), se obţine poziţia limită a tijei, dincolo de care apare fenomenul de autoblocare atunci cînd nu se mai acţionează de mîner.

Dacă se notează cu α unghiul limită (aO_1b) dincolo de care există autoblocare, valoarea lui rezultă din fig. I.96, *c*:

$$\cos\alpha=\frac{\rho_1+\rho_2}{e}=\mu\frac{r_1+r_2}{e}. \tag{I.182}$$

Pentru realizarea unei autoblocări la orice poziţie a excentricului este necesar ca

$$\alpha=0.$$

Introducînd această valoare în (I.182), rezultă:

$$e=\rho_1+\rho_2. \tag{I.183}$$

Pentru ca în nici un caz să nu existe pericol de deblocare a dispozitivului, relaţia de mai sus se scrie:

$$e<\rho_1+\rho_2. \tag{I.184}$$

Această situaţie este redată în fig. I.96, *d*.

In cazul exemplului luat va trebui deci ca

$$e<8{,}25 \text{ mm}.$$

Dacă este nevoie de o excentricitate mai mare decît cea rezultată, va trebui mărită fie raza excentricului, fie a excentricului şi a fusului.

§ 18. CINETOSTATICA MECANISMELOR ARTICULATE CÎND SE ŢINE SEAMĂ DE FRECARE

18.1. Principii de calcul

In capitolul II s-au determinat reacţiunile în articulaţii şi forţa de echilibrare în mecanisme fără luarea în consideraţie a frecării din cuplele cinematice.

Prezenţa frecării între suprafeţele cuplelor cinematice ale unui mecanism modifică direcţia reacţiunilor, şi anume:

— la cuplele de translaţie o orientează în sens invers vitezei relative dintre suprafeţe, înclinată cu unghiul de frecare φ faţă de normala la ghidaj;

— la cuplele de rotaţie devine tangentă la cercul de frecare de rază μr.

Aceste noi orientări ale direcţiilor reacţiunilor impun refacerea calculului cinetostatic al mecanismului în noua situaţie. Rezultatul va fi determinarea altor valori pentru mărimea reacţiunilor şi a rezistenţei tehnologice sau a forţei motoare, după caz.

Calculul cinetostatic se poate relua pentru fiecare grupă cinematică în parte, determinîndu-se valorile noilor reacţiuni, după care se continuă calculul cinetostatic pînă la elementul asupra căruia acţionează forţa de echilibrare necunoscută (rezistenţa tehnologică sau forţa motoare).

Cu ajutorul metodei pîrghiei lui N. E. Jukovski se determină forţa exterioară necunoscută R dacă se calculează în prealabil care este forţa necesară pentru echilibrarea momentelor de frecare din cuplele în rotaţie sau a forţelor de frecare din cuplele de translaţie. In subparagrafele care urmează se va expune întîi calculul grafic analitic cu ajutorul metodei pîrghiei lui N. E Jukovski, după care se va arăta modul cum se determină rezistenţa tehnologică şi reacţiunile din articulaţii, folosind cercul şi unghiul de frecare ale cuplelor de rotaţie şi translaţie.

Ultima metodă se poate aplica cu succes în cazul cînd cercurile de frecare sau unghiurile de frecare sînt suficient de mari pentru a fi construite pe planşă.

In cazul cînd mărimea acestora este mică, calculul grafic nu mai prezintă decît o importanţă teoretică.

Utilizarea unghiului de frecare are aplicaţie însă la proiectarea dispozitivelor de blocare (§ 17,5), aşa cum unghiul de frecare are o importanţă foarte mare în proiectarea mecanismelor, unde constituie una dintre condiţiile constructive. Exemple s-au dat la studiul frecării în ghidaje (fig. I.87).

18.2. Calculul grafo-analitic al rezistenţei tehnologice dacă se ia în consideraţie şi frecarea

Pentru calculul acestei forţe se determină întîi forţa de echilibrare fără luarea în consideraţie a frecării.

In cazul unui mecanism patrulater (fig. I.97, *a*), calculul cinetostatic se face după metoda cunoscută (cap. II, § 12), determinîndu-se reacţiunile $\mathfrak{Q}_{41}$, $\mathfrak{Q}_{12}$, $\mathfrak{Q}_{23}$, şi $\mathfrak{Q}_{34}$ din articulaţiile O, A, B, C şi rezistenţa tehnologică R_0, aplicată în punctul D, care face echilibru forţelor exterioare.

Momentele de frecare din cele patru articulaţii sînt date de formulele (I.156), (I.159) sau (I.167) după cum fusurile sînt cu joc, nerodate sau rodate.

Se va presupune că se poate aplica formula (I.156), deci expresiile momentelor de frecare sînt în acest caz:

$$\left.\begin{aligned} M_{F_0} &= \mu r_0 \mathfrak{Q}_{41}; \quad M_{F_A} = \mu r_A \mathfrak{Q}_{12}; \\ M_{F_B} &= \mu r_B \mathfrak{Q}_{23}; \quad M_{F_C} = \mu r_C \mathfrak{Q}_{34}. \end{aligned}\right\} \tag{I.185}$$

Forţa exterioară R_F, care echilibrează acţiunea acestor momente de frecare, se află folosind metoda pîrghiei lui N. E. Jukovski. R_F se va considera aplicată

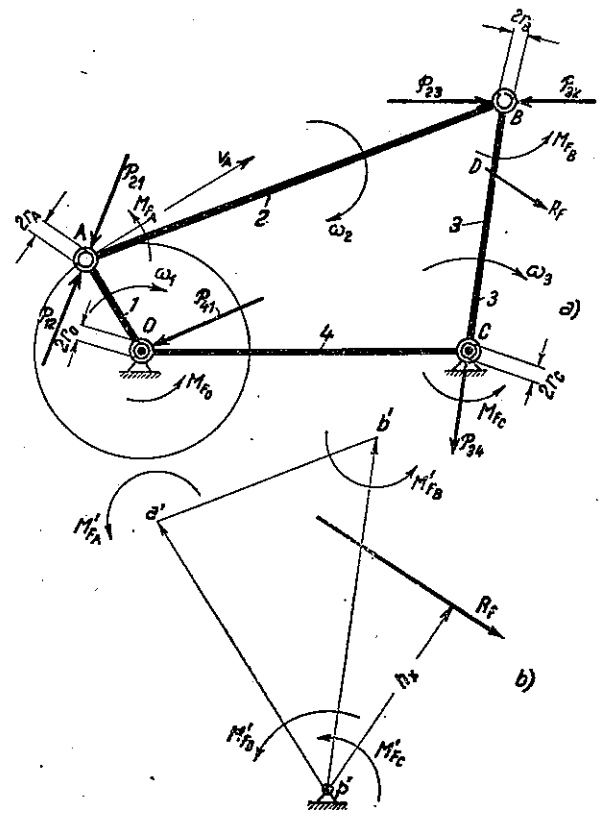


Fig. I.97. Determinarea cu ajutorul metodei pîrghiei lui Jukovski a forţei exterioare R_f care echilibrează acţiunea momentelor de frecare din articulaţiile unui mecanism patrulater.

în acelaşi punct D ca şi rezistenţa tehnologică R_0 şi cu aceeaşi linie de acţiune (suport).

In acest caz, rezistenţa tehnologică reală care poate fi învinsă de mecanism este evident

$$R = R_0 - R_F. \tag{I.186}$$

Calculul lui R_F. Se construieşte planul vitezelor rotit cu 90° (fig. I.97, *b*) şi se transpun în acest plan la scara k_v a vitezelor din planul vitezelor valorile puterilor instantanee ale momentelor de frecare ale celor patru articulaţii luate în sensul fluxului de energie.

Se vor lua deci sensurile momentelor de frecare ce se exercită asupra elementului care transmite mai departe forţa motoare pînă la elementul condus.

Astfel, în cazul fig. I.97, *a* se va lua în consideraţie ca sens de rotire:

M_{F_0} — momentul de frecare din articulaţia din O cu axa fixă, ce se exercită asupra manivelei motoare;

M_{F_A} — momentul de frecare din articulaţia A, ce se exercită de biela *2* asupra manivelei *1*;

M_{F_B} — momentul de frecare din articulaţia B, ce se exercită asupra bielei *2* de către balansierul (braţul) *3*, deoarece fluxul de energie merge de la *2* către *3*;

M_{F_C} — momentul de frecare din articulaţia din C cu axa fixă, ce se exercită asupra braţului *3*, elementul condus, care efectuează lucrul mecanic util.

Cu această menţiune foarte importantă se poate trece acum la determinarea mărimii şi a sensului de acţionare a puterilor instantanee ale celor patru momente de frecare:

a) Puterea momentului de frecare din articulaţia O:

$$M_{F_0}\omega_1 = M_{F_0}\frac{v_A}{OA} = k_v M_{F_0}\frac{\overline{(p'a')}}{OA} = k_v M'_{F_0}.$$

Mai sus s-a notat

$$M'_{F_0} = M_{F_0}\frac{\overline{(p'a')}}{OA}. \tag{I.187}$$

b) Puterea momentului de frecare din articulaţia A:

$$M_{F_A}\omega_{12} = M_{F_A}(\omega_1-\omega_2) = M_{F_A}\left(\frac{v_A}{OA}-\frac{v_{BA}}{AB}\right) = k_v M_{F_A}\left[\frac{\overline{(p'a')}}{OA}-\frac{\overline{(a'b')}}{AB}\right] = k_v M'_{F_A},$$

unde s-a notat

$$M'_{F_A} = M_{F_A}\left[\frac{\overline{(p'a')}}{OA}-\frac{\overline{(a'b')}}{AB}\right]. \tag{I.188}$$

c) Puterea momentului de frecare din articulaţia B se determină ca mai sus:

$$M_{F_B}\omega_{23} = M_{F_B}(\omega_2-\omega_3) = M_{F_B}\left(\frac{v_{AB}}{AB}-\frac{v_B}{BC}\right) = k_v M_{F_B}\left[\frac{\overline{(b'a')}}{AB}-\frac{\overline{(p'b')}}{BC}\right] = k_v M'_{F_B},$$

unde s-a notat ca şi mai sus

$$M'_{F_B} = M_{F_B}\left[\frac{\overline{(b'a')}}{AB}-\frac{\overline{(p'b')}}{BC}\right]. \tag{I.189}$$

d) Puterea momentului de frecare din articulaţia C este:

$$M_{F_C}\omega_3 = M_{F_C}\frac{v_B}{BC} = k_v M_{F_C}\frac{\overline{(p'b')}}{BC} = k_v M'_{F_C},$$

unde s-a notat

$$M'_{F_C} = M_{F_C}\frac{\overline{(p'b')}}{BC}. \tag{I.190}$$

Pentru a transpune momentele $M'_{F_0},\ldots,M'_{F_C}$ în planul vitezelor rotit cu 90° trebuie în prealabil determinate sensurile lor de rotaţie.

Sensul lui M'_{F_0} este invers acelor unui ceasornic, deoarece ω_1 se roteşte în sensul acelor unui ceasornic.

Sensul lui M'_{F_A} este invers lui $\omega_{12}=\omega_1-\omega_2$. După cum rezultă din planul vitezelor, ω_{12} se roteşte în sensul acelor unui ceasornic.

Sensul lui M'_{F_B} este la fel cu al lui M'_{F_A}, de asemenea şi al lui M'_{F_C}, deoarece şi ω_3 se roteşte la fel ca ω_2.

Toate momentele de frecare se rotesc evident în sens invers acelor unui ceasornic.

După transpunerea în planul vitezelor a lui $M'_{F_0},\ldots,F'_{F_C}$ şi a liniei de acţiune a lui R_F, se scrie ecuaţia de momente în raport cu polul vitezelor din care rezultă valoarea lui R_F.

Notînd cu (h_x) distanţa de la p' pînă la linia de acţiune a lui R_F, se obţine:

$$R_F = \frac{1}{(h_x)}\left(M'_{F_0}+M'_{F_A}+M'_{F_0}+M'_{F_C}\right). \tag{I.191}$$

Dacă de la ecuaţia de mai sus se trece la puterile momentelor de frecare, rezultă:

$$R_F = \frac{1}{k_v(h_x)}\left(M_{F_0}\omega_1+M_{F_A}\omega_{12}+M_{F_B}\omega_{23}+M_{F_C}\omega_3\right). \tag{I.192}$$

Considerînd acum că razele fusurilor sînt egale, adică $r_0=r_A=r_B=r_C=r$, formula (I.192) devine:

$$R_F = \frac{\mu r}{k_v(h_x)}\left[\mathfrak{Q}_{41}\omega_1+\mathfrak{Q}_{12}\omega_{12}+\mathfrak{Q}_{23}\omega_{23}+\mathfrak{Q}_{34}\omega_3\right]. \tag{I.193}$$

Aplicarea metodei pîrghiei pentru aflarea forţei R_F dă rezultate foarte exacte.

Dacă această valoare se introduce în formula (I.186), se obţine rezistenţa tehnologică R.

18.3. Calculul grafic al rezistenţei tehnologice, folosind cercul şi unghiul de frecare

S-a văzut că, în cazul existenţei frecării, reacţiunile din articulaţii nu mai trec prin centrul de rotaţie al acestora, ci sînt tangente la cercurile de frecare corespunzătoare razei fiecărui fus.

Acest fapt modifică poziţia reacţiunilor faţă de situaţia iniţială, în care s-a determinat mărimea lor prin calculul cinetostatic.

Astfel apar momentele de frecare date de expresiile cunoscute, care acum trebuie introduse într-un nou calcul cinetostatic pentru aflarea rezistenţei tehnologice sau a forţei motoare reale, după caz.

Inainte de a trece la calculul grafic al acestei forţe, se va arăta modul cum se determină direcţiile reacţiunilor într-un element în cazul existenţei frecării în cuplele cinematice de rotaţie.

Orientarea reacţiunilor în cazul bielei din fig. I.98 poate avea patru posibilităţi, determinate de cele patru tangente la cercurile de frecare ale celor două articulaţii: două tangente exterioare *bb* şi *cc* şi două interioare *aa* şi *dd*.

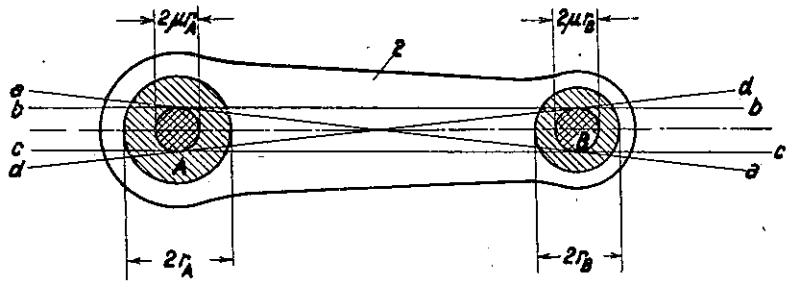


Fig. I.98. Cele patru direcţii posibile ale reacţiunilor faţă de cercurile de frecare ale articulaţiilor unui element.

Poziţiile lor depind atît de felul solicitării la care este supusă biela în momentul considerat, cît şi de vitezele unghiulare relative ale elementelor de legătură faţă de bielă.

Astfel, în fig. I.99, *a* s-a luat cazul cînd biela este supusă la compresiune, iar elementele *1* şi *3* se rotesc faţă de bielă în sensul acelor unui ceasornic cu vitezele unghiulare ω_{12}, respectiv ω_{32}.

In situaţia de mai sus, fusurile *A* şi *B* (haşurate) ale elementelor *2* şi *3* vor fi în contact cu părţile interioare ale celor două bucele ale bielei *2*.

Punctele de tangenţă dintre fusuri şi bucele (cuzineţi) vor fi deplasate de la direcţia pe care o aveau în lipsa frecării (dreapta care uneşte centrele bucelelor) în sens contrar vitezelor unghiulare ω_{12} şi ω_{32}, adică în *t*, respectiv *t'* (după cum s-a arătat şi în fig. I.91 în cazul clasic al fusului în lagăr).

Reacţiunile $\mathfrak{R}_{12}$ şi $\mathfrak{R}_{32}$ vor fi astfel tangente la cercurile de frecare de raze μr_A, respectiv μr_B, prima ($\mathfrak{R}_{12}$) deasupra cercului de frecare μr_A, a doua ($\mathfrak{R}_{32}$) sub cercul de frecare μr_B.

Direcţia comună *aa* este astfel o tangentă interioară la cele două cercuri de frecare.

Făcînd un raţionament asemănător se deduce uşor că, în cazul cînd biela este supusă la întindere, iar sensurile de rotaţie ale lui ω_{12} şi ω_{32} sînt ca în fig. I,99, *b*, direcţia comună a lui $\mathfrak{R}_{12}$ şi $\mathfrak{R}_{32}$ este tangenta exterioară *bb* de deasupra cercurilor de frecare μr_A şi μr_B.

Păstrînd aceleaşi sensuri de rotaţie pentru ω_{12} şi ω_{32}, însă de data aceasta biela este supusă la compresiune (fig. I.99, *c*), direcţia comună a lui $\mathfrak{R}_{12}$ şi $\mathfrak{R}_{32}$ va fi tangenta exterioară *cc* de sub cercurile de frecare.

In sfîrşit, în cazul fig. I.99, *d*, în care sensurile lui ω_{12} şi ω_{32} sînt aceleaşi ca în fig. I.99, *a*, însă biela este supusă la întindere, direcţia comună a lui $\mathfrak{R}_{12}$ şi $\mathfrak{R}_{32}$ este a doua tangentă interioară *dd* la cele două cercuri de frecare.

Determinarea corectă a direcţiilor reacţiunilor în cazul existenţei frecării impune o atentă analiză a modului de solicitare a fiecărui element şi a vitezelor unghiulare relative dintre elemente.

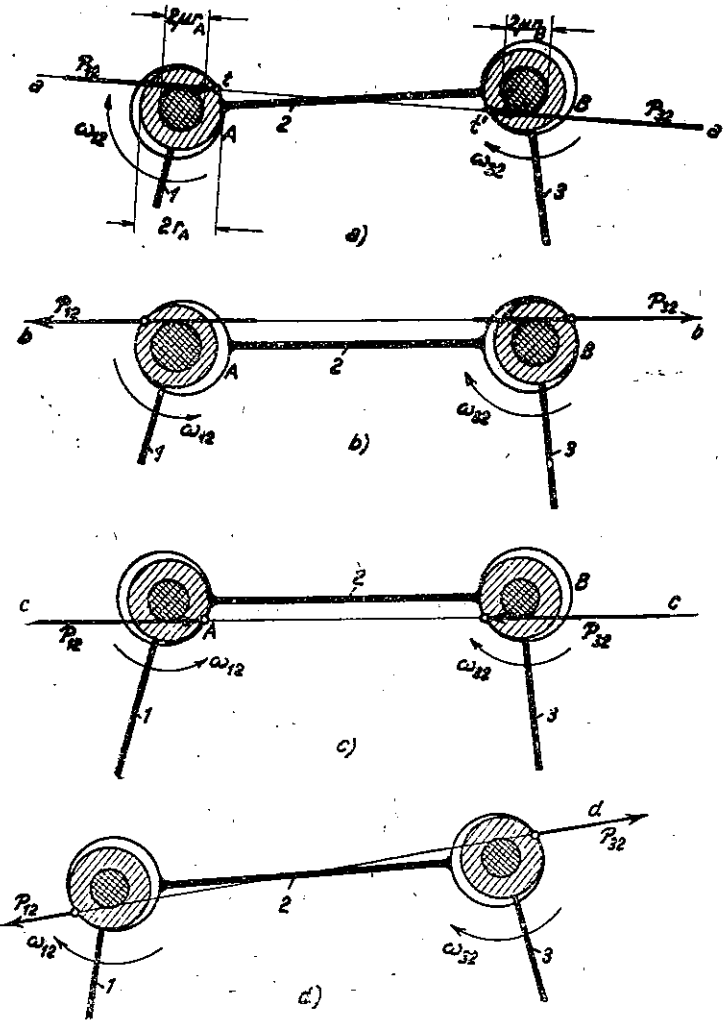


Fig. I.99. Determinarea direcţiilor reacţiunilor în funcţie de natura solicitării şi de vitezele unghiulare relative dintre elemente în cazul existenţei frecării.

Modul de solicitare a elementelor este determinat prin calculul cinetostatic al mecanismului făcut în ipoteza lipsei frecării. Sensurile vitezelor unghiulare relative dintre elemente sînt determinate de planul vitezelor.

Metoda arătată mai sus se va aplica la calculul rezistenţei tehnologice *R* a unui mecanism bielă-manivelă de la o maşină cu abur (fig. I.100, *a*).

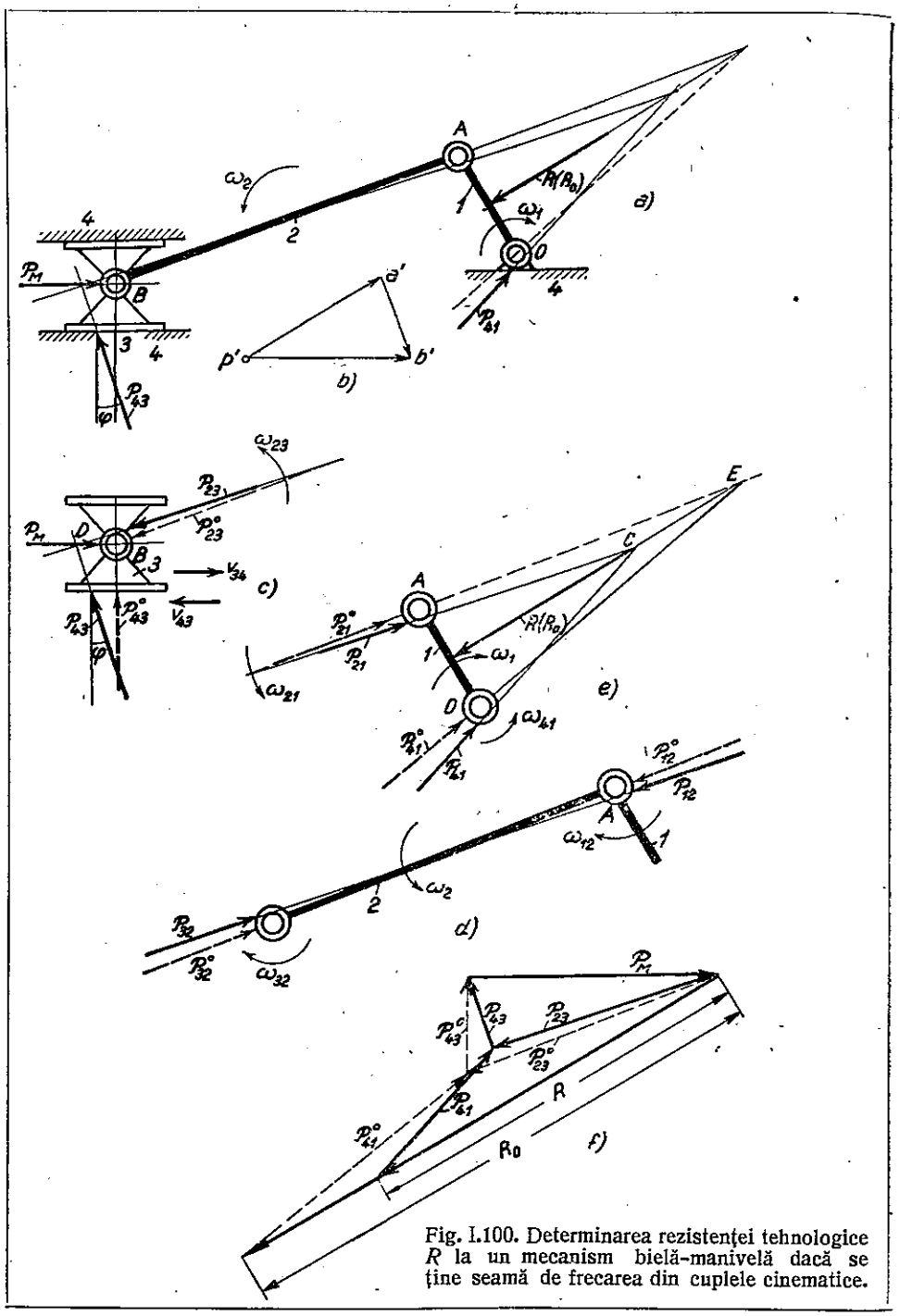


Fig. I.100. Determinarea rezistenței tehnologice R la un mecanism bielă-manivelă dacă se ține seamă de frecarea din cuplele cinematice.

Pentru simplificare se va considera cazul static, situație în care rezistența tehnologică aplicată într-un punct oarecare al manivelei OA se va calcula atît în cazul lipsei, cît și al existenței frecării (R_0, respectiv R).

Determinarea lui R_0 (în lipsa frecării). Reacțiunile în acest caz se vor trasa cu linii întrerupte.

Din echilibrul elementului inițial (capul de cruce), (fig. 100, c) asupra căruia acționează forța motoare $\mathfrak{Q}_M$, rezultă reacțiunile $\mathfrak{Q}^0_{23}$ și $\mathfrak{Q}^0_{43}$ ale căror direcții sînt cunoscute.

Mărimea lor rezultă din poligonul forțelor (fig. I.100, f).

Din echilibrul bielei (fig. 100, d) rezultă că

$$\mathfrak{Q}^0_{32} = -\mathfrak{Q}^0_{12}.$$

Trecînd la echilibrul manivelei (fig. I.100, e), se determină direcția reacțiunii $\mathfrak{Q}^0_{41}$, care trece prin punctul de intersecție E al lui R_0 și $\mathfrak{Q}^0_{21}$, după care se află cu ajutorul poligonului forțelor mărimea lui R_0 și $\mathfrak{Q}^0_{41}$ (fig. I.100, f).

Determinarea lui R (ținînd seamă de frecare). Se construiește întîi planul vitezelor (fig. I.100, b) din care se deduce:

$\omega_2 = k_v \dfrac{\overline{(a'b')}}{AB}$ — viteza unghiulară a bielei, care se rotește invers acelor unui ceasornic;

$\omega_{23} = \omega_2$ — viteza unghiulară a bielei față de capul de cruce;

$\omega_{32} = -\omega_{23}$ — viteza unghiulară a capului de cruce față pe cuzinetul B al bielei; ω_{32} se rotește în sensul acelor unui ceasornic;

$\omega_{12} = |\omega_1| + |\omega_2|$ — viteza unghiulară a manivelei față de cuzinetul A al bielei; ω_{12} se rotește în sensul acelor unui ceasornic.

Dacă se notează sensurile de rotație ale lui ω_{32} și ω_{12} în fig. I.100, d și se ține seamă că biela este supusă la compresiune (eventual flambaj) rezultă că direcția comună a lui $\mathfrak{Q}_{32}$ și $\mathfrak{Q}_{12}$ este tangenta interioară la cercurile de frecare ale articulațiilor din A (la partea inferioară) și din B (la partea superioară).

Trecînd acum la capul de cruce (fig. I.100, c) și notînd cu D punctul de intersecție a direcției lui $\mathfrak{Q}_{23}$ cu direcția de acțiune a lui $\mathfrak{Q}_M$, pentru echilibru va trebui ca $\mathfrak{Q}_{43}$ să treacă prin D. Direcția lui $\mathfrak{Q}_{43}$ face unghiul φ cu normala la ghidaj, $\mathfrak{Q}_{43}$ fiind orientată în sens invers vitezei relative a capului de cruce față de ghidaj, deci către stînga.

Mărimile lui $\overline{\mathfrak{Q}}_{23}$ și $\overline{\mathfrak{Q}}_{43}$ se află din poligonul forțelor (trasat cu linii continue în fig. I.100, f):

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{23} + \overline{\mathfrak{Q}}_{43} + \overline{\mathfrak{Q}}_M = 0.$$

Rezistența tehnologică $\overline{R}$ și reacțiunea $\overline{\mathfrak{Q}}_{41}$ se află din echilibrul manivelei (fig. I.100, e).

Direcția reacțiunii $\mathfrak{Q}_{41}$ trece prin punctul C de intersecție a lui R și $\mathfrak{Q}_{21}$.

Cu direcţiile cunoscute se construieşte poligonul forţelor (fig. I.100, *f*):

$$\bar{\mathfrak{Q}}_{21}+\bar{\mathfrak{Q}}_{41}+\bar{R}=0,$$

din care rezultă $\mathfrak{Q}_{41}$ şi R.

Se vede din planul forţelor că

$$R<R_0.$$

Raportul acestor două valori $\frac{R}{R_0}$ dă o imagine a mărimii randamentului mecanismului.

Cu cît $\frac{R}{R_0}$ este mai aproape de unitate, cu atît frecarea în mecanism este mai mică.

Relaţia dintre R şi R_0, determinată ca mai sus, este dată de formula (I.186).

Metoda grafică indicată reclamă o deosebită grijă în construirea exactă a mecanismului, a cercurilor de frecare şi a tangentelor comune la acestea.

Cu cît coeficientul de frecare μ este mai mic, datorită unei prelucrări îngrijite a suprafeţelor cuplelor cinematice de rotaţie, cu atît cercurile de frecare sînt mai mici şi direcţiile diferă mai puţin de cele care rezultă din calculul cinetostatic, fără luarea în consideraţie a frecării.

Eliminarea erorilor din desen se realizează întrucîtva prin construirea cercurilor de frecare la o scară de 3—4 ori mai mare decît scara la care este construit mecanismul.

In acest caz se presupune în mod aproximativ că influenţa frecării este de respectiv 3—4 ori mai mare decît în cazul real.

Astfel, dacă pentru o construcţie mai corectă a tangentelor se construiesc cercurile de frecare de n ori mai mari decît în fig. I.100 şi se determină în acest caz valoarea rezistenţei tehnologice R', atunci influenţa reală a frecării în mecanism este de n ori mai mică decît diferenţa

$$R_0-R',$$

adică se poate scrie că

$$R_F=R_0-R=\frac{1}{n}(R_0-R'). \qquad \text{(I.194)}$$

18.4. Calculul grafic în cazul cînd se ia în consideraţie numai frecarea din cuplele cinematice de translaţie

S-a arătat mai înainte că dimensiunile reduse ale cercurilor de frecare faţă de lungimea elementelor permit neglijarea influenţei frecărilor din articulaţii. Nu se poate însă neglija înclinarea reacţiunilor la cuplele de translaţie.

Ca exemplu de tratare a unei astfel de probleme se va lua mecanismul şeping a cărui schemă cinematică este redată în fig. I.101, *a*.

Se pune problema determinării forţei motoare $\mathfrak{Q}_M$ care, în poziţia dată a mecanismului şeping, echilibrează rezistenţa tehnologică R. Se neglijează frecarea din articulaţii precum şi influenţa forţelor de inerţie.

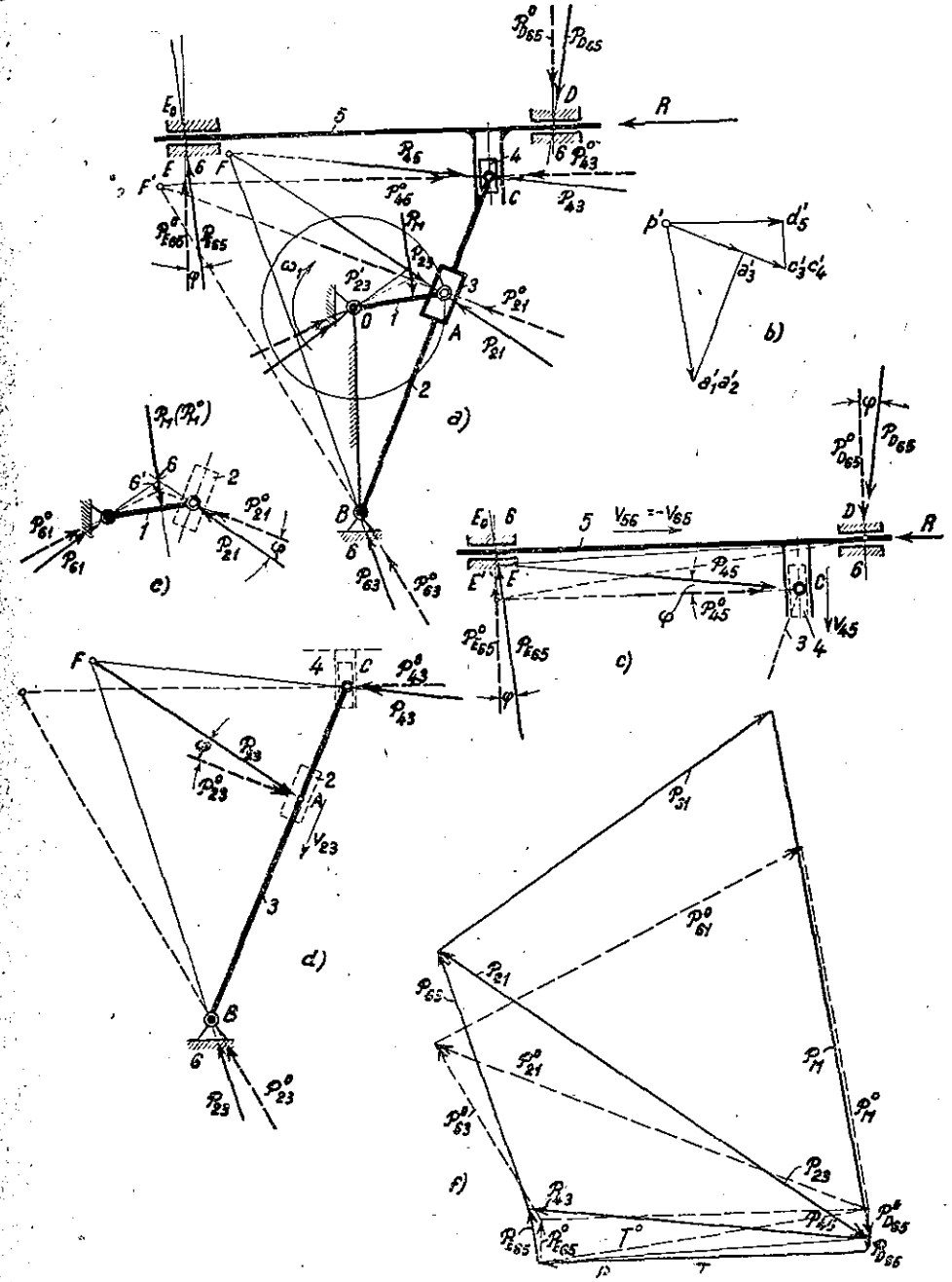


Fig. I.101. Determinarea forţei motoare $\mathfrak{Q}_M$ la un mecanism şeping, ţinînd seamă numai de frecarea din cuplele de translaţie.

Calculul se poate face folosind metoda descompunerii mecanismului în grupe de clasa a II-a şi determinînd reacţiunile după metodele cunoscute de la cap. II, § 9, în cele două ipoteze: fără frecare în cuplele cinematice şi cu frecare în cuplele din translaţie.

In cazul de faţă calculul se porneşte de la grupa de clasa a II-a asupra căreia acţionează forţa exterioară cunoscută R.

Aceasta este:

a) *Grupa (4, 5) de clasa a II-a, diada aspectul 5* (fig. I.101, *c*)

— Calculul reacţiunilor în cazul lipsei frecării.

Se vor nota cu exponentul 0 toate reacţiunile.

Forţele care acţionează asupra diadei *(4, 5)* sînt 4, şi anume:

R — rezistenţa tehnologică;

$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{D65}$, $\overline{\mathfrak{Q}}^0_{E65}$ — reacţiunile ghidajului *6* asupra saniei *5*;

$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{34}$ — reacţiunea culisei *3* asupra pietrei de culisă *4*.

După cum uşor se poate vedea,

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{34}=\overline{\mathfrak{Q}}^0_{45}.$$

Reacţiunile sînt toate perpendiculare pe ghidajele respective. Toate direcţiile forţelor sînt deci cunoscute.

Din condiţiile de echilibru ale elementului *5* rezultă:

$$\overline{R}+\overline{\mathfrak{Q}}^0_{D65}+\overline{\mathfrak{Q}}^0_{E65}+\overline{\mathfrak{Q}}^0_{45}=0$$

sau

$$\overline{R}+\overline{\mathfrak{Q}}^0_{D65}=-\overline{\mathfrak{Q}}^0_{E65}-\overline{\mathfrak{Q}}^0_{45}=-\overline{T}^0.$$

Rezultatele celor două grupe de forţe egale şi de sens contrar acţionează după direcţia comună DE (fig. I.101, *c*), trasată cu linii întrerupte, numită (după cum s-a mai arătat) şi dreapta lui Culmann.

In planul forţelor (fig. I.101, *f*) se construieşte acum poligonul

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{D65}+\overline{R}+\overline{T}^0=0$$

şi se determină

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{D65} \quad \text{şi} \quad T^0.$$

Cu acestea se găsesc imediat, prin construirea poligonului

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{E65}+\overline{\mathfrak{Q}}^0_{45}-\overline{T}^0=0,$$

celelalte două reacţiuni:

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{E65}=-\overline{\mathfrak{Q}}^0_{D65} \quad \text{şi} \quad \overline{\mathfrak{Q}}^0_{45}=R.$$

— Calculul reacţiunilor ţinîndu-se seamă de frecare.

Reacţiunile care se determină în acest caz se vor nota fără exponentul 0.

Aceste reacţiuni nu mai sînt însă perpendiculare pe ghidajele respective, ci sînt înclinate cu un unghi φ faţă de normală şi în sens invers vitezei relative a elementului respectiv.

Pentru aflarea vitezelor relative se construieşte în prealabil planul vitezelor (fig. 101, *b*).

De aici rezultă:

$$\overline{v}_{56}=-\overline{v}_{65}=k_v(\overline{p'd'_5});$$

$$\overline{v}_{45}=k_v(\overline{d'_5c'_4}).$$

Orientările reacţiunilor rezultă imediat şi sînt trasate în fig. 101, *a* şi *c*

Direcţia lui $\overline{\mathfrak{Q}}_{45}$ cu direcţia lui $\overline{\mathfrak{Q}}_{E65}$ care trece prin E_0 se intersectează în punctul E.

Cu ajutorul direcţiei DE, trasată în fig. I.101, *c* cu linia continuă, se construieşte poligonul forţelor:

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{D65}+\overline{R}+\overline{T}=0,$$

unde

$$\overline{T}=\overline{\mathfrak{Q}}_{E65}+\overline{\mathfrak{Q}}_{45}.$$

Din acest poligon rezultă:

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{45}=\overline{\mathfrak{Q}}_{34}=-\overline{\mathfrak{Q}}_{43}.$$

b) *Grupa (2, 3) de clasa a II-a, aspectul 3* (fig. I.101, *d*)

— Calculul reacţiunilor în cazul lipsei frecării.

Deoarece

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{12}=\overline{\mathfrak{Q}}^0_{23},$$

se poate scrie echilibrul culisei *3*

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{43}+\overline{\mathfrak{Q}}^0_{23}+\overline{\mathfrak{Q}}^0_{63}=0.$$

Direcţia lui $\overline{\mathfrak{Q}}^0_{63}$ trece prin punctul de intersecţie F' a celorlalte două reacţiuni.

Continuînd în planul forţelor poligonul forţelor de mai sus, rezultă mărimea reacţiunilor

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{23} \quad \text{şi} \quad \overline{\mathfrak{Q}}^0_{63}.$$

— Calculul reacţiunilor ţinîndu-se seamă de frecare.

Deoarece $\overline{v}_{23}=k_v(\overline{a'_3a'_2})$, reacţiunea $\overline{\mathfrak{Q}}_{23}$ este înclinată în sensul acestei viteze relative. Cum $\overline{\mathfrak{Q}}_{43}$ are aceeaşi linie de acţiune ca şi $\overline{\mathfrak{Q}}_{45}$, rezultă că direcţia lui $\overline{\mathfrak{Q}}_{63}$ trece prin punctul de intersecţie F al reacţiunilor $\overline{\mathfrak{Q}}_{43}$ şi $\overline{\mathfrak{Q}}_{23}$.

Din ecuaţia de echilibru a culisei *3* separată de grupă, adică din

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{43}+\overline{\mathfrak{Q}}_{63}+\overline{\mathfrak{Q}}_{23}=0$$

din planul forţelor rezultă cele două reacţiuni necunoscute ca mărime:

$$\mathfrak{Q}_{63} \text{ şi } \mathfrak{Q}_{23} \text{ (fig. I.101, } f).$$

Din echilibrul pietrei de culisă *2* rezultă

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{12}+\overline{\mathfrak{Q}}_{32}=0,$$

de unde

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{21}=-\overline{\mathfrak{Q}}_{12}=-\overline{\mathfrak{Q}}_{23}.$$

c) *Calculul forţei motoare $\mathfrak{Q}_M$ care acţionează asupra elementului iniţial.*

— In cazul lipsei frecării, echilibrul elementului iniţial rezultă din ecuaţia (fig. I.101, *e*):

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{21}+\overline{\mathfrak{Q}}^0_{61}+\overline{\mathfrak{Q}}^0_{M}=0.$$

Direcţia lui $\overline{\mathfrak{Q}}^0_{61}$ trece prin punctul de intersecţie G' a lui $\overline{\mathfrak{Q}}^0_M$ şi $\overline{\mathfrak{Q}}^0_{21}$.

Rezolvarea grafică a ecuaţiei de mai sus în planul forţelor (fig. I.101, *f*) determină mărimea şi sensul lui $\mathfrak{Q}^0_{61}$ şi $\mathfrak{Q}^0_M$ (trasată punctat).

— In cazul cînd se ţine seamă de frecare, direcţia lui $\mathfrak{Q}_{61}$ trece de data aceasta prin punctul G de intersecţie a lui $\mathfrak{Q}_M$ şi $\mathfrak{Q}_{21}$.

Din ecuaţia de echilibru

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{21}+\overline{\mathfrak{Q}}_{61}+\overline{\mathfrak{Q}}_{M}=0,$$

construită în planul forţelor, rezultă mărimile şi sensurile lui $\mathfrak{Q}_{62}$ şi $\mathfrak{Q}_M$.

Din planul forţelor se vede imediat că

$$\mathfrak{Q}^0_M<\mathfrak{Q}_M.$$

Raportul $\frac{\mathfrak{Q}^0_M}{\mathfrak{Q}_M}$ dă, ca şi în cazul studiat la § 5.3, o imagine a randamentului mecanismului.

Observaţie. Metoda pîrghiei lui N. E. Jukovski este de fapt cea mai exactă şi mai expeditivă pentru determinarea rezistenţei R_F care face echilibrul forţelor şi al momentelor de frecare (§ 18.2).

18.5. Cinetostatica grupelor cînd se ia în considerare şi frecarea

Studiul făcut la § 18.3 şi § 18.4 a considerat ca forţe exterioare numai forţa motoare şi rezistenţa tehnologică, neglijînd greutăţile elementelor şi forţele de inerţie.

In felul acesta, reacţiunile din articulaţii — în lipsa frecării — erau dirijate în lungul elementului în cazul bielelor (v. fig. I.100, *d*), iar determinarea lor cînd se ia în consideraţie frecarea nu prezintă nici o dificultate, dacă se respectă cele indicate în fig. I.99 cu privire la direcţia tangentei comune la cercurile de frecare.

Dacă însă se introduc în calcul şi forţele de inerţie ale elementelor, calculul cinetostatic trebuie refăcut folosind metodele arătate în cazul lipsei frecării pentru fiecare grupă cinematică în parte.

Se arată mai departe modul cum se rezolvă problema de cinetostatică a grupelor cinematice de clasa a II-a, ordinul 2, aspectele 1 şi 2.

a) *Grupa de clasa a II-a, ordinul 2, aspectul 1* (fig. I.102, *a*). Asupra grupei *ABC*, separată de restul mecanismului, acţionează forţele cunoscute $\mathfrak{Q}_1$ şi $\mathfrak{Q}_2$ şi reacţiunile necunoscute $\mathfrak{Q}_{31}$ şi $\mathfrak{Q}_{42}$ din cuplele cinematice exterioare, cum şi $\mathfrak{Q}_{21}=-\mathfrak{Q}_{12}$, reacţiunea din cupla cinematică interioară B.

Folosind principiul suprapunerii efectelor, se determină reacţiunile $\mathfrak{Q}^0_{31}$, $\mathfrak{Q}^0_{42}$ şi $\mathfrak{Q}^0_{12}$ cînd nu se ţine seamă de frecare. Mărimea lor este trasată cu linii întrerupte în planul forţelor (fig. I.102) construit la scara k_F:

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{31}=k_F(\overline{O_0a});\quad \overline{\mathfrak{Q}}^0_{42}=k_F(\overline{cO_0});\quad \overline{\mathfrak{Q}}^0_{21}=k_F(\overline{bO_0}).$$

După cum se ia în consideraţie frecarea, reacţiunile vor fi tangente la cercurile de frecare din A, B şi C.

Se presupune că vitezele unghiulare relative sînt cele indicate în fig. I.102, *a*, adică ω_{31}, ω_{12} şi ω_{42} rotesc invers acelor unui ceasornic.

Se consideră descărcat elementul *2*, asupra grupei acţionînd astfel numai $\mathfrak{Q}_1$. Deoarece în acest caz elementul *2* este supus la compresiune, direcţia reacţiunilor parţiale $\mathfrak{Q}'_{42}$ şi $\mathfrak{Q}'_{12}$ va fi tangenta interioară *aa* la cele două cercuri de frecare, care intersectează dreapta suport a lui $\mathfrak{Q}_1$ în D_1.

Din D_1 se duce tangenta D_1b la cercul de frecare din A, care este linia de acţiune a reacţiunii parţiale $\mathfrak{Q}'_{31}$; tangenta s-a dus ţinînd seamă de sensul lui $\mathfrak{Q}'_{31}$ şi de ω_{31}.

Mărimea reacţiunilor $\mathfrak{Q}'_{31}$ şi $\mathfrak{Q}'_{21}$ rezultă din planul forţelor unde s-a construit poligonul

$$\overline{\mathfrak{Q}}_1+\overline{\mathfrak{Q}}'_{21}+\overline{\mathfrak{Q}}_{31}=0.$$

Se consideră acum descărcat elementul *1*. In acest caz, direcţia reacţiunilor $\overline{\mathfrak{Q}}''_{31}=-\overline{\mathfrak{Q}}''_{21}$ este tangenta exterioară *cc* (elementul *AB* fiind supus la compresiune), care intersectează dreapta suport a lui $\mathfrak{Q}_2$ în punctul D_2. Din acest punct se duce tangenta D_2d la cercul de frecare din C, obţinîndu-se astfel direcţia reacţiunii parţiale $\mathfrak{Q}''_{42}$.

Mărimile lui $\overline{\mathfrak{Q}}''_{12}$ şi $\overline{\mathfrak{Q}}''_{42}$ se obţin din construcţia poligonului

$$\overline{\mathfrak{Q}}_2+\overline{\mathfrak{Q}}''_{42}+\overline{\mathfrak{Q}}''_{12}=0.$$

Mărimea reacţiunilor rezultă acum imediat din compunerea celor parţiale.

Astfel, din fig. I.102, *b* rezultă:

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{21}=\overline{\mathfrak{Q}}'_{21}+\overline{\mathfrak{Q}}''_{21}=k_F(\overline{bO})\,;$$

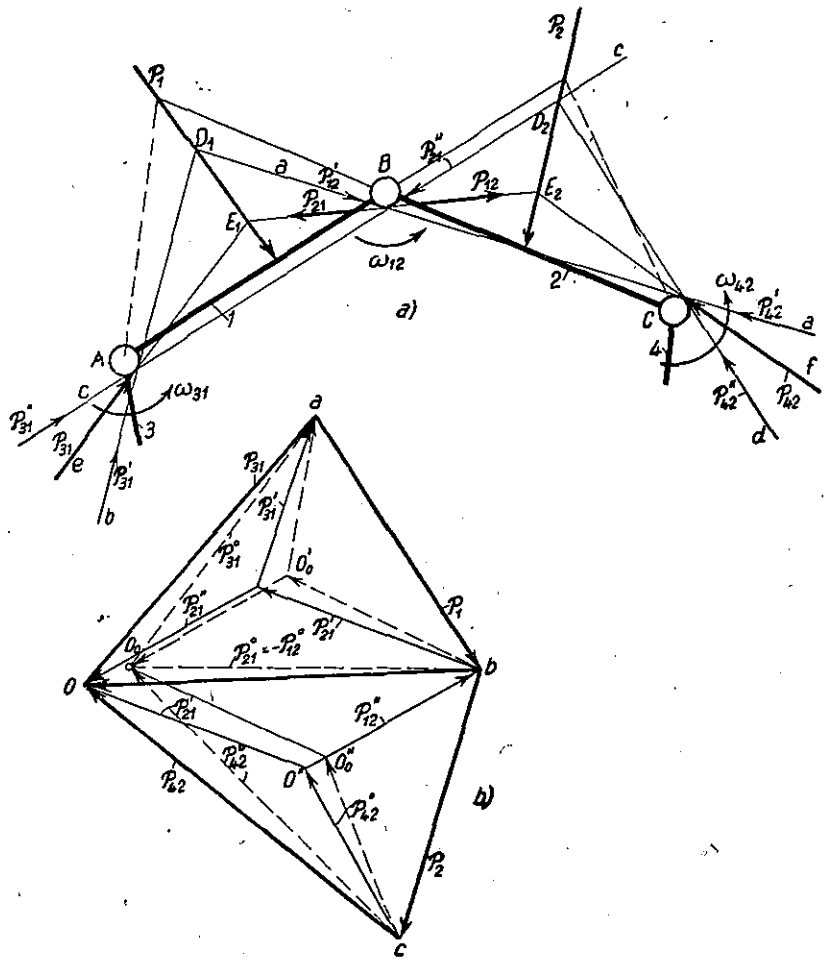


Fig. I.102. Cinetostatica grupei de clasa a II-a, ordinul 2 (diada), aspectul 1, dacă se ține seamă de frecarea din articulații.

și

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{42}=\overline{\mathfrak{Q}}''_{42}+\overline{\mathfrak{Q}}'_{42}=k_F(\overline{cO})\,;$$

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{31}=\overline{\mathfrak{Q}}''_{12}+\overline{\mathfrak{Q}}'_{31}=k_F(\overline{Oa}).$$

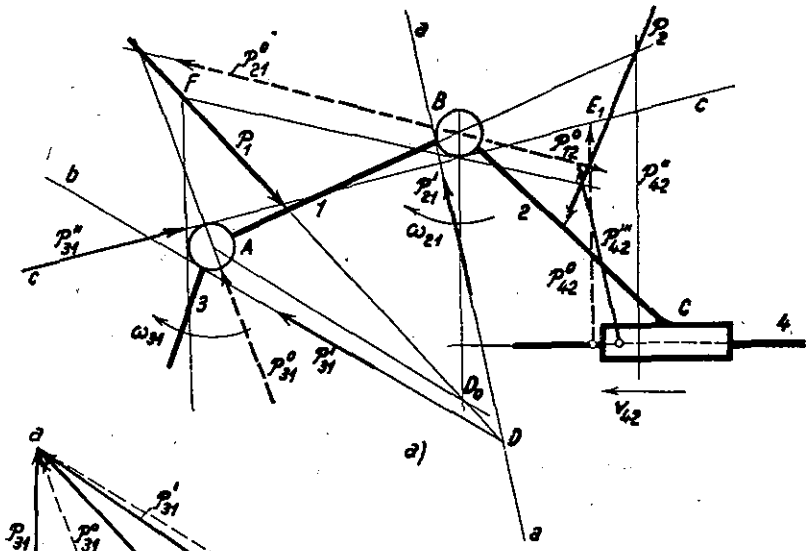
In planul grupei (fig. I.102, *a*) poligonul funicular va trebui să fie tangent la cercurile de frecare din A, B și C.

Astfel, tangenta $eE_1 \parallel \mathfrak{Q}_{31}$; $E_1E_2 \parallel \mathfrak{Q}_{12}$ și $E_2f \parallel \mathfrak{Q}_{42}$.

In cazul cînd, de exemplu, ultima tangentă E_2f nu este paralelă cu $\mathfrak{Q}_{42}$ din planul forțelor, calculul se poate reface, fie prin modificarea direcțiilor lui $\mathfrak{Q}_{42}$, deci și a lui $\mathfrak{Q}_{31}$, fie prin păstrarea direcțiilor rezultate din planul forțelor și prin modificarea cercurilor de frecare.

Date fiind însă dimensiunile reduse ale cercurilor de frecare față de lungimea elementelor, rezultatele obținute din prima construcție se pot considera suficient de exacte.

b) *Grupa de clasa a II-a, ordinul 2, aspectul 2* (fig. I.103). Folosind aceeași metodă a suprapunerii efectelor, se determină reacțiunile



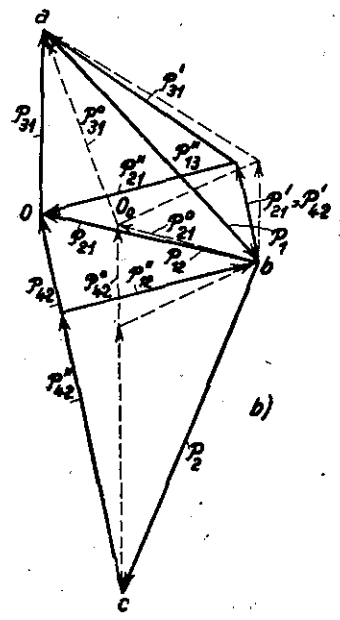


Fig. I.103. Cinetostatica grupei de clasa a II-a, ordinul 2, aspectul 2, dacă se ține seamă și de frecarea din cuplele cinematice.

$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{31}$, $\overline{\mathfrak{Q}}^0_{42}$ și $\overline{\mathfrak{Q}}^0_{21}$ cînd nu se ține seamă de frecare. Mărimile și direcțiile lor sînt trasate cu linii punctate în planul forțelor (fig. I.103, *b*) și în planul grupei (fig. I.103, *a*).

S-a obținut astfel:

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{31}=k_F(\overline{O_0a})\,;\quad \overline{\mathfrak{Q}}^0_{42}=k_F(\overline{cO_0})\,;$$

$$\overline{\mathfrak{Q}}^0_{21}=k_F(\overline{bO_0}).$$

Dacă acum se ia în considerație frecarea, reacțiunile parțiale vor fi tangente la cercurile de frecare din A și B și înclinate față de normala pe ghidajul 4 cu unghiul φ în sensul vitezei relative $\overline{v}_{42}$ (sau contrar lui $\overline{v}_{24}$).

Vitezele unghiulare relative ω_{31} și ω_{21} se rotesc în sensul acelor unui ceasornic.

Considerînd descărcat elementul 2, reacțiunea $\mathfrak{Q}'_{21}$ va avea direcția sa tangentă la cercul de frecare din B, făcînd unghiul φ cu ghidajul 4 în sens invers lui $v_{24}=-v_{42}$.

Ducînd din D — punctul de intersecție a lui aa cu $\mathfrak{Q}_1$ — tangenta Db la cercul de frecare din A, se obține direcția reacțiunii parțiale $\mathfrak{Q}'_{31}$.

Construcția poligonului (fig. I.103, b)

$$\overline{\mathfrak{Q}}_1+\overline{\mathfrak{Q}}'_{21}+\overline{\mathfrak{Q}}'_{31}=0$$

determină mărimile lui $\mathfrak{Q}'_{21}$ și $\mathfrak{Q}'_{31}$.

Considerînd descărcat elementul 1, direcția reacțiunii $\mathfrak{Q}''_{31}=\mathfrak{Q}''_{12}$ este tangenta interioară cc la cercurile de frecare din A și B, care intersectează pe $\mathfrak{Q}_2$ în E_1.

Reacțiunea $\mathfrak{Q}''_{42}$ trece prin E_1 și este paralelă cu $\mathfrak{Q}''_{21}$.

Mărimile rezultă din poligonul

$$\overline{\mathfrak{Q}}_2+\overline{\mathfrak{Q}}''_{42}+\overline{\mathfrak{Q}}''_{12}=0.$$

Suma reacțiunilor parțiale determină mărimile lui $\mathfrak{Q}_{21}$, $\mathfrak{Q}_{42}$ și $\mathfrak{Q}_{31}$:

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{21}=\overline{\mathfrak{Q}}'_{21}+\overline{\mathfrak{Q}}''_{21}=k_F(\overline{bO});$$

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{42}=\overline{\mathfrak{Q}}''_{42}+\overline{\mathfrak{Q}}'_{42}=k_F(\overline{cO});$$

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{31}=\overline{\mathfrak{Q}}''_{31}+\overline{\mathfrak{Q}}'_{12}=k_F(\overline{Oa}).$$

În planul grupei (fig. I.103, a) poligonul funicular al celor trei reacțiuni trebuie să fie tangent la cercurile de frecare din A și B și cu a treia latură înclinată cu unghiul de frecare φ față de normala pe ghidajul 4.

Erorile care rezultă sînt neglijabile pentru același motiv ca la grupa de aspectul 1.

Metoda indicată mai sus se poate aplica atunci cînd dreapta suport a rezultantei unice a forțelor de inerție și a greutății proprii a elementului trece printre centrele articulațiilor.

În caz contrar, aplicarea metodei suprapunerii efectelor sau a repartizării forțelor în articulații prezintă dificultăți pentru calculul grafic.

Dificultățile se elimină prin aplicarea calculului grafo-analitic.

Ca exemplu de calcul grafo-analitic se va face determinarea reacțiunilor la o grupă de clasa a II-a, aspectul 2 din mecanismul bielă-manivelă (fig. I.104, a).

Din mecanism s-a detașat grupa 23, asupra căreia acționează forța motoare $\mathfrak{Q}_M$, reacțiunile $\mathfrak{Q}^0_{43}$, $\mathfrak{Q}^0_{12}$, forța de inerție $\mathfrak{Q}_{i_2}$ și momentul forțelor de inerție M_{i_2}, dezvoltate de masa bielei, și forța de inerție $\mathfrak{Q}_{i_3}$ a masei pistonului 3.

Deoarece $\mathfrak{Q}_M$ și $\mathfrak{Q}_{i_3}$ au aceeași direcție, se va lua în calcul diferența lor

$$\overline{\mathfrak{Q}}_B=\overline{\mathfrak{Q}}_M-\overline{\mathfrak{Q}}_{i_3}.$$

Calculul se face întîi fără luarea în considerație a frecării.

Se determină reacțiunea $\mathfrak{Q}^0_{43}$, luînd momentele tuturor forțelor care acționează asupra grupei cinematice în raport cu centrul articulației A.

Cu notațiile din fig. I.104, b și considerînd $+$ semnul momentelor care se rotesc în sensul acelor unui ceasornic, se obține:

$$\mathfrak{Q}^0_{43}h_2+\mathfrak{Q}_{i_2}h_{12}-\mathfrak{Q}_Bh_1-M_{i_2}=0,$$

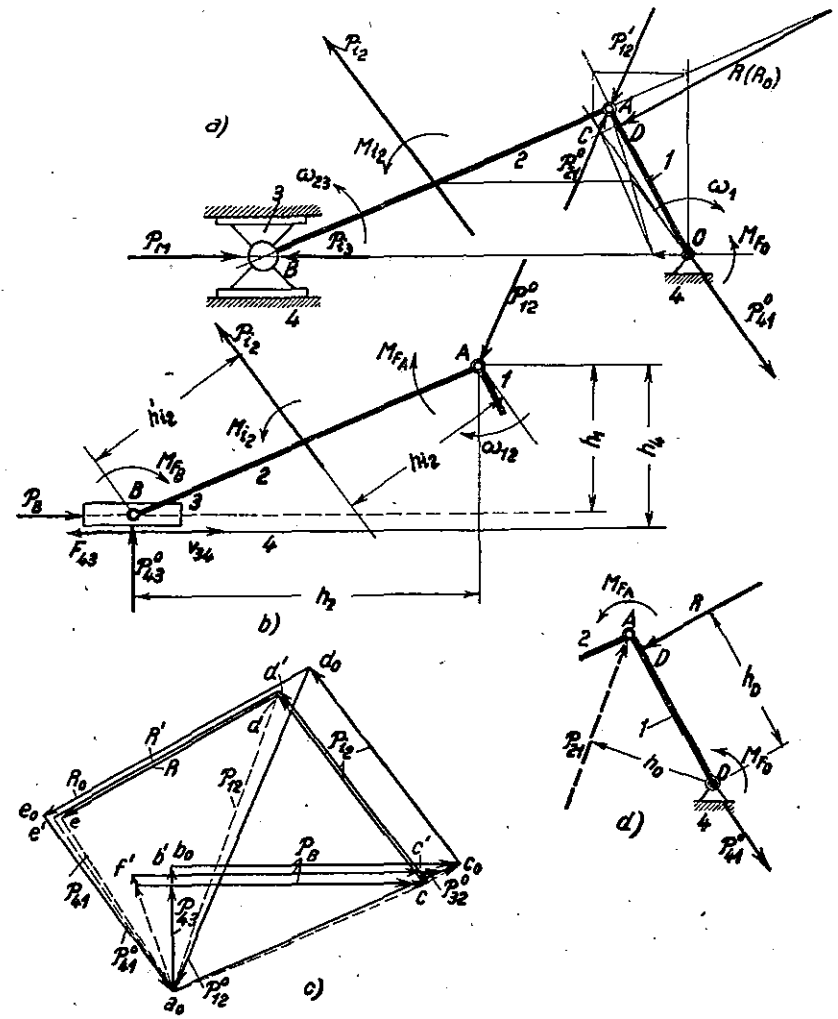


Fig. I.104. Cinetostatica grafo-analitică a mecanismului bielă-manivelă, ținînd seamă și de frecarea din cuplele cinematice.

de unde

$$\mathfrak{Q}_{43}^0 = \frac{1}{h_2}\,(\mathfrak{Q}_B h_1 + M_{i_2} - \mathfrak{Q}_{i_2} h_{12}). \qquad \text{(I.195)}$$

Reacţiunea $\mathfrak{Q}_{12}^0$ se determină din poligonul forţelor

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{43}^0 + \overline{\mathfrak{Q}}_B + \overline{\mathfrak{Q}}_{i_2} + \overline{\mathfrak{Q}}_{12}^0 = 0,$$

construit în planul forţelor din fig. I.104, *c*.

Se obţine astfel

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{12}^0 = k_F\,(\overline{d_0 a_0}).$$

Reacţiunea $\mathfrak{Q}_{23}^0$ rezultă din echilibrul capului de cruce:

$$\mathfrak{Q}_{32}^0 = -\mathfrak{Q}_{23}^0 = k_F(\overline{a_0 c_0}).$$

Rezistenţa tehnologică R_0 şi reacţiunea $\mathfrak{Q}_{41}$ se obţin scriind echilibrul manivelei *1*, după ce s-a determinat în prealabil direcţia lui $\mathfrak{Q}_{41}^0$, care trece prin punctul de intersecţie C a lui R_0 şi $\mathfrak{Q}_{21}^0$ (fig. I.104, *a*).

Din ecuaţia de echilibru

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{21}^0 + \overline{R}_0 + \overline{\mathfrak{Q}}_{41}^0 = 0,$$

rezultă:

$$\overline{R}_0 = k_F(\overline{d_0 e_0}) \quad \text{şi} \quad \overline{\mathfrak{Q}}_{41}^0 = k_F\,(\overline{e_0 a_0}).$$

Cu ajutorul reacţiunilor astfel determinate se calculează momentele de frecare din articulaţiile O, A şi B şi forţa de frecare dintre capul de cruce şi ghidaj.

Acestea sînt:

$$M_{F_O} = \mathfrak{Q}_{41}^0 \mu_0 r_0;$$

$$M_{F_A} = \mathfrak{Q}_{12}^0 \mu_A r_A;$$

$$M_{F_B} = \mathfrak{Q}_{32}^0 \mu_B r_B;$$

$$F_{43} = \mathfrak{Q}_{43}^0 \mu_{43}.$$

Aceste momente de frecare şi forţa de frecare se introduc acum în ecuaţiile de echilibru ale grupei (*23*) şi a manivelei, determinîndu-se noile reacţiuni $\mathfrak{Q}_{43}$, $\mathfrak{Q}_{12}$, $\mathfrak{Q}_{41}$ şi $\mathfrak{Q}_{32}$.

Din ecuaţia de momente în raport cu A a grupei bielă-cap de cruce rezultă:

$$\mathfrak{Q}_{43} h_2 + F_{43} h_4 + \mathfrak{Q}_{i_2} h_{i_2} - \mathfrak{Q}_B h_1 - M_{i_2} + M_{F_B} + M_{F_A} = 0,$$

de unde

$$\mathfrak{Q}_{43} = \frac{1}{h_2}\,(\mathfrak{Q}_B h_1 + M_{i_2} - \mathfrak{Q}_{i_2} h_{i_2} - F_{43} h_4 - M_{F_A} - M_{F_B}). \qquad \text{(I.196)}$$

Se vede că

$$\mathfrak{Q}_{43} < \mathfrak{Q}_{43}^0,$$

după cum uşor se poate constata din compararea formulelor (I.196) şi (I.195).

Reacţiunea $\mathfrak{Q}_{12}$ se determină acum din poligonul forţelor

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{43} + \overline{F}_{43} + \overline{\mathfrak{Q}}_B + \overline{\mathfrak{Q}}_{i_2} + \overline{\mathfrak{Q}}_{12} = 0,$$

construit cu linii întrerupte în planul forţelor din fig. I.104, *c*.

Se obţine:

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{12} = k_F\,(\overline{d a_0}).$$

Reacţiunea $\mathfrak{Q}_{23}$ rezultă la fel ca în primul caz

$$\mathfrak{Q}_{32} = -\mathfrak{Q}_{23} = k_F\,(\overline{a_0 c}).$$

Rezistenţa tehnologică R şi reacţiunea $\mathfrak{Q}_{41}$ se obţin din echilibrul manivelei *1* (fig. I.104, *d*).

Din ecuaţia de momente în raport cu punctul O rezultă

$$\mathfrak{Q}_{21} h_0 - R h_D - M_{F_A} - M_{F_O} = 0,$$

de unde

$$R = \frac{1}{h_D}\,(\mathfrak{Q}_{21} h_0 - M_{F_A} - M_{F_O}). \qquad \text{(I.197)}$$

Se vede imediat că

$$R < R_0.$$

Cu R şi $\mathfrak{Q}_{21}$ se construieşte poligonul forţelor

$$\overline{\mathfrak{Q}}_{21} + \overline{R} + \overline{\mathfrak{Q}}_{41} = 0,$$

de unde rezultă (fig. I.104, *c*)

$$\mathfrak{Q}_{41} = k_F\,(\overline{e a_0}).$$

Calculul grafo-analitic se continuă acum la fel ca şi precedentul, după cum urmează:

Cu noile valori ale reacţiunilor se calculează noile valori ale momentelor şi forţelor de frecare:

$$M'_{F_O} = \mathfrak{Q}_{41} \mu_0 r_0 < M_{F_O};$$

$$M'_{F_A} = \mathfrak{Q}_{12} \mu_A r_A < M_{F_A};$$

$$M'_{F_B} = \mathfrak{Q}_{32} \mu_B r_B < M_{F_B}; \qquad \text{(I.198)}$$

$$F'_{43} = \mathfrak{Q}_{43} \mu_{43} < F_{43}.$$

Din formula (I.87) se determină:

$$\mathfrak{Q}'_{43} = \frac{1}{h_2}\,(\mathfrak{Q}_B h_1 + M_{i_2} - \mathfrak{Q}_{i_2} h_{i_2} - F_{43} h_4 - M_{F_A} - M_{F_O}). \qquad \text{(I.199)}$$

Din compararea formulelor (I.195)—(I.198) se vede că

$$\mathfrak{Q}_{43} < \mathfrak{Q}'_{43} < \mathfrak{Q}^0_{43}.$$

In consecinţă, din construcţia poligonului forţelor

$$\overline{\mathfrak{Q}}'_{43} + \overline{F}'_{43} + \overline{\mathfrak{Q}}_B + \overline{\mathfrak{Q}}_{i_2} + \overline{\mathfrak{Q}}'_{12} = 0$$

va rezulta de asemenea

$$\mathfrak{Q}_{12} < \mathfrak{Q}'_{12} < \mathfrak{Q}^0_{12}.$$

Poligonul $a_0b'f'c'd'e'a_0$ este cuprins între celelalte două poligoane: $a_0b_0c_0d_0e_0a_0$ şi $a_0bfcdea_0$.

De aici rezultă că şi

$$R < R' < R_0.$$

De obicei, două construcţii succesive de poligoane de forţe prin luarea în consideraţie a frecării sînt suficiente pentru a obţine o exactitate satisfăcătoare pentru valorile reacţiunilor şi ale rezistenţei tehnologice.

Pentru mecanisme cu un număr apreciabil de elemente, calculul prin aproximaţii succesive indicat mai sus este destul de laborios. Cea mai rapidă determinare a forţelor de frecare ale unui mecanism, reduse la punctul de aplicaţie al forţei exterioare cunoscute (forţa motoare sau rezistenţa tehnologică), rămîne tot cu ajutorul metodei lucrului mecanic virtual sau al pîrghiei lui N.E. Jukovski.

18.6. Calculul analitic al forţelor de frecare şi al reacţiunilor la un mecanism bielă-manivelă

Metoda expusă în § 18.5 foloseşte calculul grafic şi se aplică la orice mecanisme.

Deoarece mecanismul motor bielă-manivelă este cel mai des utilizat, se va da mai jos şi o metodă analitică a calculului reacţiunilor din articulaţii şi al forţelor şi momentelor de frecare, la un motor vertical.

In mecanismul bielă-manivelă se va porni de la forţele care acţionează asupra pistonului, apoi asupra bielei şi, în sfîrşit, asupra manivelei. Exemplul este dat ca un criteriu de comparaţie faţă de metoda expusă în subparagraful anterior.

18.6.1. Forţele care acţionează asupra pistonului

In fig. I.105 sînt arătate forţele care solicită pistonul motorului.

In figură sînt reprezentate:

$\mathfrak{Q}_3 = \frac{\pi D^2}{4} p$ — forţa datorită presiunii din cilindru determinată din diagrama indicată (sau teoretică) a maşinii;

$\mathfrak{Q}''_{43}$ — reacţiunea cilindrului asupra pistonului (necunoscută);

$\mu_3 \mathfrak{Q}''_{43}$ — frecarea datorită reacţiunii $\mathfrak{Q}''_{43}$ (necunoscută);

$\mathfrak{Q}^y_{23}$, $\mathfrak{Q}^x_{23}$ — componentele după direcţia bielei şi perpendiculară pe aceasta a reacţiunii $\mathfrak{Q}_{23}$ a bielei asupra bulonului de articulaţie B (necunoscută);

$M_{F_B} = \mu_2 r_2 \mathfrak{Q}_{23}$, unde $\overline{\mathfrak{Q}}_{23} = \overline{\mathfrak{Q}}^y_{23} + \overline{\mathfrak{Q}}^x_{23}$ reprezintă momentul de frecare opus de bulonul de articulaţie dintre bielă şi piston; sensul este determinat de sensul vitezei unghiulare instantanee ω_2 a bielei (mărime necunoscută din cauza lui $\mathfrak{Q}_{23}$);

$\mathfrak{Q}'_{43}$ — forţa de frecare opusă de cilindru, datorită presiunii cercurilor de piston şi independentă de frecarea $\mu_3 \mathfrak{Q}''_{43}$; ea se poate determina pentru o anumită maşină [1];

G_3 — greutatea pistonului care acţionează în B (un calcul exact ar conduce la ducerea rezultantei forţelor $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{Q}''_{43}$ şi G_3 tangentă la cercul de frecare al bulonului de articulaţie de rază r_2.

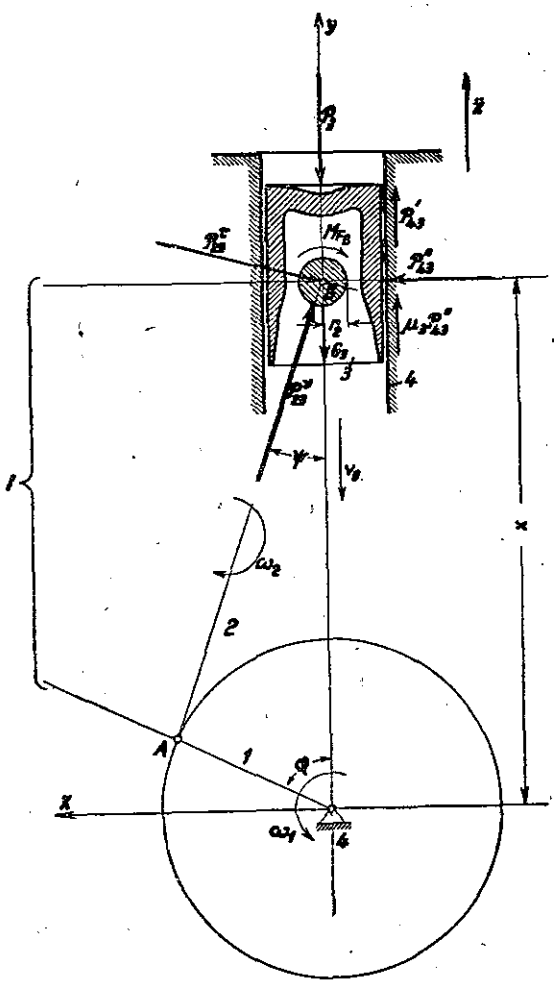


Fig. I.105. Forţele şi momentele care acţionează asupra pistonului unui motor.

Dacă se scrie echilibrul pistonului sub acţiunea acestor forţe, se obţin ecuaţiile următoare (proiecţiile după x şi y):

[1]) v. bibliografia dată la § 13.3, aplicaţia 4, pag. 86.

$$\mathfrak{Q}_3-\mathfrak{Q}_{23}^{\nu}\cos\psi+\mathfrak{Q}_{23}^{\tau}\sin\psi\mp\mathfrak{Q}'_{43}\mp\mu_3\mathfrak{Q}''_{43}+G_3\left(1+\frac{\ddot{x}}{g}\right)=0, \tag{I.200}$$

$$\mathfrak{Q}_{23}^{\nu}\sin\psi+\mathfrak{Q}_{23}^{\tau}\cos\psi-\mathfrak{Q}''_{43}=0. \tag{I.201}$$

Semnul — se utilizează pentru mişcarea în jos a pistonului ($0\leqq\varphi\leqq\pi$), iar + pentru cursa de ridicare ($\pi\leqq\varphi\leqq2\pi$).

18.6.2. Forţele care acţionează asupra bielei motoare (fig. I.106)

Studiul se poate face mai comod dacă greutatea G_2 a bielei se înlocuieşte prin două mase de greutăţi G_A şi G_B concentrate în centrele articulaţiilor A, respectiv B, după metoda cunoscută (partea I, § 5.2, *b*).

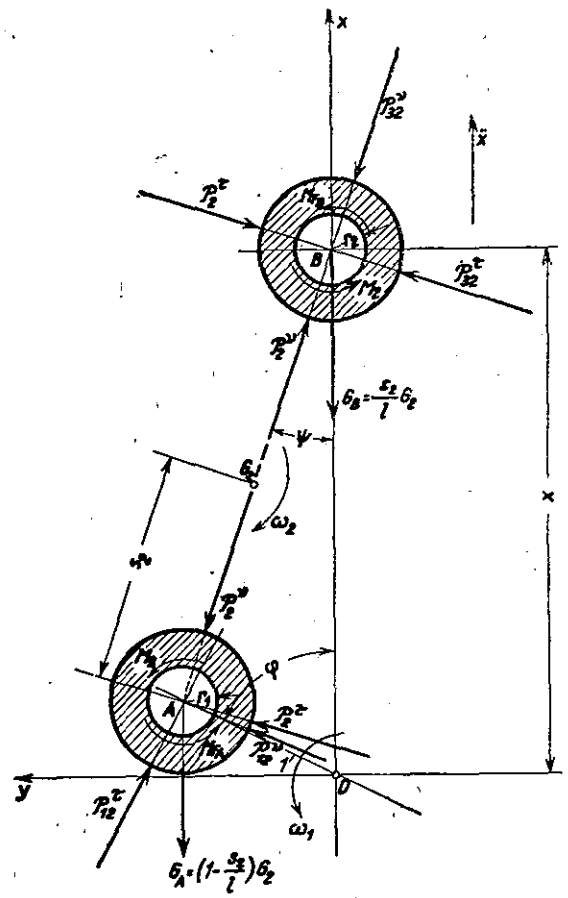


Fig. I.106. Forţele şi momentele care acţionează asupra maselo rreduse m_A şi m_B ale bielei motorului.

Asupra acestor mase acţionează următoarele forţe:

1) *Asupra masei* m_B *de greutate* $G_B=\frac{s_2}{l}\times G_2$, unde G_2 este greutatea bielei, iar s_2 — distanţa de la articulaţia A pînă la centrul de greutate G_2 al bielei de lungime l:

$\mathfrak{Q}_{32}^{\nu}, \mathfrak{Q}_{32}^{\tau}$ — reacţiunile bulonului de articulaţie B (necunoscute);

$M'_{F_B}=-M_{F_B}$ — momentul de frecare opus de bulonul de articulaţie dintre masa m_B şi piston. (In desen se notează M_{F_B} cu sens schimbat).

Afară de aceste forţe şi moment, asupra masei m_B acţionează şi reacţiunile legăturii rigide dintre m_A şi m_B, echivalentă cu o încastrare, deci cu trei necunoscute, şi anume:

$\mathfrak{Q}_2^{\nu}, \mathfrak{Q}_2^{\tau}$ — componentele după direcţia şi normala pe direcţia bielei;

M_2 — momentul de încastrare.

In sfîrşit, asupra masei m_B acţionează şi greutatea proprie:

$$G_B=\frac{s_2}{l}G_2.$$

2) *Asupra masei* m_A *de greutate* $G_A=\left(1-\frac{s_2}{l}\right)G_2$, *concentrată în A, acţionează forţele:*

$\mathfrak{Q}_2^{\nu}, \mathfrak{Q}_2^{\tau}$ — datorite legăturii rigide dintre masele m_A şi m_B (necunoscute);

M_3 — momentul de încastrare datorit aceleiaşi legături rigide (necunoscut);

$\mathfrak{Q}_{12}^{\nu}, \mathfrak{Q}_{12}^{\tau}$ — forţa tangenţială, respectiv normală, a butonului de manivelă *1* asupra masei m_A (necunoscute);

$M_{F_A}=\mu_1 r_1\mathfrak{Q}_{12}$ (unde $\overline{\mathfrak{Q}}_{12}=\overline{\mathfrak{Q}}_{12}^{\nu}+\overline{\mathfrak{Q}}_{12}^{\tau}$) reprezintă momentul de frecare opus de butonul de manivelă (necunoscut, deoarece $\mathfrak{Q}_{12}$ este necunoscut);

$G_A=\left(1-\frac{s_2}{l}\right)G_2$ — partea din masa bielei concentrată în A.

Ecuaţiile de legătură dintre m_A şi m_B şi de echilibru ale greutăţilor G_A şi G_B, proiectate pe axele Ox şi Oy, rezultă uşor dacă se urmăreşte fig. I.106.

Astfel, legătura rigidă dintre cele două mase concentrate în A şi B se traduce prin ecuaţia

$$l\overline{\mathfrak{Q}}_2^{\tau}-M_2-M_3=0. \tag{I.202}$$

— Echilibrul masei m_B dă:

proiecţia după x:

$$(\mathfrak{Q}_2^{\nu}-\mathfrak{Q}_{32}^{\nu})\cos\psi+(\mathfrak{Q}_{32}^{\tau}-\mathfrak{Q}_2^{\tau})\sin\psi-\frac{s_2}{l}G_2\left(1+\frac{\ddot{x}}{g}\right)=0; \tag{I.203}$$

proiecţia după y:

$$-(\mathfrak{Q}_2^{\nu}-\mathfrak{Q}_{32}^{\nu})\sin\psi+(\mathfrak{Q}_{32}^{\tau}-\mathfrak{Q}_2^{\tau})\cos\psi=0; \tag{I.204}$$

momentul în jurul lui O:

$$M_{F_B}+M_2+r_B^2 m_B\varepsilon_2=0, \tag{I.205}$$

în care:

r_B este raza de giraţie a masei m_B;

ε_2 — acceleraţia unghiulară a bielei;

$r_B^2 m_B$ — momentul de inerţie al masei m_B în raport cu punctul B.

— Echilibrul masei m_A dă:

$$\mathfrak{Q}_{12}^{\tau}\sin\varphi+\mathfrak{Q}_{12}^{\nu}\cos\varphi-\mathfrak{Q}_2^{\nu}\cos\psi+\mathfrak{Q}_2^{\tau}\sin\psi-\left(1-\frac{s_2}{l}\right)G_2\left(1-\frac{r\omega_1^2\cos\varphi}{g}\right)=0; \tag{I.206}$$

$$-\mathfrak{Q}_{12}^{\tau}\cos\varphi+\mathfrak{Q}_{12}^{\nu}\sin\varphi+\mathfrak{Q}_2^{\nu}\sin\psi+\mathfrak{Q}_2^{\tau}\cos\psi+\left(1-\frac{s_2}{l}\right)\frac{G_2}{g}r\omega_1^2\sin\varphi=0; \tag{I.207}$$

$$M_{F_A}+M_3+r_A^2 m_A\varepsilon_2=0, \tag{I.208}$$

în care:

r_A este raza de giraţie a masei m_A;

$r_A^2 m_A$ — momentul de inerţie al masei m_A în raport cu punctul A.

18.6.3. Forţele care acţionează asupra manivelei 1 (fig. I.107)

Asupra manivelei *1* acţionează următoarele forţe, indicate în figură cu sensurile corespunzătoare:

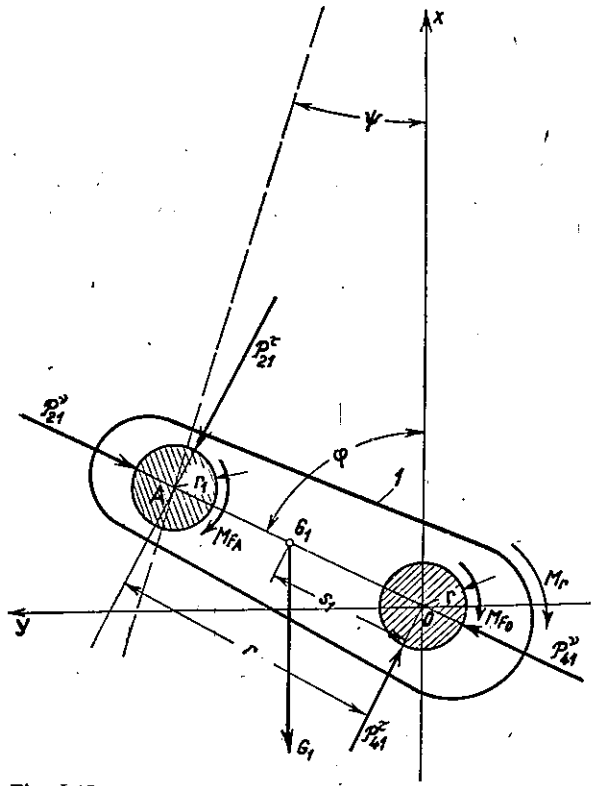


Fig. I.107. Forţele şi momentele care acţionează asupra manivelei motoare.

$\mathfrak{P}_{21}^{\nu}$, $\mathfrak{P}_{21}^{\tau}$, M_{F_A} — reacţiunile masei reduse m_A (necunoscute);

$\mathfrak{P}_{41}^{\nu}$, $\mathfrak{P}_{41}^{\tau}$ — componentele după axa şi perpendiculara la axa manivelei (necunoscute);

$M_{F_O}=\mu r \mathfrak{P}_{41}$ (unde $\overline{\mathfrak{P}}_{41}=\overline{\mathfrak{P}}_{41}^{\nu}+\overline{\mathfrak{P}}_{41}^{\tau}$) — momentul de frecare, opus de lagărul batiului (necunoscut, deoarece $\mathfrak{P}_{41}$ este necunoscut);

M_r — momentul rezistenţei tehnologice;

G_1 — greutatea manivelei.

Din ecuaţiile de echilibru ale manivelei rezultă:

proiecţia după direcţia axei manivelei:

$$\mathfrak{P}_{41}^{\nu}-\mathfrak{P}_{21}^{\nu}+\frac{G_1}{g}s_1\omega_1^2-G_1\cos\varphi=0; \tag{I.209}$$

proiecţia după direcţia $\perp$ pe manivelă:

$$\mathfrak{P}_{41}^{\tau}-\mathfrak{P}_{21}^{\tau}+\frac{G_1}{g}s_1\varepsilon_1-G_1\sin\varphi=0; \tag{I.210}$$

ecuaţia de momente în jurul lui O:

$$r\mathfrak{P}_{21}^{\tau}-M_{F_A}-M_{F_O}-I_{1_O}\varepsilon_1+G_1 s_1\sin\varphi-M_r=0. \tag{I.211}$$

18.6.4. Rezolvarea ecuaţiilor (I.200) — (I.211)

In total, deci, metoda analitică a calculului cinetostatic, cu luarea în consideraţie şi a frecării, comportă determinarea a 14 necunoscute, şi anume:

$$\mathfrak{P}_{23}^{\nu};\ \mathfrak{P}_{23}^{\tau};\ \mathfrak{P}_{43}^{\tau};\ M_{F_B}=\mu_2 r_2 \mathfrak{P}_{23};\ \mathfrak{P}_2^{\nu};\ \mathfrak{P}_2^{\tau};\ M_2;\ M_3;\ \mathfrak{P}_{12}^{\tau};\ \mathfrak{P}_{12}^{\nu};$$

$$M_{F_A}=\mu_1 r_1 \mathfrak{P}_{21};\ \mathfrak{P}_{41}^{\nu};\ \mathfrak{P}_{41}^{\tau};\ M_{F_O}=\mu r \mathfrak{P}_{41}.$$

Pentru aflarea lor sînt la dispoziţie cele 12 ecuaţii (I.200—I.211), la care se adaugă cele trei relaţii care dau momentele de frecare M_{F_B}; M_{F_A} şi M_{F_O}.

A 15-a necunoscută poate fi: sau momentul rezistent M_r, cînd se dă mişcarea motorului, sau mişcarea motorului, cînd se dă M_r.

A doua situaţie constituie problema de dinamică ce se va trata în partea II, cap. II.

Mai jos se va rezolva acest sistem de 15 ecuaţii, aproximînd valorile acceleraţiei $\ddot{x}$ a pistonului din ecuaţiile (I.200) şi (I.203) şi acceleraţiei unghiulare ε_2 a bielei din ecuaţiile (I.205) şi (I.208).

Se va înlocui astfel $\ddot{x}$ prin:

$$\ddot{x}=-r\omega_1^2(\cos\varphi+\lambda\cos 2\varphi) \tag{I.212}$$

şi ε_2 prin:

$$\varepsilon_2=-\lambda\omega_1^2\sin\varphi. \tag{I.213}$$

Expresia (I.213) s-a dedus din formula cunoscută $\sin\psi=\lambda\sin\varphi$, derivată de două ori şi în care s-a considerat apoi $\cos\psi\cong 1$.

In calcule, valoarea lui $\mu_3\mathfrak{P}_{43}^{n}$ din ecuaţia (I.200) se neglijează faţă de $\mathfrak{P}_3$, deoarece este mică ($\mu_3 \leqslant 0{,}1$).

De asemenea se poate neglija şi $\mathfrak{P}_{43}$.

Prin adunarea ecuațiilor (I.202), (I.205) și (I.208), se obține:

$$l\mathfrak{Q}_2^x + M_{F_A} + M_{F_B} + (r_A^2 m_A + r_B^2 m_B)\,\varepsilon_2 = 0, \tag{I.214}$$

dar din condiția egalității momentelor de inerție ale maselor m_A și m_B în raport cu centrul de greutate al bielei cu I_{G_2} al bielei rezultă:

$$I_{G_2} = (r_A^2 + s_2^2)\,m_A + [r_B^2 + (l - s_2)^2]\,m_B,$$

de unde:

$$r_A^2 m_A + r_B^2 m_B = I_{G_2} - s_2\,(l - s_2)\,m_2. \tag{I.215}$$

Ținînd seamă de (I.213) și de (I.215), expresia (I.214) devine:

$$\mathfrak{Q}_2^x = -\frac{M_{F_A} + M_{F_B}}{l} + [I_{G_2} - s_2\,(l - s_2)\,m_2]\,\frac{r}{l^2}\,\omega_1^2 \sin\varphi. \tag{I.216}$$

Deoarece atît M_{F_A}, M_{F_B} cît și $\frac{I_{G_2} - s_2\,(l-s_2)\,m_2}{l^2}$ sînt foarte mici, se poate considera

$$\mathfrak{Q}_2^x = 0. \tag{I.217}$$

După înlocuirea lui $\ddot{x}$ în (I.200) și (I.203), din rezolvarea ecuațiilor (I.200), (I.201), (I.203) și (I.204) se obține, după ce s-a pus $\cos\psi \cong 1$ și $\sin\psi = \lambda\sin\varphi$: reacțiunile bulonului de articulație din B:

$$\mathfrak{Q}_{23}^y = \mathfrak{Q}_3 + G_3\left[1 - \frac{r\omega_1^2}{g}\,(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi)\right]; \tag{I.218}$$

$$\mathfrak{Q}_{23}^x = \frac{s_2\lambda}{l}\,G_2\left(\sin\varphi - \frac{r\omega_1^2}{2g}\sin 2\varphi\right); \tag{I.219}$$

reacțiunea cilindrului asupra pistonului:

$$\mathfrak{Q}_{43}'' = \lambda\mathfrak{Q}_3\sin\varphi + \lambda\left(\frac{s_2}{l}\,G_2 + G_3\right)\left(\sin\varphi - \frac{r\omega_1^2}{2g}\sin 2\varphi\right), \tag{I.220}$$

și forța „imaginară" din bielă, corespunzătoare legăturii rigide dintre cele două mase concentrate:

$$\mathfrak{Q}_2^y = \mathfrak{Q}_3 + \left(\frac{s_2}{l}\,G_2 + G_3\right)\left[1 - \frac{r\omega_1^2}{g}\,(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi)\right]. \tag{I.221}$$

Forța reală din bielă este variabilă în lungul acesteia, pornind de la valorile $\mathfrak{Q}_{23}^y$ și $\mathfrak{Q}_{23}^x$ la bulonul de articulație din B, pînă la $\mathfrak{Q}_{12}^y$ și $\mathfrak{Q}_{12}^x$ la butonul de manivelă din A.

Forța $\mathfrak{Q}_2^y$ se consideră însă ca forță axială din bielă și se utilizează ca atare în calculele mai exacte.

Înlocuind acum valorile lui $\mathfrak{Q}_2^x = 0$ și $\mathfrak{Q}_2^y$ în ecuațiile (I.206) și (I.207), se obțin reacțiunile de la butonul de manivelă A:

$$\mathfrak{Q}_{12}^x = \mathfrak{Q}_3\left(\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right) + \left(1 - \frac{s_2}{l}\right)G_2\sin\varphi + \left(\frac{s_2}{l}\,G_2 + G_3\right)\times$$

$$\times\left[\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi - \frac{r\omega_1^2}{2g}\left(\sin 2\varphi - \frac{1}{2}\lambda\sin\varphi + \frac{3}{2}\lambda\sin 3\varphi\right)\right]; \tag{I.222}$$

$$\mathfrak{Q}_{12}^y = \mathfrak{Q}_3\left[\cos\varphi - \frac{\lambda}{2}(1 - \cos 2\varphi)\right] + \left(1 - \frac{s_2}{l}\right)G_2\left(\cos\varphi - \frac{r\omega_1^2}{g}\right) +$$

$$+ \left(\frac{s_2}{l}\,G_2 + G_3\right)\left[\cos\varphi - \frac{\lambda}{2}(1 - \cos 2\varphi) - \frac{r\omega_1^2}{2g}\left(1 + \cos 2\varphi + \frac{\lambda}{2}\cos\varphi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3\lambda}{2}\cos 3\varphi\right)\right]. \tag{I.223}$$

Formulele complicate ale celor două componente de mai sus se pot întrucîtva simplifica dacă variația lui $\mathfrak{Q}_3$ este dată de o diagramă indicată.

Acest lucru se va arăta în partea II, cap. II, § 14.

În sfîrșit, din ecuațiile (I.209) și (I.210), în care se face $\dot{\omega}_1 = \varepsilon_1 = 0$, se obțin componentele reacțiunii $\mathfrak{Q}_{41}$:

$$\mathfrak{Q}_{41}^x = \mathfrak{Q}_{21}^x + G_1\sin\varphi; \tag{I.224}$$

$$\mathfrak{Q}_{41}^y = \mathfrak{Q}_{21}^y + G_1\left(\cos\varphi - \frac{s_1\omega_1^2}{g}\right). \tag{I.225}$$

Ecuațiile (I.217)—(I.225) constituie rezolvarea problemei ce s-a pus.

Sînt de remarcat o serie de precizări importante, și anume:

a) La motoarele cu viteze de rotație ω_1 mari, forțele de inerție sînt apreciabile și nu pot fi neglijabile; termenii corespunzători greutății elementelor (G_1, G_2, G_3) pot fi însă neglijați, deoarece au valori foarte mici în raport cu forța $\mathfrak{Q}_3$ a pistonului și cu forțele de inerție.

b) Într-o primă aproximație se pot neglija termenii care conțin pe λ (cu excepția acelora care înmulțesc pe $\mathfrak{Q}_3$ și pe $\frac{r\omega_1^2}{2g}$. În acest caz, valorile reacțiunilor și ale forțelor din ecuațiile (I.216)—(I.225) devin:

$$\mathfrak{Q}_2^x = -\frac{M_{F_A} + M_{F_B}}{l} \cong 0; \tag{I.216'}$$

$$\mathfrak{Q}_{23}^y = \mathfrak{Q}_3 - \frac{G_3}{g}\,r\omega_1^2(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi); \tag{I.218'}$$

$$\mathfrak{Q}_{23}^x = -\frac{G_2}{g}\,s_2\lambda^2\omega_1^2\sin 2\varphi \cong 0; \tag{I.219'}$$

$$\mathfrak{Q}'_{43}=\lambda\mathfrak{Q}_3\sin\varphi-\lambda\left(\frac{s_2}{l}G_2+G_3\right)\frac{r\omega_1^2}{2g}\sin 2\varphi; \tag{I.220'}$$

$$\mathfrak{Q}'_2=\mathfrak{Q}_3-\left(\frac{s_2}{l}G_2+G_3\right)\frac{r\omega_1^2}{g}(\cos\varphi+\lambda\cos 2\varphi); \tag{I.221'}$$

$$\mathfrak{Q}'_{12}=\mathfrak{Q}_3\left(\sin\varphi+\frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right)-\left(\frac{s_2}{l}G_2+G_3\right)\frac{r\omega_1^2}{2g}\left(\sin 2\varphi-\frac{\lambda}{2}\sin\varphi+\frac{3\lambda}{2}\sin 3\varphi\right), \tag{I.222'}$$

$$\mathfrak{Q}'_{12}=\mathfrak{Q}_3\left[\cos\varphi-\frac{\lambda}{2}(1-\cos 2\varphi)\right]-\frac{G_2}{g}\left(1-\frac{s_2}{l}\right)r\omega_1^2-$$

$$-\left(\frac{s_2}{l}G_2+G_3\right)\frac{r\omega_1^2}{2g}\left(1+\cos 2\varphi+\frac{\lambda}{2}\cos\varphi+\frac{3\lambda}{2}\cos 3\varphi\right); \tag{I.223'}$$

$$\mathfrak{Q}'_{41}=\mathfrak{Q}'_{21}; \tag{I.224'}$$

$$\mathfrak{Q}'_{41}=\mathfrak{Q}'_{21}-\frac{G_1}{g}s_1\omega_1^2. \tag{I.225'}$$

Formulele de mai sus se pot utiliza cu succes la calculul unui anteproiect, după care, apoi, se pot folosi mai departe formulele (I.216)—(I.225).

§ 19. FRECAREA LICHIDĂ ÎN CUPLELE DE ROTAȚIE ȘI DE TRANSLAȚIE

19.1. Noțiuni generale

In cazul cînd suprafețele elementelor unei cuple cinematice sînt separate între ele printr-un strat (film) continuu de ulei, atunci în timpul mișcării relative dintre ele apare o forță de frecare, care depinde de natura lubrifiantului, de viteza relativă dintre cele două suprafețe și de presiunea la care se află lubrifiantul.

Condiția pentru formarea stratului (filmului) de ulei este capacitatea lui de a „umezi" suprafețele de frecare datorită forței de aderență. Lichidele care au această proprietate pot fi folosite ca lubrifianți. Ca lubrifianți se menționează uleiurile vegetale, grăsimile animale și uleiurile minerale.

Ultimele au astăzi utilizarea cea mai răspîndită în tehnică și introducerea lor se datorește profesorului rus N. P. Petrov, care în anul 1883, a publicat și prima lucrare în legătură cu teoria hidrodinamică a ungerii.

Inainte de a prezenta studiul fenomenului frecării lichide (§ 19.2), bazat pe rezolvarea ecuației Navier-Stockes, se vor da cîteva indicații elementare, necesare pentru a se avea o privire de ansamblu asupra problemei frecării lichide.

Posibilitatea de apariție a frecării lichide în cazul cînd asperitățile celor două suprafețe nu vin în contact unele cu altele (fig. I.68) depinde, în primul

rînd, de forța de aderență a uleiului la diferite metale, creată de proprietatea lui de „umezire" (umectare), datorită cîmpului de forțe ale moleculelor metalice din stratul limită al cuzinetului.

Astfel, compozițiile pe bază de staniu și de plumb sînt umezite de ulei mai bine decît bronzul, iar bronzul — mai bine decît aluminiul. De aceea primele au căpătat o utilizare atît de întinsă în construcția lagărelor. Grafitul coloidal accentuează proprietatea de umezire (umectare) a uleiurilor.

Pentru a putea realiza un strat de lubrifiant în timpul funcționării mecanismului este necesar ca rezistența opusă alunecării dintre stratul limită și suprafața umezită să fie mai mare decît rezistența dintre straturile interioare ale lubrifiantului.

Dacă lichidul nu umezește suprafețele, frecarea interioară este mai mare decît rezistența dintre stratul limită de ulei și suprafața metalului. In consecință, lichidul este expulzat dintre suprafețele cuplei cinematice.

Realizarea filmului de ulei între suprafețele cuplei cinematice reduce frecarea uscată la alunecări ale straturilor de lubrifianți (alunecare vîscoasă) și, drept urmare, lagărele, cuzinetii sau ghidajele la care se poate reuși acest lucru nu vor prezenta, timp de ani, semne de uzură a suprafețelor.

Fenomenul care apare în interiorul unui fluid cînd iau naștere tensiuni tangențiale la orice element de suprafață ideală, care separă două porțiuni de fluid, atunci cînd acestea au o mișcare relativă de alunecare una față de alta, se datorește viscozității dinamice.

Forța de frecare care ia naștere în timpul alunecării relative a celor două suprafețe ideale este dată de legea lui Newton

$$dF=\eta\,dA\frac{\delta v}{\delta n}, \tag{I.226}$$

și

$$\tau=\eta\frac{\delta v}{\delta n}. \tag{I.227}$$

In formulele de mai sus s-a notat:

dF — forța elementară tangențială care apare cînd cele două părți ale fluidului alunecă de-a lungul elementului de suprafață dA;

$\tau=\frac{dF}{dA}$ — tensiunea tangențială care apare pe elementul de suprafață dA

$\frac{\delta v}{\delta n}$ — gradientul de viteză, luat după normala elementului de suprafață dA;

η — coeficientul de viscozitate dinamică.

Din formula (I.227) se deduce imediat că η are dimensiunea $\mathrm{kgsm^{-2}}$. Unitatea de măsură în sistemul CGS se numește poise și este egal cu

$$1\ \text{poise}=0{,}0102\ \mathrm{kgsm^{-2}}.$$

Realizarea filmului de ulei se face, în general, prin ungere forțată cu ajutorul unei pompe de ungere.

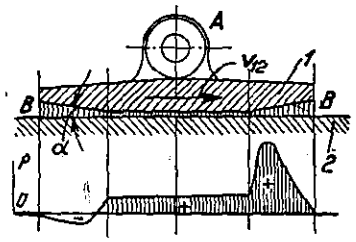


Fig. I.103. Variația presiunii filmului de ulei într-o cuplă de translație.

Prin acest mijloc presiunea uleiului atinge pînă la 200 kgf/cm².

Grosimea filmului de ulei ajunge, în general, la cîteva zecimi de milimetru. Cele mai mici grosimi variază între $h=0{,}001\ldots0{,}007$ mm.

Realizarea filmului și a presiunii se face cu ajutorul suprafețelor care formează între ele un spațiu în formă de pană, principiu descoperit în anul 1886.

În fig. I.108 este redată variația presiunii p a uleiului, în cazul suprafețelor unei cuple de translație. Presiunea maximă se realizează cu puțin înaintea locului cel mai îngust al spațiului în formă de pană.

La partea din spate apare chiar o mică depresiune.

Unghiul α se admite

$$\alpha=0°7'\ldots0°17'.$$

În cazul unui fus, jocul apare în formă de seceră (fig. I.109, *a*), creat de însăși funcționarea fusului. Acesta antrenează uleiul în partea din dreapta a planului *yy*, cu atît mai puternic, cu cît suprafețele fusului și cuzinetului sînt prelucrate mai precis.

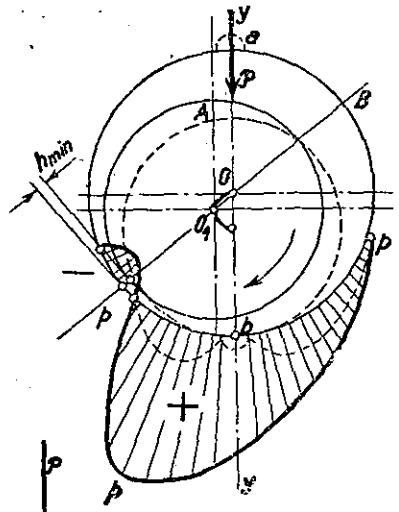


Fig. I.109. Poziția fusului și cuzinetului în cazul frecării lichide (*a*) și curba de variație a presiunii filmului de ulei (*b*).

Explicația se datorește tot proprietății lubrifiantului de a umezi suprafețele, adică forței de aderență.

Curba *ppp* arată modul aproximativ cum variază presiunea uleiului. Ea prezintă un maxim înaintea jocului minim h_{min} și în stînga planului *yy*.

În dreapta planului *yy* stratul de ulei micșorîndu-se, este explicabilă creșterea presiunii, în timp ce la stînga planului, după depășirea regiunii de joc minim (deci de creștere a jocului) presiunea va scădea brusc. Astfel se explică poziția deplasată înspre stînga a fusului în cuzinet.

În timp ce în cazul frecării uscate și al frecării semiuscate fusul se deplasează înaintea cuzinetului (spre dreapta în cazul fig. I.91), la frecarea lichidă se deplasează înapoia cuzinetului (spre stînga în fig. I.109, *a*, unde este trasată punctat poziția fusului în repaus).

Canalele de ungere și locul introducerii uleiului în lagăr (sau în cuzinet) trebuie făcute în zonele de presiune minimă (în punctul *a* din fig. I.109, *a*). Practicarea lor în punctul *b* ar modifica întreaga repartizare a presiunilor în interiorul filmului de ulei, așa cum este arătat cu linii întrerupte, și ar avea drept consecință transformarea frecării lichide în semilichidă sau în semiuscată.

S-a constatat că, cu cît viteza de rotație a fusului crește cu atît forma de seceră dispare, apare deci tendința ca centrul fusului și centrul cuzinetului să coincidă.

19.2. Ecuația de mișcare a lichidelor vîscoase. Ecuația lui Navier-Stockes

Deși această parte se tratează de obicei în cadrul hidraulicii este totuși util ca mersul general al metodei de stabilire a ecuației vectoriale a lui Navier-Stockes să fie expus și aici, ei putînd servi cercetărilor pentru integrarea ei în diferite alte cazuri, afară de cele — simplificate — din acest subparagraf.

Ecuația de mișcare a unei particule vîscoase de masă δm și de volum $\delta x\,\delta y\,\delta z$, a cărei viteză este u și al cărei coeficient de vîscozitate dinamică este η, și care e supusă la acțiunea forțelor: normală $\delta\bar{\mathfrak{Z}}_j$, tangențială $\delta\bar{T}_j$ (fig. I.110, *a*) și masică $\delta\bar{G}$, este:

$$\delta m\,\frac{d\bar{u}}{dt}=\delta\bar{G}+\sum_1^6\delta\bar{\mathfrak{Z}}_j+\sum_1^6\delta\bar{T}_j. \tag{I.228}$$

Dacă în ecuația vectorială (I.228) proiectată pe cele trei axe de coordonate se înlocuiesc valorile lui $\delta\mathfrak{Z}_j$ și δT_j în funcție de presiunea $\bar{p}$, și eforturile unitare tangențiale τ în funcție de viteza de deplasare a particulei, se obțin ecuațiile lui Navier-Stockes.

Astfel, ecuația (I.228) proiectată după axa x devine:

$$\delta m\,\frac{du_x}{dt}=\delta\mathfrak{Z}_1-\delta\mathfrak{Z}_2+(\delta T_3)_x+(\delta T_4)_x+(\delta T_5)_x+(\delta T_6)^x+(\delta G)_x. \tag{I.229}$$

Din fig. I.110 rezultă că:

$$\delta\mathfrak{Z}_1-\delta\mathfrak{Z}_2=-\frac{\partial p_x}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z;$$

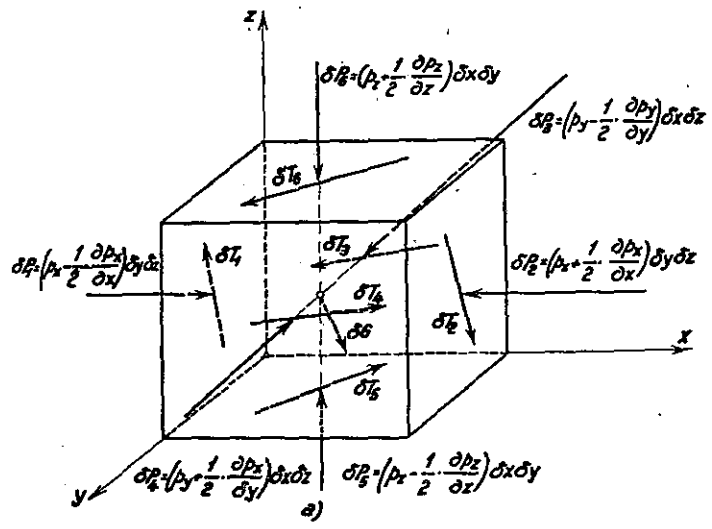
$$(\delta T_3)_x=-\tau_{yx}\,\delta x\,\delta z;$$

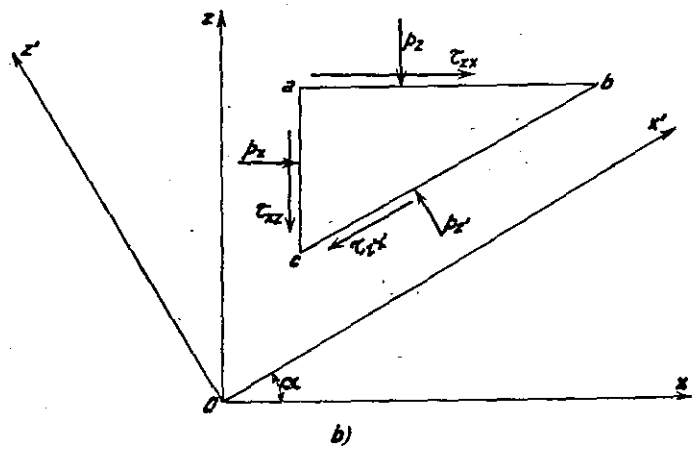
$$(\delta T_4)_x=\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\delta y\right)\delta x\,\delta z;$$

$$(\delta T_6)_x = -\tau_{zx}\delta x\,\delta y;$$

$$(\delta T_6)_x = -\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,\delta z\right)\delta x\,\delta y;$$

$$(\delta G)_x = X\,\delta m = \rho X\,\delta x\,\delta y\,\delta z.$$





ig. I.110. Forțele care acționează asupra unei particule în mișcare de masă $\delta m = \rho\,\delta x\,\delta y\,\delta z$ (fig. 110, *a*) și eforturile unitare într-o secțiune înclinată a acesteia (fig. 110, *b*).

Introducînd în (I.228) și făcînd simplificările, rezultă:

$$\frac{du_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right).$$

Analog pentru celelalte două direcții se obține:

$$\frac{du_y}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right);$$

$$\frac{du_z}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right). \qquad \text{(I.230)}$$

Ecuațiile (I.230) sînt de fapt cunoscute și din teoria elasticității.

In aceste ecuații se introduc acum expresiile presiunilor (p_x, p_y și p_z) și ale lui τ_{xy}, în funcție de componentele vitezei particulei.

Relațiile dintre ε, η și u se deduc ușor din calculul deformației unghiului drept al unei fețe a particulei în funcție de variațiile componentelor vitezei.

Ele sînt analoge celor din teoria elasticității:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \eta\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right); \qquad \text{(I.231)}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right).$$

De asemenea, se știe că din echilibrul tetraedrului rezultă:

$$p = \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z), \qquad \text{(I.232)}$$

valabilă însă numai la lichidele ideale.

In sfîrșit, tot din echilibrul tetraedrului, supus însă și la eforturile unitare tangențiale, echilibru scris după două sisteme de axe de coordonate, se deduc prin identificare relațiile dintre presiuni și viteze.

Astfel, din fig. I.110, *b*, dacă se scrie echilibrul după direcția suprafeței $bc = 1$, se obține:

$$\tau_{z'x'} = \tau_{zx}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(p_x - p_z)\sin 2\alpha. \qquad \text{(I.233)}$$

Insă

$$\tau_{z'x'} = \eta\left(\frac{\partial u_{x'}}{\partial z'} + \frac{\partial u_{z'}}{\partial x'}\right). \qquad \text{(I.234)}$$

Folosind schimbările de variabile, rezultă:

$$x' = x\cos\alpha + z\sin\alpha; \qquad \text{(I.235)}$$

$$z' = -x\sin\alpha + z\cos\alpha;$$

și

$$x = x'\cos\alpha - z'\sin\alpha; \qquad \text{(I.236)}$$

$$z = x'\sin\alpha + z'\cos\alpha.$$

Din (I.235) rezultă prin derivare:

$$u_{x'} = u_x\cos\alpha + u\sin\alpha; \qquad \text{(I.237)}$$

$$u_{z'} = -u_x\sin\alpha + u_z\cos\alpha.$$

De asemenea:

$$\frac{\partial u_{x'}}{\partial z'}=\frac{\partial u_{x'}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'}+\frac{\partial u_{x'}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z'};$$
$$\frac{\partial u_{z'}}{\partial x'}=\frac{\partial u_{z'}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial u_{z'}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}. \qquad \text{(I.238)}$$

Inlocuind în (I.238) expresiile $\frac{\partial u_{x'}}{\partial x}\ldots$ și $\frac{\partial x}{\partial z'}\ldots$, rezultate din (I.237), respectiv I.236), și introducînd în (I.234) valorile lui $\frac{\partial u_{x'}}{\partial z'}$ și $\frac{\partial u_{z'}}{\partial x'}$ astfel calculate, se obține:

$$\tau_{z'x'}=\eta\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\cos 2\alpha+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\sin 2\alpha\right]. \qquad \text{(I.239)}$$

Din identificarea lui (I.239) cu (I.233), rezultă:

$$p_x-p_z=2\eta\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{\partial u_x}{\partial x}\right). \qquad \text{(I.240)}$$

Pentru fiecare dintre cele trei plane de proiecții ecuația (I.240) se poate scrie în general:

$$p_x+2\eta\frac{\partial u_x}{\partial x}=p_y+2\eta\frac{\partial u_y}{\partial y}=p_z+2\eta\frac{\partial u_z}{\partial z}=C \qquad \text{(I.241)}$$

sau

$$p_x+p_y+p_z+2\eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=3C$$

și ținînd seamă de (I.232), se obține

$$p+\frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=C. \qquad \text{(I.242)}$$

Din (I.241) și (I.242) rezultă, în sfîrșit:

$$p_x=p-2\eta\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right);$$
$$p_y=p-2\eta\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right); \qquad \text{(I.243)}$$
$$p_z=p-2\eta\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right).$$

Dacă acum se introduc în (I.230) valorile rezultate din ecuațiile (I.231) și (I.243) și se fac calculele, se obțin ecuațiile scalare ale lui Navier-Stockes:

$$\frac{du_x}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{3}\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right);$$
$$\frac{du_y}{dt}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{3}\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right); \qquad \text{(I.244)}$$
$$\frac{du_z}{dt}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{3}\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right).$$

Ecuațiile pe mai sus se scriu într-o singură ecuație vectorială:

$$\frac{d\bar{u}}{dt}=\bar{g}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\bar{p}+\frac{\eta}{\rho}\Delta\bar{u}+\frac{1}{3}\frac{\eta}{\rho}\operatorname{grad}(\nabla\bar{u}), \qquad \text{(I.245)}$$

în care s-a notat, după cum se știe:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$
$$\nabla=\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z};$$
$$\bar{u}=\bar{i}u_x+\bar{j}u_y+\bar{k}u_z;$$
$$\bar{p}=\bar{i}p_x+\bar{j}p_y+\bar{k}p_z;$$
$$\bar{g}=\bar{i}X+\bar{j}Y+\bar{k}Z.$$

Integrarea ecuației (I.245) prezintă serioase dificultăți și de aceea se procedează în general la integrarea ei pentru cazuri particulare.

Astfel, în cazul lichidelor ideale, deci cînd $\eta=0$, ecuația devine:

$$\frac{d\bar{u}}{dt}=\bar{g}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\bar{p} \qquad \text{(I.246)}$$

și formează baza studiului în hidraulică.

In cele ce urmează se vor studia cîteva cazuri particulare ale mișcării lichidelor vîscoase, cu aplicații imediate la ungerea cuplelor cinematice de translație și rotație. Prin integrarea ecuației (I.245) se vor putea calcula viteza, presiunea, debitul de ulei și forța, respectiv, momentul de frecare. Prin analogie cu frecarea uscată și cu frecarea semiuscată se va putea găsi apoi expresia coeficientului frecării lichide.

19.3. Cazuri particulare cu aplicații la ungerea cuplelor de translație și rotație

19.3.1. Cuplele de translație

A) *Scurgerea laminară plan-paralelă între două suprafețe dintre care una are viteza v.*

a) Ecuația de mișcare. In cazul cuplei de translație schema se prezintă ca în fig. I.111.

Pentru studiul mișcării lichidului se vor particulariza ecuațiile Navier-Stockes (I.244), în care se va pune:

$$u_y=u_z=0;\quad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial z}=0;$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}=0;$$
$$X=0;\quad Y=0;\quad Z=-g.$$

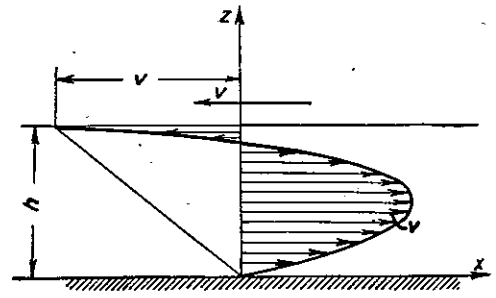


Fig. I.111. Variația vitezei uleiului în scurgerea laminară între două suprafețe dintre care una are viteza v.

Cu aceste simplificări se obţine:

$$\frac{du_x}{dt}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}=0$$

şi ecuaţiile (I.244) devin:

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \tag{I.247}$$

$$0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{I.248}$$

Din ecuaţia (I.248) rezultă, după cum era şi natural, ecuaţia hidrostaticii $p=\gamma z$.

Ecuaţia (I.247) se poate scrie astfel:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\eta\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{I.249}$$

b) Legea de variaţie a vitezei $u_x=u$. Integrînd de două ori, se obţine:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}+C;$$

$$u=\frac{z^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}+Cz+C'.$$

Condiţiile la limită depind de cazul particular admis.
Astfel:
pentru:

$$z=0 \quad u=0;$$

$$z=h \quad u=-v,$$

rezultă:

$$C'=0 \quad \text{şi} \quad C=-\frac{v}{h}-\frac{h}{2}\frac{dp}{dx},$$

care, înlocuite mai sus, dau:

$$u=\frac{z^2}{2\eta}\frac{dp}{dx}-\left(\frac{h}{2\eta}\frac{dp}{dx}+\frac{v}{h}\right)z \tag{I.250}$$

sau

$$u=\frac{z}{2\eta}(z-h)\frac{dp}{dx}-\frac{v}{h}z. \tag{I.250'}$$

Viteza are deci o lege de variaţie parabolică, aşa cum se vede în figură.

c) Viteza maximă are loc pentru valoarea lui z obţinută din $\frac{du}{dz}=0$, din care rezultă uşor

$$z_{max}=\frac{h}{2}+\eta\frac{v}{h}\frac{1}{\frac{dp}{dx}}, \tag{I.251}$$

care, înlocuită în (I.250'), dă

$$u_{max}=-\frac{1}{2\eta\frac{dp}{dx}}\left(\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}+\eta\frac{v}{h}\right)^2. \tag{I.252}$$

d) Viteza zero a filmului de ulei mai are loc, în afară de $z=0$, şi pentru

$$z_0=\frac{2\eta v}{h\frac{dp}{dx}}+h. \tag{I.253}$$

e) Debitul de ulei se obţine din expresia

$Q_x=\int_A u\,dA$, unde $dA=l\,dz$ şi l—lăţimea secţiunii.

Inlocuind valoarea lui u din (I.250') şi integrînd de la 0 la h, se obţine:

$$Q_x=-\frac{h^3}{12\eta}\frac{dp}{dx}-\frac{hl}{2}v. \tag{I.254}$$

f) Eforturile unitare tangenţiale τ_{zx} se deduc din formulele (I.231):

$$\tau_{zx}=\eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)=\eta\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{I.255}$$

Inlocuind mai sus valourea lui $\frac{\partial u}{\partial z}$ dedusă din (I.250), rezultă

$$\tau_{zx}=\left(z-\frac{h}{2}\right)\frac{dp}{dx}-\eta\frac{v}{h}. \tag{I.256}$$

Valorile maxime ale eforturilor unitare tangenţiale au loc la margini, adică pentru $z=0$ şi $z=h$, pentru care se obţine

$$\tau_{zx\,max}=\pm\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}=\eta\frac{v}{h}. \tag{I.257}$$

In cazul cînd viteza v are sensul axei x, formulele (I.256) şi (I.257) devin:

$$\tau_{zx}=\left(z-\frac{h}{2}\right)\frac{dp}{dx}+\eta\frac{v}{h}, \tag{I.256'}$$

$$\tau_{zx\,max}=\pm\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}+\eta\frac{v}{h}. \tag{I.257'}$$

g) Formula lui Reynolds rezultă din ecuaţia (I.254), după cum urmează:

Debitul de ulei corespunzător presiunii maxime se obţine făcînd $\frac{dp}{dx}=0$, în care caz din (I.254) rezultă:

$$Q_0=-\frac{h_0 l}{2}v, \tag{I.258}$$

unde h_0 este grosimea filmului de ulei corespunzătoare presiunii maxime.

Conform ecuației continuității, se poate scrie

$$Q_x = Q_0 = -\frac{h_0 l}{2} v. \tag{I.259}$$

Din (I.259) și (I.254) rezultă formula clasică a lui Reynolds:

$$\frac{dp}{dx} = -6\eta v \frac{h-h_0}{h^3}, \tag{I.260}$$

care dă gradientul de presiune în lungul filmului de ulei.

Dacă se introduce valoarea lui $\frac{dp}{dx}$ din (I.260) în (I.250′), se obține

$$u = -\frac{v z}{h}\left[1 + 3(z-h)\frac{h-h_0}{h^2}\right]. \tag{I.261}$$

Atît din (I.250′) cît și din (I.261) rezultă că legea de variație a vitezei filmului de ulei în dreptul presiunii maxime, deci unde $\frac{dp}{dx}=0$ și $h=h_0$, este liniară (fig. I.112) și egală cu

$$u_0 = -\frac{v}{h_0} z. \tag{I.262}$$

* * *

Din toate formulele pentru cazul A) se pot obține prin două particularizări cazurile de mai jos, și anume:

B) *Variația liniară a vitezei uleiului* (fig. I.112) $\left(\text{pentru cazul } \frac{dp}{dx}=0\right)$.

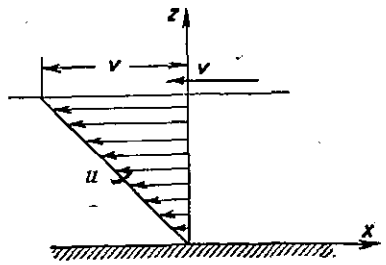


Fig. I.112. Variația liniară a vitezei uleiului în dreptul presiunii maxime.

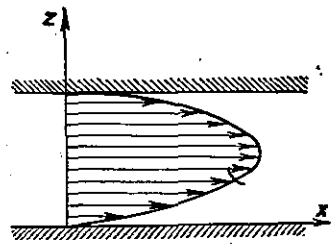


Fig. I.113. Variația vitezei uleiului în mișcarea plană între două suprafețe plane fixe.

Se obține:

din (I.250′)

$$u = -\frac{v}{h} z; \tag{I.262}$$

din (I.254)

$$Q_x = -\frac{hl}{2} v; \tag{I.254}$$

din (I.256)

$$\tau_{zx} = -\eta \frac{v}{h}, \tag{I.256}$$

iar dacă v este dirijat în sensul lui x pozitiv, toate formulele de mai sus schimbă de semn.

C) *Mișcarea potențială între doi pereți plani fiși* (fig. I.113), (cazul $v=0$)

Se obține:

din (I.250′)

$$u = \frac{z}{2\eta}(z-h)\frac{dp}{dx}, \tag{I.250″}$$

din (I.251)

$$z_{max} = \frac{h}{2}; \tag{I.251″}$$

din (I.252)

$$u_{max} = \frac{h^2}{8\eta}\frac{dp}{dx}; \tag{I.252″}$$

din (I.254)

$$Q_x = -\frac{h^3 l}{12\eta}\frac{dp}{dx}; \tag{I.254″}$$

din (I.256)

$$\tau_{zx} = \left(z - \frac{h}{2}\right)\frac{dp}{dx}; \tag{I.256″}$$

din (I.257)

$$\tau_{zx\,max} = \pm\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}. \tag{I.257″}$$

D) *Deplasarea vîscoasă cu viteza v a unei pietre de culisă înclinată cu unghiul α față de glisiera fixă.*

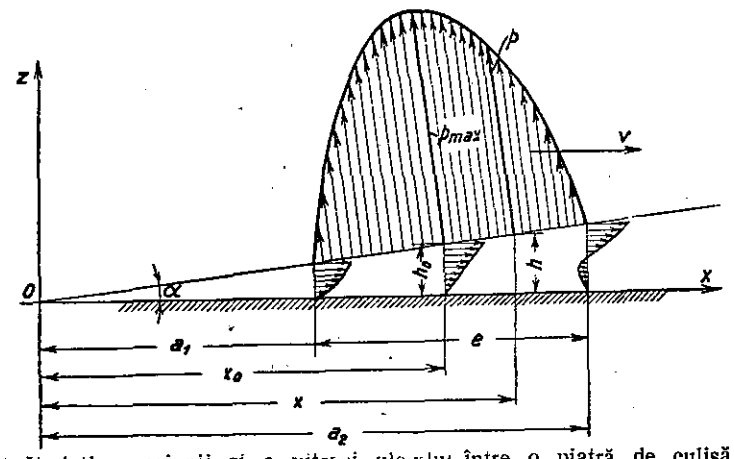


Fig. I.114. Variația presiunii și a vitezei uleiului între o piatră de culisă în mișcare cu viteza v și glisiera fixă cu care face unghiul α.

a) Ecuaţia lui Reynolds. Ca origine a absciselor s-a luat punctul de intersecţie a pietrei de culisă (sau capul de cruce) cu culisa (sau glisiera), (fig. I.114).

Unghiul de înclinare α este foarte mic, astfel încît se poate scrie

$$h=z=\alpha x. \tag{I.263}$$

Grosimea stratului de ulei, unde $\frac{dp}{dx}=0$ şi deci $p=p_{max}$, se notează cu h_0 corespunzător abscisei x_0.

Se introduce valoarea lui h din (I.263) în formula lui Reynolds (I.260) şi, *ţinînd seamă că aici sensul lui v este cel al axei x,* se obţine:

$$\frac{dp}{dx}=\frac{6\eta v}{\alpha^2}\,\frac{x-x_0}{x^3}. \tag{I.264}$$

b) Calculul presiunii p. Integrînd şi ţinînd seamă de condiţiile la limită, se deduce legea de variaţie a presiunii în filmul de ulei:

$$p-p_0=\frac{6\eta v}{\alpha^2}\int_{a_1}^{a_2}\frac{x-x_0}{x^3}\,dx$$

sau

$$p=\frac{6\eta v}{\alpha^2 a_1}\cdot\left[1-\frac{x_0\,(x+a_1)}{2a_1x}\right]\frac{x-a_1}{x}+p_0. \tag{I.265}$$

Valoarea lui x_0 se află din (I.265) ştiind că pentru

$$p=p_0,\quad x=a_2.$$

De aici rezultă

$$x_0=\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}. \tag{I.266}$$

Dacă se introduce valoarea lui x_0 din (I.266) în (I.265) şi se fac calculele, se obţine:

$$p-p_0=-\frac{6\eta v}{\alpha^2}\,\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{x^2\,(a_1+a_2)}. \tag{I.267}$$

Diagrama de variaţie a presiunii p este redată în fig. I.114.

c) Mărimea rezultantei $\mathfrak{R}$ a presiunilor hidrodinamice asupra pietrei de culisă de lăţime l este dată de expresia

$$\mathfrak{R}=l\int_{a_1}^{a_2}(p-p_0)\,dx.$$

Efectuînd calculele şi notînd $a_2-a_1=e$, se obţine:

$$\mathfrak{R}=\frac{6l\eta v}{\alpha^2}\left(\ln\frac{a_2}{a_1}-\frac{2e}{a_1+a_2}\right)=\frac{\eta v}{\alpha^2}\,\nu_1, \tag{I.268}$$

în care s-a notat:

$$\nu_1=6l\left(\ln\frac{a_2}{a_1}-\frac{2e}{a_1+a_2}\right). \tag{I.269}$$

d) Presiunea medie p_m pe suprafaţa pietrei de culisă se obţine din relaţia

$$p_m=\frac{\mathfrak{R}}{le}=\frac{\eta v}{\alpha^2 e}\nu_2, \tag{I.270}$$

în care

$$\nu_2=\frac{\nu_1}{l}=6\left(\ln\frac{a_2}{a_1}-\frac{2e}{a_1+a_2}\right).$$

e) Valoarea maximă p_{max} a presiunii în filmul de ulei are loc pentru $x=x_0=\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}$.

Inlocuind această valoare a lui x_0 în (I.267), se obţine:

$$p_{max}p_0=\frac{3\eta v}{2\alpha^2}\,\frac{(a_1-a_2)^2}{a_1a_2(a_1+a_2)}. \tag{I.271}$$

f) Punctul de aplicaţie al rezultantei $\mathfrak{R}$ se obţine imediat din expresia

$$\mathfrak{R}x_m=l\int_{a_1}^{a_2}x(p-p_0)\,dx.$$

Efectuînd calculele şi înlocuind valoarea lui $\mathfrak{R}$, se găseşte:

$$x_m=\frac{1}{2}\,\frac{a_2^2-a_1^2-2a_1a_2\ln\frac{a_2}{a_1}}{(a_1+a_2)\ln\frac{a_2}{a_1}+2\,(a_1-a_2)}. \tag{I.272}$$

g) Forţa de frecare F, care acţionează tangenţial pe suprafaţa de contact dintre piatra de culisă şi filmul de ulei, se calculează cu expresia

$$F=\int_{a_1}^{a_2}l\tau_{zx\,max}\,dx.$$

Inlocuind mai sus valoarea lui $\tau_{zx\,max}$ din (I.257'), se obţine:

$$F=l\eta\int_{a_1}^{a_2}\left(\frac{h}{2\eta}\,\frac{dp}{dx}+\frac{v}{h}\right)dx. \tag{I.273}$$

Introducînd în (I.273) valoarea lui $\frac{dp}{dx}$ din (I.264) şi punînd $h=\alpha x$, rezultă:

$$F=\frac{l\eta v}{\alpha}\int_{a_1}^{a_2}\left[\frac{3\,(x-x_0)}{x^2}+\frac{1}{x}\right]dx,$$

care, integrată, dă:

$$F=\frac{4l\eta v}{\alpha}\left(\ln\frac{a_2}{a_1}-\frac{3}{2}\,\frac{e}{a_1+a_2}\right) \tag{I.274}$$

sau

$$F=\frac{\eta v}{\alpha}\nu_3, \tag{I.275}$$

unde

$$\nu_3=\left(4\ln\frac{a_2}{a_1}-6\frac{e}{a_1+a_2}\right)l. \tag{I.276}$$

h) Coeficientul frecării lichide μ_1 se poate pune în acest caz sub aceeaşi formă ca şi al celei uscate, şi anume:

$$\mu_1=\frac{F}{\mathfrak{S}}=\frac{\alpha\nu_3}{\nu_1} \tag{I.277}$$

sau, înlocuind valorile lui ν_1 şi ν_3, rezultă:

$$\mu_1=\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{2(a_1+a_2)\ln\frac{a_2}{a_1}-3e}{(a_1+a_2)\ln\frac{a_2}{a_1}-2e}. \tag{I.277'}$$

Coeficientul frecării lichide se poate calcula şi în funcţie de presiunea specifică medie p_m, după cum urmează:

$$\mu_1=\frac{F}{\mathfrak{S}}=\frac{F}{p_m e\cdot l}=\frac{\frac{\eta v}{\alpha}\nu_3}{p_m e l}.$$

Scoţînd valoarea lui α din (I.277) şi introducînd-o mai sus, se obţine:

$$\mu_1=\frac{\eta v\nu_3^2}{p_m e l\mu_1\nu_1}.$$

Introducînd mai sus $l=\frac{\nu_1}{\nu_2}$ şi făcînd calculele, rezultă valoarea lui μ_1:

$$\mu_1=\frac{\nu_3}{\nu_1}\sqrt{\nu_2}\sqrt{\frac{\eta v}{ep_m}};$$

sau

$$\mu_1=\nu\sqrt{\frac{\eta v}{ep_m}}, \tag{I.278}$$

unde

$$\nu=\frac{\nu_3}{\nu_1}\sqrt{\nu_2}=\frac{4\ln\frac{a_2}{a_1}-6\frac{e}{a_1+a_2}}{\sqrt{6\left(\ln\frac{a_2}{a_1}-\frac{2e}{a_1+a_2}\right)}}. \tag{I.279}$$

Din (I.278) şi (I.279) rezultă următoarele:

Coeficientul frecării lichide la o cuplă de translaţie depinde de dimensiunile constructive ale cuplei, de poziţia suprafeţelor de alunecare relativă, cum şi de rădăcina pătrată a coeficientului de viscozitate dinamică η şi a vitezei v a pietrei de culisă şi este invers proporţional cu rădăcina pătrată a presiunii specifice medii p_m.

In Maşinostroenie, p. 132, se recomandă şi următoarele formule pentru calculul coeficientului μ_1:

$$\mu_1=2\sqrt{\frac{\eta v}{ek}} \tag{I.280}$$

sau, dacă se ţine seamă de influenţa lăţimii pietrei de culisă, formula devine:

$$\mu_1=2\cdot10^{-3}\sqrt{\frac{4e+l}{l}}\cdot\sqrt{\frac{\eta v}{ek}}, \tag{I.281}$$

în care:

e şi l sînt date în cm;
v — în cms^{-1}
η — în centipoise

$$k=\frac{6\eta v}{l\alpha^2}\left(\ln\frac{a_2}{a_1}-\frac{2e}{a_1+a_2}\right).$$

In fond, atît I.280 cît şi I.281 se reduc la formula (I.278).

19.3.2. Cupelele de rotaţie

Ecuaţia de mişcare a unei particule de fluid este aceeaşi ca şi în cazul cuplei de translaţie, adică

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\eta\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

care, integrată cu condiţiile la limită $z=0$, $u=0$ şi $z=h$, $u=v$, rezultă ecuaţia

$$u=\frac{z}{2\eta}(z-h)\frac{dp}{dx}+\frac{v}{h}z, \tag{I.250''}$$

iar

$$u_{max}=-\frac{1}{2\eta\frac{dp}{dx}}\left(\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}-\eta\frac{v}{h}\right)^2 \tag{I.252'}$$

şi

$$Q_x=-\frac{h^3}{12\eta}\frac{dp}{dx}+\frac{lh}{2}v. \tag{I.254''}$$

In sfîrşit, τ_{zx} şi $\tau_{zx\,max}$ sînt date de (I.256') şi (I.257'), iar formula lui Reynolds devine:

$$\frac{dp}{dx}=6\eta v\frac{h-h_0}{h^3}, \tag{I.260'}$$

care, introdusă în (I.250''), dă

$$u=\frac{vz}{h}\left[1-3(z-h)\frac{h-h_0}{h^2}\right] \tag{I.261'}$$

şi

$$u_0=\frac{v}{h_0}z. \tag{I.262'}$$

Formulele de mai sus se pot transforma dacă se înlocuieşte valoarea lui z, şi deci a lui h, în funcţie de dimensiunile constructive ale fusului şi cuzinetului.

S-a arătat că fusul ocupă poziţii diferite în cuzinet după viteza de rotaţie ω, centrul lui fiind în O_0 cînd $\omega=0$ (fig. I.115), în O cînd $\omega\neq 0$, şi în O_1, deci concentric cu al cuzinetului, cînd teoretic $\omega=\infty$.

Traiectoria centrului fusului se poate considera un semicerc cu diametrul $\overline{O_0O_1}=\frac{\delta}{2}=\frac{D-d}{2}=R-r$, unde s-a notat cu $\delta=D-d$ — jocul diametral absolut dintre fus şi cuzinet.

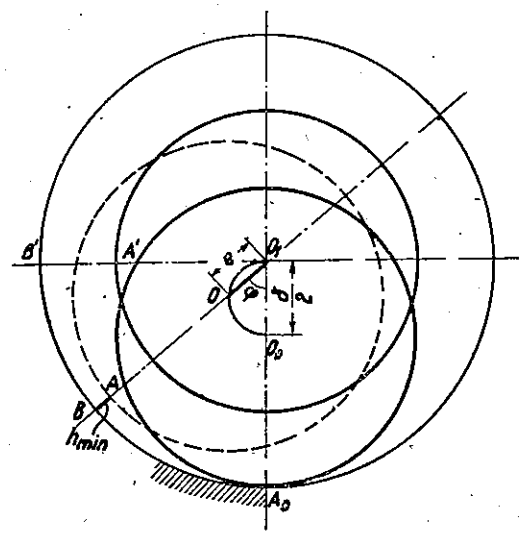


Fig. I.115. Poziţia fisului în cuzinet pentru diferite viteze unghiulare ω ale fusului.

In poziţia de echilibru a fusului în cuzinet, care are loc la o viteză unghiulară ω, axa centrelor face cu verticala unghiul φ căruia îi corespunde grosimea minimă a filmului de ulei

$$h_{min}=\overline{AB}.$$

Din fig. I.115 rezultă că

$$h_{min}=\overline{O_1B}-\overline{OA}-\overline{O_1O}=\frac{D-d}{2}-e,$$

şi cum

$$e=\frac{\delta}{2}\cos\varphi,$$

înlocuind, se obţine:

$$h_{min}=\frac{\delta}{2}(1-\cos\varphi). \quad (I.282)$$

Dacă $\varphi=0$, $h_{min}=0$ (poziţia de repaus A_0); dacă $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $h_{min}=h_{max}=\frac{\delta}{2}=\overline{A'B'}$.

In funcţie de h_{min} şi de celelalte dimensiuni constructive ale cuplei de rotaţie, se poate calcula grosimea filmului de ulei într-o secţiune care face un unghi α cu poziţia de echilibru a fusului (fig. I.116).

In acest caz

$$h=\overline{CD}=\overline{CG}+\overline{GD}=h_{min}+h_1.$$

Aici

$$h_{min}=\frac{D-d}{2}-e=(R-r)-e=\frac{\delta}{2}-e,$$

iar

$$h_1=\overline{O_1G}-\overline{O_1D}=\overline{O_1G}-(\overline{O_1E}+\overline{ED})=(r+e)-e\cos\alpha-\overline{ED};$$

dar din $\triangle OED$ se obţine:

$$\overline{ED}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{OE}^2}=\sqrt{r^2-e^2\sin^2\alpha}\cong r\left(1-\frac{e^2}{2r^2}\sin^2\alpha\right),$$

deci

$$h_1=e(1-\cos\alpha)+\frac{e^2}{2r}\sin^2\alpha,$$

de unde

$$h=(R-r)-e\cos\alpha+\frac{e^2}{2r}\sin^2\alpha. \quad (I.283)$$

Dacă se calculează h după raza care pleacă din O (centrul fusului), se obţine printr-un calcul analog:

$$h=(R-r)-e\cos\alpha+\frac{e^2}{2(r+e)}\sin^2\alpha. \quad (I.284)$$

Cum e este mic în raport cu r, ultimul termen din membrul al doilea din ambele formule se poate neglija şi atunci se obţine pentru h expresia:

$$h=(R-r)-e\cos\alpha. \quad (I.285)$$

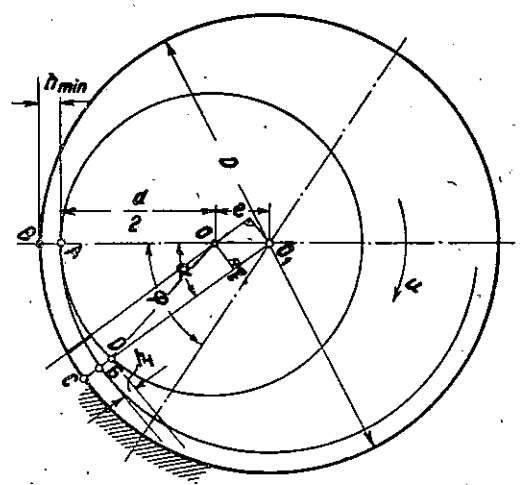


Fig. I.116. Determinarea grosimii filmului de ulei într-o porţiune care face unghiul α cu poziţia de echilibru a fusului.

Expresia lui h se poate scrie acum uşor în funcţie de δ şi de h_{min}:

$$h=\frac{\delta}{2}-\left(\frac{\delta}{2}-h_{min}\right)\cos\alpha=\frac{\delta}{2}(1-\cos\alpha)+h_{min}\cos\alpha. \quad (I.285')$$

Mărimea lui h se poate deci măsura după direcţia razei fusului, deci normală pe suprafaţa în mişcare.

Dacă se pune

$$\frac{R-r}{e}=\frac{\delta}{2e}=\varepsilon,$$

atunci (I.285) devine

$$h=e(\varepsilon-\cos\alpha). \quad (I.285'')$$

Din fig. I.116 rezultă că filmul de ulei are grosimea minimă atunci cînd $\alpha=0$ şi deci,

$$h_{min}=e(\varepsilon-1). \quad (I.286$$

Dacă se introduce valoarea lui h din (I.285") în formula (I.260') şi ţinînd seamă că $x=r(\alpha_1-\alpha)$, deci $dx=-r\,d\alpha$ şi $v=r\omega$, se obţine:

$$\frac{dp}{d\alpha}=-\frac{6\eta\omega r^2}{e^2}\left[\frac{1}{(\varepsilon-\cos\alpha)^2}-\frac{\varepsilon-\cos\alpha_0}{(\varepsilon-\cos\alpha)^3}\right] \quad (I.287)$$

şi atunci presiunea în filmul de ulei într-o poziţie α (fig. I.117) faţă de aceea care determină pe h_{min} este dată de expresia:

$$p(\alpha)-p(\alpha_2)=-\frac{6\eta\omega r^2}{e^2}\left[\int_{\alpha_2}^{\alpha}\frac{d\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^2}-(\varepsilon-\cos\alpha_0)\int_{\alpha_2}^{\alpha}\frac{d\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^3}\right] \quad (I.288)$$

sau

$$p(\alpha)-p(\alpha_2)=-\frac{6\eta\omega r^2}{e^2}[F(\alpha)-F(\alpha_2)], \quad (I.288')$$

în care s-a notat:

$$F(\alpha)=\int\frac{d\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^2}-(\varepsilon-\cos\alpha_0)\int\frac{d\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^3},$$

a cărei valoare urmează să se determine.

Se calculează întîi

$$I_1=\int\frac{d\alpha}{\varepsilon-\cos\alpha}=\frac{2}{\varepsilon-1}\int\frac{dx}{1+\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}x^2}=\frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\operatorname{arc\,tg}x\Big|\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}},$$

unde s-a pus $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Dacă se înlocuieşte $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ şi se ţine seamă de relaţia

$$\operatorname{arc\,tg}y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{1-y^2}{1+y^2},$$

valoarea integralei devine:

$$I_1=\int\frac{d\alpha}{\varepsilon-\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\operatorname{arc\,cos}\frac{\varepsilon\cos\alpha-1}{\varepsilon-\cos\alpha}. \quad (I.289)$$

Celelalte două integrale se obţin din forma generală:

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{-b\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}-$$
$$-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}},$$

în care, făcînd $a=\varepsilon$, $b=-1$, $x=\alpha$, $n=2$, respectiv $n=3$, şi ţinînd seamă de (I.289), se obţine:

$$I_2=\int\frac{d\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^2}=\frac{1}{\varepsilon^2-1}\left(\frac{\sin\alpha}{\varepsilon-\cos\alpha}+\varepsilon I_1\right); \quad (I.290)$$

$$I_3=\int\frac{d\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^3}=\frac{1}{2(\varepsilon^2-1)}\left[\frac{\sin\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^2}+3\varepsilon I_2-I_1\right], \quad (I.291)$$

astfel că

$$F(\alpha)=I_2-(\varepsilon-\cos\alpha_0)I_3+C. \quad (I.292)$$

In felul acesta, expresia presiunii în filmul de ulei la o distanţă α de grosimea minimă este

$$p(\alpha)-p(\alpha_2)=-\frac{6\eta\omega r^2}{e^2}[I_2-I_2''-(\varepsilon-\cos\alpha_0)(I_3-I_3'')], \quad (I.293)$$

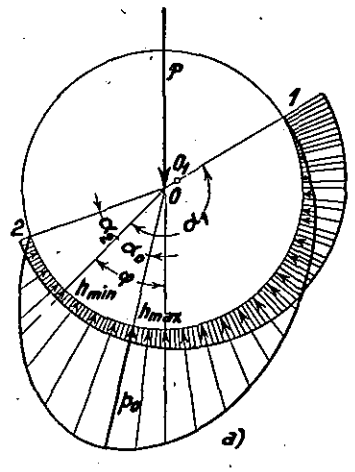
în care I_1'', I_2'' şi I_3'' sînt valorile integralelor I_1, I_2 şi I_3 în care s-a înlocuit $\alpha=\alpha_2$, adică

$$I_1''=I_1(\alpha_2);\quad I_2''=I_2(\alpha_2);\quad I_3''=I_3(\alpha_2).$$

Aflarea lui $(\varepsilon-\cos\alpha_0)$ se face prin condiţii la limită, pentru valorile presiunii uleiului la intrare şi la ieşire (adică în punctele *1* şi *2* din fig. I.117, *a* şi *b*).

Cazul a. Se consideră că

$$p(\alpha_1)=p(\alpha_2)=p_0=\text{presiunea atmosferică}.$$



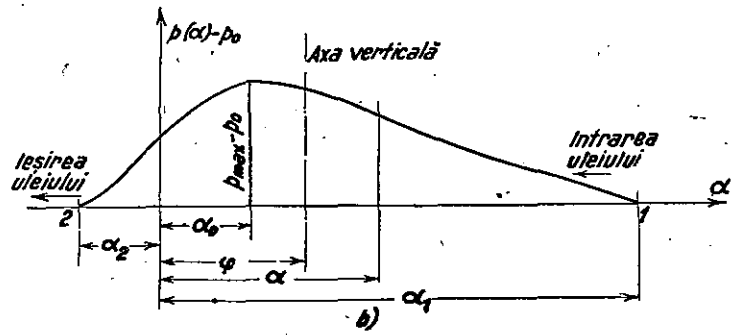


Fig. I.117. Variaţia presiunii filmului de ulei şi a grosimii acestuia în cazul egalităţii presiunilor la intrarea şi ieşirea dintre fus şi lagăr.

Atunci din (I.293) rezultă:

$$p(\alpha_1)-p(\alpha_2)=-\frac{6\eta\omega r^2}{e^2}[I_2'-I_2''-(\varepsilon-\cos\alpha_0)(I_3'-I_3'')]=0,$$

de unde

$$\varepsilon-\cos\alpha_0=\frac{I_2'-I_2''}{I_3'-I_3''}. \quad (I.294)$$

Mai sus s-a notat

$$I_1'=I_1(\alpha_1);\quad I_2'=I_2(\alpha_1)\quad \text{şi}\quad I_3'=I_3(\alpha_1).$$

Curba de variaţie a lui p pe suprafaţa desfăşurată a fusului este reprezentată în fig. I.117, *b*. Ea rezultă din construcţia grafică a expresiei (I.293) scrisă sub forma de mai jos:

$$p(\alpha)-p(\alpha_2)=-\frac{6\eta\omega r^2}{e^2(I_3'-I_3'')}\left[(I_2-I_2'')(I_3'-I_3'')-(I_3-I_3'')(I_2'-I_2'')\right]. \quad (I.295)$$

Aici s-a înlocuit valoarea lui $\varepsilon-\cos\alpha_0$ cu valoarea ei dată de (I.294).

Calculul expresiei forţei $\mathfrak{R}$ *şi a unghiului de înclinare* φ *al fusului.* Din ecuaţiile de echilibru ale fusului rezultă:

$$\mathfrak{R}=rl\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}p\cos(\alpha-\varphi)\,d\alpha,$$

$$rl\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}p\sin(\alpha-\varphi)\,d\alpha=0,$$

unde l— lungimea fusului.

Introducînd mai sus valoarea lui $p=p(\alpha)$ din (I.288′) şi făcînd dezvoltările, se obţine:

$$\mathfrak{R}=-\frac{6\eta\omega r^2 l}{e^2}\left[\cos\varphi\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}F(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha+\sin\varphi\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}F(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\right]; \quad (I.296)$$

$$\cos\varphi\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}F(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha-\sin\varphi\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}F(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha=0.$$

Din ecuaţiile de mai sus se calculează $\operatorname{tg}\varphi$, care dă poziţia fusului corespunzătoare lui h_{min}, precum şi expresia rezultantei $\mathfrak{R}$. Pentru φ se obţine:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}F(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha}{\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}F(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha}. \quad (I.297)$$

Integralele din (I.297) se calculează folosind metoda integrării prin părţi. Astfel:

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}F(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha=(\varepsilon-\cos\alpha_0)\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^2}-\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\varepsilon-\cos\alpha},$$

sau, ţinînd seamă de (I.289), (I.290) şi (I.294), rezultă:

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}F(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha=(\varepsilon-\cos\alpha_0)(I_2'-I_2'')-(I_1'-I_1'')=-A; \quad (I.298)$$

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}F(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha=-\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^2}+(\varepsilon-\cos\alpha_0)\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^3},$$

de unde, efectuînd calculele:

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}F(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha=-B=\frac{1}{\varepsilon-\cos\alpha_1}-\frac{1}{\varepsilon-\cos\alpha_2}-$$

$$-\frac{I_2'-I_2''}{2(I_3'-I_3'')}\left[\frac{1}{(\varepsilon-\cos\alpha_1)^2}-\frac{1}{(\varepsilon-\cos\alpha_2)^2}\right], \quad (I.299)$$

astfel că

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-A}{-B}=\frac{A}{B}, \quad (I.300)$$

iar din (I.296):

$$\mathfrak{R}=\frac{6\eta\omega r^3 l}{e^2}(A\sin\varphi+B\cos\varphi) \quad (I.301)$$

sau

$$\mathfrak{R}=\frac{6\eta\omega r^3 lA}{e^2\sin\varphi}. \quad (I.301')$$

Presiunea specifică medie p_m rezultă imediat:

$$p_m=\frac{\mathfrak{R}}{2rl}=\frac{3\eta\omega r^2}{e^2}\cdot\frac{A}{\sin\varphi}. \quad (I.302)$$

Forţa de frecare F, care acţionează tangenţial la suprafaţa fusului pe toată porţiunea de contact dintre fus şi ulei, este dată de formula

$$F=\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}l\tau_{zx\,max}\,r\,d\alpha.$$

Dar din (I.257′) şi (I.260′) rezultă:

$$\tau_{zx\,max}=\eta\frac{v}{h}+\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}=3\eta v\left(\frac{4}{3}\frac{1}{h}-\frac{h_0}{h^2}\right)$$

şi, ţinînd seamă de (I.285″), expresia lui F devine:

$$F=\frac{\eta\omega r^2 l}{e}\left[4\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\varepsilon-\cos\alpha}-3(\varepsilon-\cos\alpha_0)\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^2}\right],$$

de unde

$$F=\frac{\eta\omega r^2 l}{e}\left[4(I_1'-I_1'')-3(\varepsilon-\cos\alpha_0)(I_2'-I_2'')\right], \quad (I.303)$$

sau, ţinînd seamă de (I.298),

$$F=\frac{\eta\omega r^2 l}{e}\left[(I_1'-I_1''+3A\right]. \quad (I.303')$$

Coeficientul frecării lichide μ_1 se scrie acum uşor:

$$\mu_1=\frac{F}{\mathfrak{R}}=\frac{e\sin\varphi}{2r}\left(1+\frac{I_1'-I_1''}{3A}\right), \quad (I.304)$$

sau, în funcţie de presiunea specifică medie,

$$\mu_1 = \frac{\eta\omega r}{2ep_m}[3A+(I_1'-I_1'')]. \tag{I.305}$$

Dacă se înlocuiesc: $e=\frac{\delta}{2\varepsilon}$ şi $r=\frac{d}{2}$, se obţine:

$$\mu_1 = \frac{\eta\omega}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right)\frac{\varepsilon}{2}[3A+(I_1'-I_1'')]. \tag{I.306}$$

Notînd

$$\varkappa = \frac{\varepsilon}{2}[3A+(I_1'-I_1'')] \tag{I.307}$$

sau

$$\varkappa = \frac{\varepsilon}{2(I_3'-I_3'')}[4(I_1'-I_1'')(I_3'-I_3'')-3(I_2'-I_2'')^2], \tag{I.307'}$$

rezultă:

$$\mu_1 = \varkappa\frac{\eta\omega}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right). \tag{I.306'}$$

Valoarea coeficientului $\varkappa$ depinde de condiţiile de funcţionare ale lagărului, deci de α_1, α_2, φ şi ε.

Ca aplicaţie simplificată se va considera că centrul fusului se deplasează pe un semicerc cu diametrul $\frac{D-d}{2}$ şi se admite $\varepsilon=1{,}05$, deci corespunzător unui lagăr încet.

In acest caz, din fig. I.115 rezultă

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\varepsilon} = \arccos\frac{1}{1{,}05} = 17°45'.$$

Drept caz limită al introducerii uleiului între fus şi cuzinet se admite:

$$\alpha_1 = \varphi+90° = 107°45' \quad \text{şi}$$
$$\alpha_2 = 0,$$

adică se consideră că în zona stratului minim de ulei presiunea este egală cu cea de la intrare.

Cu datele de mai sus se calculează:

$$I_1' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\arccos\frac{\varepsilon\cos\alpha_1-1}{\varepsilon-\cos\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{1{,}05^2-1}}\arccos\frac{1{,}05\cos 107°45'-1}{1{,}05-\cos 107°45'};$$

$$I_1' = 9{,}108;$$

$$I_1'' = 0;$$

$$I_2' = \frac{1}{\varepsilon^2-1}\left(\frac{\sin\alpha_1}{\varepsilon-\cos\alpha_1}+\varepsilon I_1'\right) = \frac{1}{1{,}05^2-1}\left(\frac{\sin 107°45'}{1{,}05-\cos 107°45'}+1{,}05\times 9{,}108\right);$$

$$I_2' = 100{,}16;$$

$$I_2'' = 0;$$

$$I_3' = \frac{1}{2(\varepsilon^2-1)}\left[\frac{\sin\alpha_1}{(\varepsilon-\cos\alpha_1)^2}+3\varepsilon I_2'-I_1'\right] =$$

$$= \frac{1}{2(1{,}05^2-1)}\left[\frac{\sin 107°45'}{(1{,}05-\cos 107°45')^2}+3\times 1{,}05\times 100{,}16-9{,}108\right];$$

$$I_3' = 1\,541{,}57;$$

$$I_3'' = 0.$$

Cu aceste valori rezultă:

$$\varepsilon-\cos\alpha_0 = \frac{I_2'-I_2''}{I_3'-I_3''} = 0{,}0649, \text{ de unde se obţine}$$

$$\alpha_0 = 9°54'.$$

Mai departe se calculează:

$$A = I_1'-I_1''-(\varepsilon-\cos\alpha_1)(I_2'-I_2'') = 2{,}608;$$

$$B = \frac{1}{\varepsilon-\cos\alpha_2}-\frac{1}{\varepsilon-\cos\alpha_1}+\frac{1}{2}(\varepsilon-\cos\alpha_0)\left[\frac{1}{(\varepsilon-\cos\alpha_1)^2}-\frac{1}{(\varepsilon-\cos\alpha_2)^2}\right] = 6{,}339,$$

de unde

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{A}{B} = \operatorname{arctg}\frac{2{,}608}{6{,}339} = 22°20'.$$

Această valoare a lui φ, care diferă de cea admisă la început, arată că centrul fusului nu se mişcă pe un semicerc cum s-a presupus.

Expresia reacţiunii $\mathfrak{R}$ este:

$$\mathfrak{R} = 6\frac{A}{\sin\varphi}\frac{\eta\omega r^3 l}{e^2} = \frac{6\times 2{,}608}{\sin 22°20'}\frac{\eta\omega r^3 l}{e^2} = 41{,}2\frac{\eta\omega r^3 l}{e^2}\text{ [kgf]}.$$

Dacă se înlocuieşte $e=\frac{\delta}{2\varepsilon}=\frac{\delta}{2{,}1}$, avem

$$\mathfrak{R} = 22{,}71\,\eta\omega\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 ld \text{ [kgf]}.$$

Presiunea specifică medie este (suprapresiunea medie)

$$p_m = 22{,}71\,\eta\omega\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \text{ [kgf/cm}^2\text{]}.$$

Forţa de frecare F dintre fus şi cuzinet este

$$F = (3A)+(I_1'-I_1'')\frac{\eta\omega r^2 l}{e} = 16{,}93\frac{\eta\omega r^2 l}{e} = 8{,}89\,\eta\omega\left(\frac{d}{\delta}\right)dl \text{ [kgf]}.$$

In sfirşit, coeficientul frecării lichide μ_1 rezultă din formula (I.306):

$$\mu_1 = \varkappa \frac{\eta\omega}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right) = 8{,}89\frac{\eta\omega}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right).$$

Dacă se calculează μ_1, din formula (I.304) în care se introduc valorile lui F şi $\mathfrak{Q}$ determinate mai sus, se obţine:

$$\mu_1 = \frac{F}{\mathfrak{Q}} = \frac{8{,}89}{22{,}71}\left(\frac{\delta}{d}\right) = 0{,}391\left(\frac{\delta}{d}\right),$$

de unde coeficientul de frecare lichidă redus are valoarea

$$\mu_1\frac{d}{\delta} = 0{,}391.$$

Se pot face calcule asemănătoare pentru diferite valori ale lui ε.

Studiul amănunţit al frecării lichide în lagăre este foarte complicat, iar calculele sînt laborioase[1]). Majoritatea ecuaţiilor care rezultă sînt transcendente şi rezolvarea lor nu se poate face decît prin încercări. Exemplul de mai sus este de altfel destul de edificator.

De aceea studiul se face de obicei pentru cazuri particulare limite, rezultatele intermediare făcîndu-se prin metoda interpolării funcţionale[2]).

Cazul b. O altă ipoteză de calcul, mai aproapé de realitate decît prima, este aceea în care curba de repartizare a presiunii în filmul de ulei este corespunzătoare fig. I.109, *a*, sau desfăşurat în fig. I.109, *b*.

Din această curbă rezultă că:

— presiunea în dreptul stratului minim de ulei (în *a*) este egală cu a uleiului la intrarea în cuzinet (în *b*);

— punctele de presiune maximă (în *c*) şi minime (în *d*) sînt simetrice faţă de zona stratului minim (*a*), adică:

$$\overline{ac} = \overline{ad};$$

— între punctul de presiune nulă (în *e*) şi cel de presiune minimă se află zona de depresiune atmosferică, deci de rupere a filmului de ulei.

Calculul se poate simplifica şi observînd că, deoarece rezultanta R a presiunilor trebuie să fie egală şi de sens contrar cu $\mathfrak{Q}$, va trebui de asemenea ca proiecţia verticală a presiunilor din zona $\alpha_2 = 0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi$ să fie egală cu aceea din zona $\varphi < \alpha < \alpha_1$.

În acest caz, condiţiile la limită sînt:

$p(\alpha_1) = p(0) = p_1$ şi atunci, din (I.293), se obţine:

$$p(\alpha_1) - p(0) = -\frac{6\eta\omega r^2}{e^2}[I_2' - (\varepsilon - \cos\alpha_0) I_3'] = 0,$$

deoarece

$$I_1'' = I(0) = 0; \quad I_2'' = I_2(0) = 0 \quad \text{şi} \quad I_3'' = I_3(0) = 0.$$

[1]) N. Tipei, Hidro-aerodinamica lubrificaţiei, Editura Academiei R.P.R., 1957.
[2]) Al. Seleşteanu, Calculul modern al organelor de maşini, p. 125, Editura Tehnică, 1957.

De aici rezultă

$$\varepsilon - \cos\alpha_0 = \frac{I_2'}{I_3'}, \tag{I.308}$$

iar presiunea în filmul de ulei se exprimă cu formula:

$$p(\alpha) - p_1 = -\frac{6\eta\omega r^2}{e^2 I_3'}(I_2 I_3' - I_3 I_2'). \tag{I.309}$$

Calculul poziţiei φ a fusului şi a expresiei forţei $\mathfrak{Q}$ rezultă din ecuaţiile de echilibru:

$$\frac{1}{2}\mathfrak{Q} = rl\int_0^{\varphi} p\cos(\varphi - \alpha)\,d\alpha = rl\int_{\varphi}^{\alpha_1} p\cos(\alpha - \varphi)\,d\alpha = \frac{1}{2}rl\int_0^{\alpha} p\cos(\alpha - \varphi)\,d\alpha; \tag{I.310}$$

$$\int_0^{\varphi} p\sin(\varphi - \alpha)\,d\alpha = \int_{\varphi}^{\alpha_1} p\sin(\alpha - \varphi)\,d\alpha. \tag{I.311}$$

Făcînd dezvoltările, se obţine: Din (I.311)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\int_0^{\alpha_1} F(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha}{\int_0^{\alpha_1} F(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha} = \frac{C}{D}, \tag{I.312}$$

adică asemănătoare formulei (I.297).

Valorile lui C şi D de mai sus sînt:

$$C = \int_0^{\alpha_1} F(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha = F(0) - F(\alpha_1)\cos\alpha_1 + (\varepsilon - \cos\alpha_0) I_2'' - I_1'; \tag{I.313}$$

$$D = \int_0^{\alpha_1} F(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha = F(\alpha_1)\sin\alpha_1 + \\ + \frac{1}{\varepsilon - \cos\alpha_1} - \frac{1}{\varepsilon - 1} - \frac{1}{2}(\varepsilon - \cos\alpha_0)\cdot\left[\frac{1}{(\varepsilon - \cos\alpha_1)^2} - \frac{1}{(\varepsilon - 1)^2}\right]. \tag{I.314}$$

Din condiţiile la limită rezultă:

$$F(\alpha_1) = F(0) = -\frac{p_1 e^2}{6\eta\omega r^2}. \tag{I.315}$$

Din (I.310) se obţine expresia reacţiunii $R = \mathfrak{Q}$:

$$\mathfrak{Q} = -\frac{6\eta\omega r^3 l}{e^2}[D\cos\varphi + C\sin\varphi]$$

sau

$$\mathfrak{Q} = -\frac{6\eta\omega r^3 l}{e^2}\frac{C}{\sin\varphi} \tag{I.316}$$

sau

$$\mathfrak{Q} = -3ld\varepsilon^2\frac{C}{\sin\varphi}\eta\omega\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \text{ [kgf]}. \tag{I.316'}$$

Presiunea specifică medie p_m este evident

$$p_m=\frac{\mathfrak{R}}{2rl}=-\frac{3\eta\omega r^2}{e^2}\frac{C}{\sin\varphi} \tag{I.317}$$

sau

$$p_m=-3\varepsilon^2\frac{C}{\sin\varphi}\eta\omega\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \text{ [kgf/cm}^2\text{]}.$$

Forța de frecare F are o expresie asemănătoare formulei (I.303):

$$F=\frac{\eta\omega r^2 l}{C}\left[4\int_0^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{\varepsilon-\cos\alpha}-3(\varepsilon-\cos\alpha_0)\int_0^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{(\varepsilon-\cos\alpha)^2}\right].$$

Ținînd seamă de (I.289) și de (I.290), rezultă:

$$F=\frac{\eta\omega r^2 l}{e}[4I_1'-3(\varepsilon-\cos\alpha_0)I_2'] \tag{I.318}$$

sau

$$F=\frac{\varepsilon}{2}[4I_1'-3(\varepsilon-\cos\alpha_0)I_2']\frac{\eta\omega}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right)ld \tag{I.318'}$$

sau

$$F=\varkappa_1\frac{\eta\omega}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right)ld \text{ [kgf]}.$$

Coeficientul frecării lichide μ_1 va avea expresia

$$\mu_1=\frac{F}{\mathfrak{R}}=\frac{[3(\varepsilon-\cos\alpha_0)I_2'-4I_1']\sin\varphi}{6\varepsilon C}\cdot\frac{\delta}{a}=\varkappa_2\frac{\delta}{d}. \tag{I.319}$$

In funcție de presiunea specifică medie p_m, expresia lui μ_1 devine:

$$\mu_1=\frac{F}{ldp_m}=\frac{\varepsilon}{2}[4I_1'-3(\varepsilon-\cos\alpha_0)I_2']\frac{\eta\omega}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right)$$

sau

$$\mu_1=\varkappa_1\frac{\eta\omega}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right), \tag{I.320}$$

în care s-a notat pentru prescurtare:

$$\varkappa_2=[3(\varepsilon-\cos\alpha_0)I_2'-4I_1']\frac{\sin\varphi}{3\varepsilon C}; \tag{I.321}$$

$$\varkappa_1=\frac{\varepsilon}{2}[4I_1'-3(\varepsilon-\cos\alpha_0)I_2']. \tag{I.322}$$

Și aici, ca și în cazul a), expresiile lui F, μ_1, p_m etc., depind de poziția fusului în cuzinet.

Se pot calcula valorile lui μ_1 date de formulele (I.319) și (I.320) pentru diferitele poziții ale fusului în cuzinet și pentru diferite puncte de întrare a uleiului (deci funcție de unghiul α_1).

Calculele sînt destul de laborioase și rezultatele duc la concluzia că μ_1 crește cu micșorarea lui φ.

In cazul cînd în formula (I,315) se consideră $p_1=0$, adică se neglijează mărimea presiunii de întrare a uleiului față de presiunea care există în filmul de ulei, atunci se ajunge la cazul a) simplificat.

Pentru cazul de mai sus s-au calculat valorile lui φ, α_0, $\mathfrak{R}$, F și μ_1 corespunzătoare unor poziții ale fusului în cuzinet. Aceste mărimi sînt date în tabela I.3.

Tabela I.3. Determinarea valorilor φ, α_0, P, F și μ_1 pentru diferite poziții (ε) ale fusului în cuzinet

Nr. crt.	Denumirea simbolul mărimii calculate	ε			
		1,1	1,05	1,04	1,01
1	α_1	114°37′	107°45′	105°56′30″	98°4′30″
2	α_2	0	0	0	0
3	$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{A}{B}$	29°21′	22°20′	20°30′	11°34′
4	$\alpha_0=\arccos\left(\varepsilon-\frac{I_2'}{I_1'}\right)$	14°50′	9°54′	9°24′	4°41′30″
5	$\frac{p_m}{\eta\omega}\left(\frac{\delta}{d}\right)^2=\frac{3A}{\sin\varphi}\varepsilon^2$	11,31	22,71	26,02	98,24
6	$\mu_1\frac{p_m}{\eta\omega}\left(\frac{\delta}{d}\right)=x_1$	6,19	8,89	9,68	15,45
7	$\mu_1\left(\frac{d}{\delta}\right)=x_2$	0,547	0,391	0,373	0,157

Din tabela I.3 rezultă că valorile lui $\mu_1=\varkappa_1\frac{\eta\omega_1}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right)$ calculate în rîndul 6 sînt mari, avînd în vedere condițiile în care s-a considerat că funcționează fusul.

Cu cît valoarea lui ε crește, cu atît μ_1 scade, la aceeași valoare a lui $\frac{\eta\omega}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right)$.

Pentru calcule se pot utiliza o serie de formule care dau pe μ_1, recomandate în „Mașinostroenie“, vol. II.

Astfel, Petrov a dedus formula:

$$\mu_1=\frac{\pi}{2}\frac{\eta\omega}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right)=1{,}57\frac{\eta\omega}{p_m}\left(\frac{d}{\delta}\right). \tag{I.323}$$

Alte formule sînt:

$$\mu_1=3{,}8\sqrt{\frac{\eta\omega}{p_m}}; \quad \text{(Falța)} \tag{I.324}$$

$$\mu_1 = 1{,}7\sqrt{1+\frac{4d}{l}}\sqrt{\frac{\eta\omega}{p_m}}. \qquad \text{(Mac-Ki)} \qquad \text{(I.325)}$$

La lagărele bine unse şi cu funcţionare îngrijită

$$\mu_1 = 0{,}01 \ldots 0{,}001.$$

§ 20. FRECAREA IN CUPLELE CINEMATICE SUPERIOARE

20.1. Studiul sumar al frecării de rostogolire. Cercetări şi rezultate

La cuplele cinematice inferioare, frecarea apărea ca rezultat al alunecării relative a celor două suprafeţe în contact.

La cuplele cinematice superioare, frecarea apare ca rezultat al unor fenomene mai complexe.

Astfel, în cazul patinării roţilor locomotivei pe şină, frecarea (învinsă aici de forţa de tracţiune) apare ca rezultat al alunecării bandajului pe şină.

La mersul normal al roţilor de fricţiune sau al unui vagon, frecarea care apare aici şi împiedică cele două elemente să alunece unul faţă de altul este datorită proprietăţilor elastice ale materialelor din care acestea sînt confecţionate.

Din această cauză apare fenomenul rostogolirii, iar frecarea se numeşte frecare de rostogolire.

Rostogolirea se datoreşte de fapt tot unui fenomen de alunecare de proporţii mici, provocat de deformările locale ale celor două elemente în porţiunea de contact.

In adevăr, dacă discul *1* din fig. I.118, *a*, aflat pe planul *2* are un modul de elasticitate $E_1 = \infty$, iar planul $E_2 \neq 0$, atunci planul se va deforma, iar în timpul deformării vor apărea forţe de frecare simetrice faţă de linia de acţiune a forţei N. Reacţiunea R va avea deci aceeaşi linie de acţiune ca şi N.

Dacă, din contra, $E_1 \neq 0$ şi $E_2 = \infty$, discul se va deforma, forţele de frecare care apar în timpul deplasării relative a suprafeţei deformate faţă de plan fiind în acest caz simetrice faţă de linia de acţiune a lui N (fig. I.118, *b*).

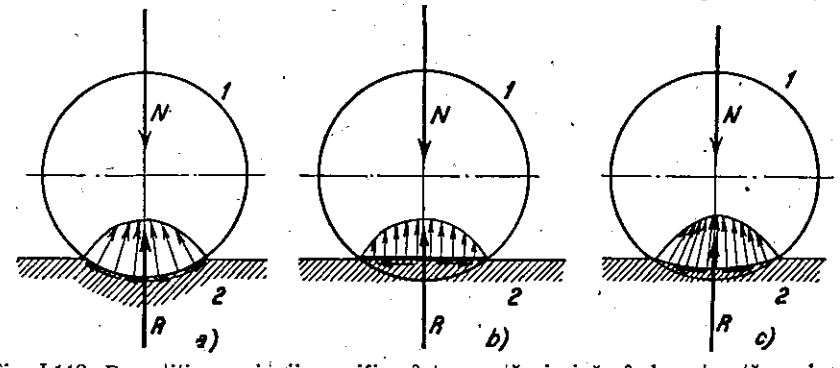


Fig. I.118. Repartiţia presiunii specifice între roată şi şină cînd roata stă pe loc.

Cum totdeauna cazul real este $E_1 \neq E_2 \neq 0$, apar din acest motiv deformaţii elastice atît ale discului cît şi ale planului, frecările fiind tot simetrice şi deci reacţiunea rezultantă R are şi aici tot aceeaşi linie de acţiune ca şi N (fig. I.118, *c*).

Contactul dintre disc şi plan nu este, în consecinţă, cel clasic care stă la baza definiţiei cuplei cinematice superioare (o linie sau un punct), ci o suprafaţă mai mare sau mai mică, mărimea şi forma ei fiind funcţie de proprietăţile elastice ale materialelor (E_1 şi E_2), de mărimea razelor de curbură (r_1 şi r_2) şi de valoarea forţei normale N.

Forma suprafeţei de contact şi eforturile unitare normale care apar în cazul de mai sus au fost determinate de Herz în ipoteza lipsei eforturilor unitare tangenţiale şi a nedepăşirii limitei de proporţionalitate (Manualul inginerului, Editura Tehnică, p. 437, tabela 52).

Ce se întîmplă însă cînd discul începe să se rostogolească pe plan sub acţiunea forţei de tracţiune T?

Din cauza anizotropiei materialelor, deformaţia celor două elemente va fi mai accentuată în direcţia de deplasare a discului, astfel încît forma curbei de variaţie a presiunilor pe suprafeţele de contact se va prezenta ca în fig. 119, *a*. Rezultanta va fi deci deplasată cu distanţa f în direcţia deplasării faţă de linia de acţiune a lui N. Această deplasare a rezultantei R în direcţia mişcării determină rezistenţa opusă la rostogolire.

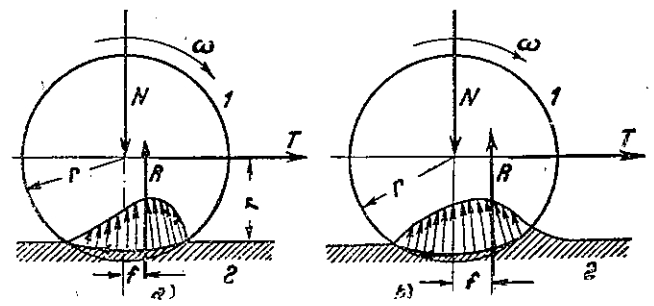


Fig. I.119. Poziţia reacţiunii rezultante a şinii asupra roţii în cazul cînd roata se rostogoleşte pe şină.

Dacă se presupune că forţa de tracţiune acţionează după o direcţie paralelă cu planul *2* şi trece prin centrul discului (şi neglijînd mărimea deformaţiei suprafeţelor faţă de raza r a discului), valoarea forţei T rezultă din ecuaţia de momente în raport cu punctul de intersecţie a lui N cu planul *2*:

$$Tr = Rf.$$

Cum $R = N$, se obţine:

$$T = \frac{f}{r}N. \qquad \text{(I.323)}$$

Distanţa f a căpătat denumirea de braţul frecării de rostogolire şi se măsoară de obicei în centimetri. In unele cazuri f este numit şi coeficient al frecării de rostogolire, avînd dimensiunea unei lungimi.

Se numeşte coeficient redus al frecării de rostogolire raportul

$$f_r = \frac{f}{r}. \tag{I.324}$$

Cu această notaţie formula (I.323) devine

$$T = f_r N \tag{I.325}$$

şi este asemănătoare formulei clasice (I.107) a frecării de alunecare.

Experienţele făcute au arătat că între braţul frecării de rostogolire f şi raza roţii r există relaţia

$$f = k\sqrt{r}, \tag{I.326}$$

unde

$$k = 0{,}00066 \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Wood)}$$

sau

$$k = 0{,}0006 \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Poiré)}.$$

In cazul roţilor vagoanelor de cale ferată, cu $r = 50$ cm, valoarea lui f este

$$f = 0{,}05 \ldots 0{,}055 \text{ cm}.$$

Valorile lui f date de formula (I.326) cuprind şi frecările datorite celorlalte fenomene care însoţesc rostogolirea, şi anume:

— frecarea din fusuri:
— frecarea datorită rezistenţei aerului;
— frecarea datorită neregularităţii căii, ciocnirilor, oscilaţiilor vehiculelor etc.

Experienţele care au fost făcute pentru determinarea lui f lipsit de toate influenţele citate mai sus au ajuns la concluzia că acesta depinde şi de viteza de deplasare.

In cazul bandajelor pe şină, s-a găsit:

la $v = 40$ km/h $\quad f = 0{,}028$ cm;

$v = 60$ km/h $\quad f = 0{,}033$ cm;

$v = 90$ km/h $\quad f = 0{,}048$ cm.

Fenomenul rostogolirii roţilor pe şină se poate explica şi prin deformaţia şinei după forma arătată în fig. I.119, *b*. Deformaţiile intră în acest caz în domeniul plastic, materialul roţii comprimîndu-se în momentul contactului cu şina, iar al acesteia din urmă, umflîndu-se.

Este evident că între moleculele celor două materiale, producîndu-se deplasări, apare o pierdere de energie. De asemenea, din cauza deformaţiei, deplasările relative ale celor două suprafeţe în contact vor produce forţe de frecare ale căror ordine de mărime pot fi indicate de diagrama din fig. I.69.

20.2. Pseudoalunecarea

Astfel, deşi în fond mai sus este vorba de o rostogolire pură, totuşi, o analiză mai adîncă a fenomenului constată existenţa între suprafeţele de contact, a unei pseudoalunecări (false alunecări), care este cu atît mai mare cu cît forţa de tracţiune T care acţionează asupra roţii este mai mare.

Acest fenomen are o însemnătate capitală la circulaţia vehiculelor pe pneuri, unde deformaţia anvelopei iese din domeniul mărimilor foarte mici.

Fenomenul se poate defini astfel:

Un bandaj pneumatic care se rostogoleşte, exercitînd în acelaşi timp o forţă de tracţiune T, parcurge un drum dat l într-un număr de rotaţii mai mare decît cel ce s-ar deduce din raza r a bandajului. *Raportul dintre acest surplus de rotaţii şi numărul de rotaţii corespunzător unui parcurs egal cu unitatea este proporţional cu forţa de tracţiune.*

Fie (fig. I.120) o roată de automobil asupra căreia acţionează un moment (cuplu) motor M, căruia îi corespunde pe cercul de rulare o forţă tangenţială T. Forţei tangenţiale T îi corespunde în limitele aderenţei dintre anvelopă şi teren ($T \leq \mu N$) o frecare de aderenţă F_0, egală şi de sens contrar.

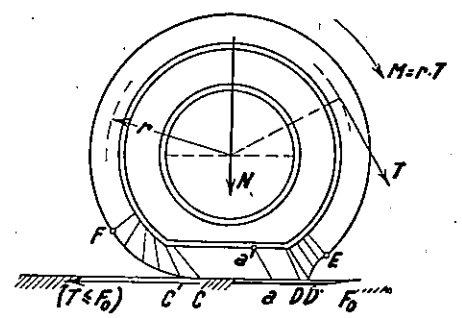


Fig. I.120. Forma anvelopei în porţiunea de contact cu terenul.

Analizînd fenomenul în regiunea de contact se observă că, sub acţiunea forţei F_0, ia naştere o deplasare tangenţială $e = cc' = DD'$ a suprafeţei de contact în direcţia şi în sensul lui F_0. Această deplasare are loc aproape în întregime în regiunea supusă rostogolirii, care este mai flexibilă decît restul anvelopei.

Deplasarea creează o asimetrie în anvelopă, deoarece în imediata apropiere a începutului contactului se va afla o porţiune $D'E$ a anvelopei unde materialul va fi comprimat, în timp ce în partea opusă, în porţiunea $C'F$, va fi întinsă.

Se va presupune că momentul motor aplicat este suficient pentru a pune în mişcare roata. Atunci porţiunea contractată din apropierea lui D' va începe să se angajeze în suprafaţa de contact, unde, datorită aderenţei, va rămîne contractată mai departe.

Roata este astfel obligată să se rotească pe un plan fără să alunece, cu porţiunea de contact a roţii contractată şi în acelaşi timp deformată tangenţial în sensul de înaintare. Astfel, un element de arc din cercul de rulare, care înainte de deformare era $r\,d\alpha$, devine acum:

$$r(1-u)\,d\alpha,$$

în care u este scurtarea specifică a elementului de arc datorită contractării materialului în vecinătatea lui D' (pseudoalunecare).

Cînd roata se roteşte deci cu unghiul $d\alpha$, ea va înainta pe teren cu distanţa $r(1-u)\,d\alpha$, iar cînd va face o rotaţie completă, ea nu va fi înaintat decît cu

$$2\pi r(1-u).$$

Din cele de mai sus rezultă că u este micşorarea fictivă a razei de rulare r datorită pseudoalunecării.

Această pseudoalunecare face ca într-un număr de rotaţii reale

$$n=\frac{1}{u}$$

ale roţii asupra căreia este aplicat momentul motor M să se parcurgă acelaşi spaţiu pe care l-ar fi efectuat aceeaşi roată într-un număr de rotaţii egal cu

$$n-1,$$

dacă asupra ei nu ar fi acţionat momentul motor M.

In adevăr, dacă se notează cu x numărul de rotaţii necesare roţii de rază r pentru ca să parcurgă spaţiul s parcurs de roata de rază $r(1-u)$, se obţine:

$$s=2\pi rx=2\pi r(1-u)\,n,$$

de unde

$$x=\left(1-\frac{1}{n}\right)n=n-1.$$

Dacă se urmăreşte deplasarea relativă a două puncte: unul a, pe suprafaţa de contact a bandajului cu terenul, şi altul a', în interior, care se găsea pe aceeaşi rază la începutul contactului, se constată că a' o ia înaintea lui a în tot timpul cît acesta este în contact cu terenul.

Aceasta dovedeşte că deformarea tangenţială a materialului anvelopei din porţiunea de contact continuă să crească pînă la sfîrşitul contactului dintre anvelopă şi teren.

Se pot ivi aici două cazuri:

— Forţa tangenţială T rămîne tot timpul inferioară forţei de aderenţă F_0.

— T atinge limita lui F_0 înainte de sfîrşitul contactului.

In primul caz, care corespunde unui moment motor $M\,(=Tr)$ normal, aderenţa este totală pe întreaga suprafaţă de contact; este cazul pseudoalunecării simple sau proporţionale.

In al doilea caz, dacă momentul motor M creşte, atunci $T<F_0$ numai în porţiunea din faţă a suprafeţei de contact, care rămîne aderentă la teren, în timp ce în porţiunea din spate apare o alunecare.

Apar deci acum atît fenomenul de pseudoalunecare, cît şi cel de alunecare pură.

Dacă T creşte continuu, atunci va apărea fenomenul de alunecare totală cînd aderenţa este depăşită de valoarea lui T.

Studiile făcute pentru determinarea relaţiei dintre forţa tangenţială şi pseudoalunecarea u au presupus, în cazul anvelopelor pneumatice, că presiunea p este uniform repartizată pe suprafaţa de contact.

In acest caz, domeniile în care apar fenomenele descrise mai sus se pot reprezenta într-o diagramă în care pe abscisă se trec valorile pseudoalunecării u, iar pe ordonată — forţa tangenţială T la periferia cercului de rulare (fig. I.121).

In originea axelor, unde $u=0$ şi $T=0$, are loc rostogolirea pură.

Din O pînă la punctul N, cînd u este proporţional cu T are loc pseudoalunecarea simplă. In acest interval relaţia dintre forţa tangenţială T şi u este

$$T=\nu u, \qquad \text{(I.327)}$$

în care ν are dimensiunea unei forţe.

Valoarea ν' din fig. I.121 corespunde cazului cînd T este proporţional cu u.

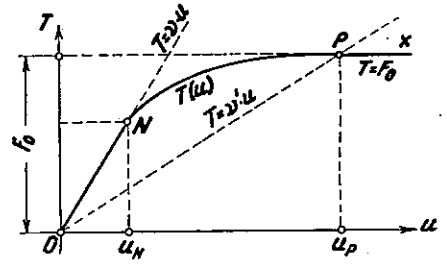


Fig. I.121. Curba de variaţie a forţei tangenţiale T în funcţie de pseudoalunecarea u la o roată cu anvelopă (bandaj) pneumatică.

Din N pînă la P curba reprezintă trecerea treptată de la pseudoalunecare la alunecare, iar porţiunea Px din dreapta $T=F_0$ reprezintă alunecarea pură.

In cazul bandajelor pline, variaţia presiunii pe suprafaţa de contact nu mai poate fi considerată constantă, ci ea variază după cum se arată în fig. I.118 şi I.119.

Fenomenul este acum mai complex decît în primul caz. In adevăr, dacă (fig. I.122) se trece pe ordonata fiecărui punct de contact al suprafeţei AB mărimea forţei de aderenţă $F_0=\mu_0 p$, se obţine curba ASB de variaţie a forţei de aderenţă F_0 (raportată la 1 cm²) dintre bandaj şi teren în lungul suprafeţei de contact AB.

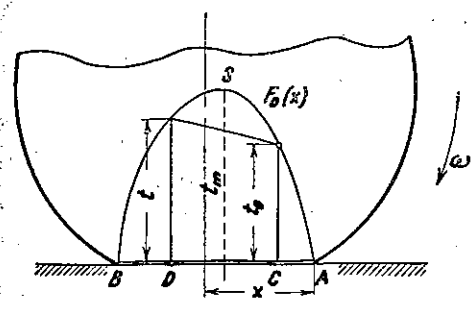


Fig. I.122. Curba de variaţie $F_0(x)$ a forţei de aderenţă unitară pe suprafaţa de contact dintre roată şi teren.

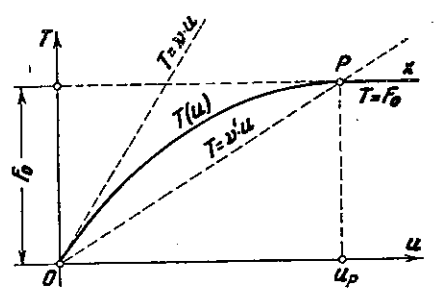


Fig. I.123. Curba de variaţie a forţei tangenţiale T în funcţie de u la o roată cu bandaj plin.

Dacă momentul motor M produce la periferia cercului de rulare r o forţă tangenţială unitară t_0, atunci aderenţa dintre bandaj şi teren începe abia din punctul C, unde $t_0=\mu p_C=\nu u_C$.

Între punctele C şi D există porţiunea pseudoalunecării. Aici forţa tangenţială unitară creşte proporţional cu pseudoalunecarea u, conform formulei (I.327), pînă în punctul D unde

$$t=\mu p_D=\nu u_D.$$

Între punctele D şi B va apărea o porţiune de alunecare.

În concluzie, *în cazul bandajului plin nu există pseudoalunecare simplă.*

Reprezentarea acestui fenomen într-o diagramă (T, u) va da curba $T(u)$ pentru fenomenul de pseudoalunecare (fig. I.123). Curba $T(u)$ este tangentă în origine la dreapta $t=\nu u$ (pseudoalunecarea simplă sau proporţională) şi se racordează în P la dreapta $T=F_0$ corespunzătoare alunecării pure.

Cercetările întreprinse pentru găsirea ordinii de mărime a coeficientului ν din formula (I.327) au dus la concluzia că el poate fi scris pentru cazul oţelului pe oţel sub forma

$$\nu=kGS, \tag{I.328}$$

în care:

$k=0{,}8$ este un coeficient fără dimensiune;

$G=800\,000$ kgf/cm² — modulul de elasticitate transversală al materialului;

S — aria suprafeţei de contact.

Astfel, pentru o roată de oţel cu diametrul cercului de rulare de 2 m şi a cărui arie a suprafeţei de contact corespunzătoare unei sarcini pe roată de $N=10$ tf este de 400 mm², se obţine:

$$\nu=0{,}8\times 800\,000\times 4=2\,560\times 10^3 \text{ [kgf/radian]}.$$

20.3. Condiţiile rostogolirii

Din cele arătate la § 20.2, se vede că fenomenul trecerii de la rostogolire la alunecare are loc treptat, aceasta din urmă determinîndu-se în urma depăşirii forţei de aderenţă F_0 dintre bandaj şi şină sau dintre două corpuri care se rostogolesc unul pe altul.

Cum forţa de aderenţă F_0 depinde de coeficientul μ_0 al frecării de aderenţă, rezultă că trebuie să existe o relaţie între forţa tangenţială T de la periferia cercului de rulare, diametrul $2r$ al roţii, coeficientul de frecare μ_0 şi braţul frecării de rostogolire f.

Pentru găsirea acestei relaţii se vor considera două cazuri:

a) Roata este motoare, adică asupra axului ei acţionează un moment motor M.

b) Roata este condusă, adică se rostogoleşte sub acţiunea unei forţe de tracţiune T, la o distanţă oarecare y de planul de rulare.

Cazul a): roata motoare (fig. I.124)

Forţele care acţionează asupra roţii sînt:

N — sarcina pe roată;

R — rezultanta reacţiunilor şinei asupra roţii, situate la distanţa f de centrul instantaneu de rotaţie I;

M — momentul motor;

T — forţa tangenţială, datorită lui M şi care caută să învingă frecarea de aderenţă F_0 dintre bandaj şi şină; între M şi T există relaţia:

$$M=Tr; \tag{I.329}$$

F_0 — frecarea de aderenţă dintre bandaj şi şină, cu sensul invers tendinţei de alunecare a bandajului faţă de şină.

Conform formulelor (I.108) şi (I.109), expresia lui F_0 este dată de

$$F_0=\mu_0 N. \tag{I.330}$$

Pentru ca să nu existe alunecare între bandaj şi şină, trebuie îndeplinită condiţia

$$F_0 \geqq T. \tag{I.331}$$

Dacă se ia momentul în raport cu punctul O (centrul roţii) al tuturor forţelor care acţionează asupra roţii, se obţine:

$$M-fR=0. \tag{I.332}$$

Ştiind că $R=N$ şi folosind formula (I.329), se obţine

$$T=\frac{f}{r}N=f_r N. \tag{I.333}$$

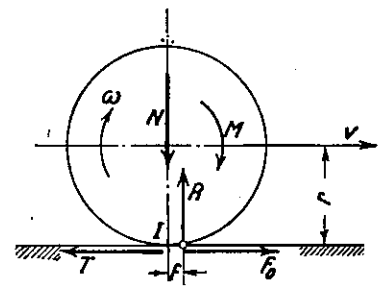


Fig. I.124. Acţiunea forţelor asupra unei roţi motoare în timpul rostogolirii.

Înlocuind în (I.331) pe F_0 şi T şi făcînd reducerile, rezultă:

$$\mu_0 > f_r. \tag{I.334}$$

Din formula (I.334) rezultă că roata motoare se va rostogoli pe şină atît timp cît coeficientul frecării de aderenţă μ_0 este mai mare decît coeficientul redus al frecării de rostogolire f_r.

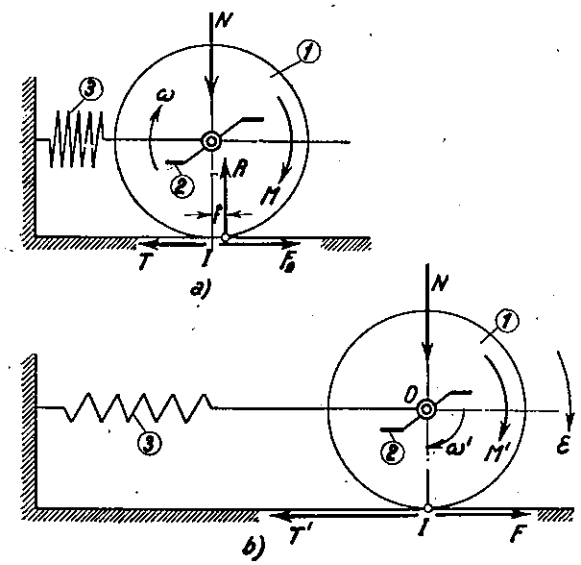


Fig. I.125. Rostogolirea (fig. I.125, *a*) şi patinarea roţii motoare (fig. I.125, *b*) datorită depăşirii forţei de aderenţă F_0.

Imediat ce $f_r=\mu_0$, începe alunecarea bandajului pe şină şi relaţia (I.334) devine

$$f_r=\mu. \qquad \text{(I.335)}$$

În cazul locomotivelor, fenomenul se numeşte patinare. Evitarea patinării în timpul demarajului se face introducînd nisip între bandaj şi şină, mărindu-se astfel frecarea de aderenţă.

Un exemplu sugestiv prin care se pot sezisa mai bine limitele dintre rostogolire şi alunecare în cazul roţilor motoare este redat în fig. I.125, *a*.

O roată *1*, a cărei greutate împreună cu sarcina pe care o suportă este N şi e acţionată prin intermediul unor pedale *2*, se rostogoleşte pe teren întinzînd arcul *3*. Atît timp cît roata se rostogoleşte pe teren forţa tangenţială T la periferia cercului de rulare este tot timpul egală cu tensiunea arcului *3* şi mai mică decît frecarea de aderenţă $F_0=\mu_0 N$.

Cînd tensiunea arcului depăşeşte frecarea de aderenţă, roata va patina pe teren nemaiputînd înainta, cu toate că momentul motor M' dezvoltat de forţele care apasă pe pedale poate să crească.

Această creştere a lui M' nu va face altceva decît să accelereze mişcarea de rotaţie a roţii *1* în jurul axului O (fig. I.125, *b*).

Cazul b): roata condusă (fig. I.126)

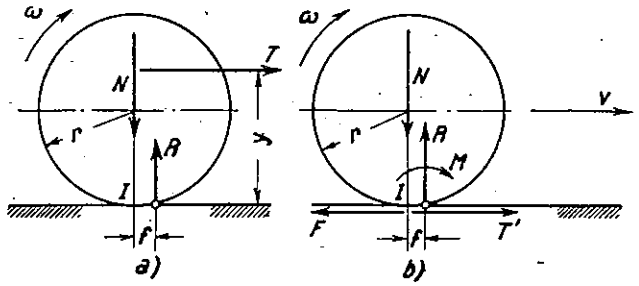


Fig. I.126. Acţiunea forţelor asupra unei roţi conduse în timpul rostogolirii.

Forţa motoare acţionează la o distanţă oarecare y de teren (fig. I.126, *a*).

Dacă se reduc toate forţele la punctul *I* (centrul instantaneu de rotaţie al roţii), forţa motoare T se reduce la o rezultantă $T'=T$ acţionînd în acelaşi sens cu T şi la un moment $M=yT$ (fig. I.126, *b*), iar reacţiunea R va da un moment $M_r=Rf$.

În această situaţie, pentru a nu exista alunecare între bandaj şi şină sub acţiunea forţei $T'=T$ va trebui să existe inegalitatea

$$F_0 \geqq T',$$

deci aceeaşi relaţie ca şi în cazul roţii motoare.

Aceleaşi calcule ca cele precedente duc la acelaşi rezultat exprimat de relaţia (I.335).

Această relaţie stă la baza proiectării vehiculelor care se deplasează pe şine (locomotive cu abur, locomotive Diesel-electrice, automotoare), deoarece puterea motoare trebuie pusă în concordanţă cu capacitatea de aderenţă a roţilor pe şine. Puterea unei locomotive nu poate fi deci mărită fără a se ţine seamă de limita de aderenţă dintre bandaje şi şine.

Cu totul altfel trebuie privită frecarea de rostogolire şi de alunecare dintre flancurile dinţilor unui angrenaj. Aici creşterea frecărilor de rostogolire şi de alunecare micşorează randamentul mecanismului. Se va căuta deci ca prin introducerea angrenajului într-o baie de ulei să se micşoreze coeficientul de frecare, astfel încît pierderile să fie minime.

Se va arăta la § 7.2 din partea II cum cele două frecări influenţează randamentul mecanismelor roţilor dinţate.

20.4. Frecarea la deplasarea corpurilor pe rulouri (role)

Pentru deplasarea unei piese grele pe teren se interpune între aceasta şi teren rulouri (role).

Astfel, frecarea de alunecare care ar trebui învinsă în cazul alunecării este înlocuită printr-una de rostogolire dintre rulouri, teren şi piesă.

In fig. I.127 este reprezentat cazul practic al unei piese de greutate G, care, sub acţiunea forţei de tracţiune T, se deplasează pe n rulouri de acelaşi diametru d şi greutate Q.

Acestea se vor roti în sensul săgeţilor *1*, astfel că reacţiunile $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ale terenului şi reacţiunile $R'_1, R'_2, \ldots, R'_n$ ale piesei asupra rulourilor vor produce un moment rezistent, care se opune sensului de rotaţie *1* imprimat de forţa de tracţiune T.

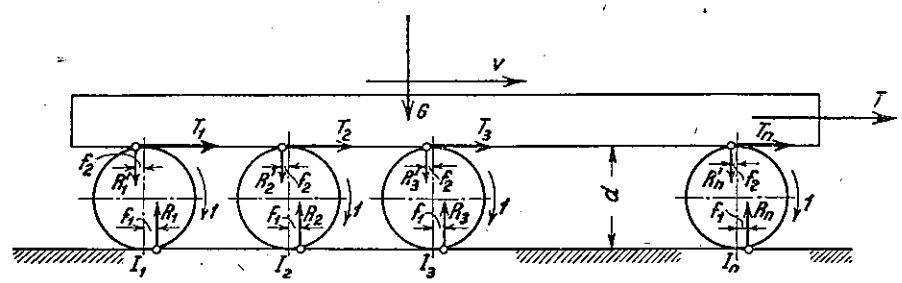


Fig. I.127. Acţiunea forţelor la deplasarea corpurilor pe rulouri.

Dacă se notează cu f_1 şi f_2 braţele frecărilor de rostogolire ale rulourilor faţă de teren şi piesă, atunci momentele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ale rezistenţelor de rostogolire se află luînd momentele tuturor forţelor care acţionează asupra fiecărui rulou în raport cu centrele instantanee de rotaţie $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ale rulourilor în raport cu terenul.

Dacă T_1, T_2, ..., T_n sînt părţile din forţa de tracţiune T care revin rulourilor $1, 2, \ldots, n$, atunci ecuaţia de momente pentru ruloul de ordinul j este:

$$R_j f_1 + R'_j f_2 - T_j d = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n); \tag{I.336}$$

dar

$$R_j = R'_j + Q; \tag{I.337}$$

$$\sum_1^n R'_j = G; \qquad \sum_1^n R_j = G + nQ; \tag{I.338}$$

$$\sum_1^n T_j = T. \tag{I.339}$$

Dacă se adună cele n ecuaţii din (I.336) şi se ţine seamă de (I.337)–(I.339), se obţine:

$$f_1 \sum_1^n R_j + f_2 \sum_1^n R'_j = d \sum_1^n T_j,$$

de unde

$$T = \frac{f_1+f_2}{d} G + \frac{f_1}{d} nQ. \tag{I.340}$$

Dacă se neglijează greutatea nQ a rulourilor faţă de greutatea G a piesei, formula devine:

$$T = \frac{f_1+f_2}{d} G. \tag{I.341}$$

Din formulele (I.340) şi (I.341) rezultă că forţa de tracţiune T necesară pentru deplasarea piesei este cu atît mai mică, cu cît diametrul rulourilor este mai mare şi greutatea Q a lor este mai mică.

Rostogolirea va avea loc dacă

$$F_0 > T.$$

Inlocuind în inegalitatea de mai sus pe T dat de (I.340) şi pe $F_0 = \mu_0 (G+nQ)$, se obţine:

$$\mu_0 > \frac{f_1+f_2}{d} \cdot \frac{G}{G+nQ} + \frac{f_1}{d} \frac{nQ}{G+nQ}; \tag{I.342}$$

dacă se neglijează nQ, rezultă:

$$\mu_0 > \frac{f_1+f_2}{d}. \tag{I.343}$$

Dacă

$$T > F_0,$$

piesa va aluneca pe rolele care rămîn fixe.

In practică se alege un număr mai mare de role de un diametru convenabil şi, în plus, se ung şi suprafeţele de contact.

Deplasarea pieselor pe role are o întinsă răspîndire în uzinele de laminoare.

20.5. Frecarea de rostogolire în rulmenţi

Rulmentul este compus din două carcase (inele), (fig. I.128): una interioară *1*, fixată de fus şi rotindu-se cu acesta, şi una exterioară *2* fixă.

Intre ele se rostogolesc în timpul funcţionării rolele sau bilele *3*, după cum rulmentul este cu role sau cu bile.

Sarcina $\mathfrak{Q}$ a fusului se transmite prin intermediul carcasei interioare la bile şi, de aici, la carcasa exterioară.

Din cauza poziţiei diferite a bilelor faţă de linia de acţiune a lui $\mathfrak{Q}$, reacţiunile bilelor aflate sub planul orizontal asupra carcasei interioare şi reacţiunile carcasei exterioare asupra bilelor vor varia cu poziţia acestora faţă de linia de acţiune a lui $\mathfrak{Q}$.

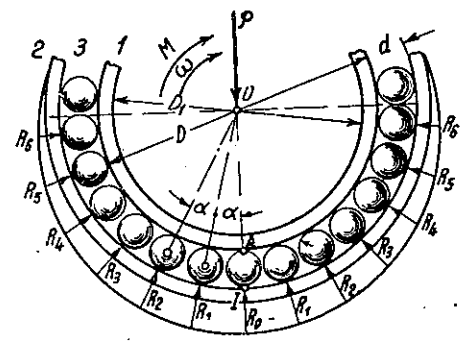


Fig. I.128. Rulmentul cu bile şi repartizarea reacţiunilor în funcţie de poziţia bilelor.

Se va căuta să se găsească în acest scop legea de variaţie a reacţiunilor R_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ ale carcasei exterioare asupra bilelor.

Pentru aceasta se va nota cu:

R_0 — reacţiunea carcasei exterioare asupra bilei al cărei centru se află pe linia de acţiune a sarcinii $\mathfrak{Q}$, reacţiune care în acest caz are valoarea maximă $R_0 = R_{max}$;

α — unghiul pe care-l fac între ele razele care trec prin centrele a două bile vecine;

n — numărul de bile cuprinse într-un sfert de cerc, astfel că n şi α sînt legate între ele prin relaţia:

$$n\alpha \leq \frac{\pi}{2}. \tag{I.344}$$

Dacă acum se proiectează pe direcţia de acţiune a lui $\mathfrak{Q}$ toate reacţiunile R_j ale bilelor aflate sub planul orizontal şi scriind că suma lor este egală cu $\mathfrak{Q}$, se obţine:

$$\mathfrak{Q} = R_0 + 2R_1 \cos\alpha + 2R_2 \cos 2\alpha + \ldots + 2R_n \cos n\alpha$$

sau

$$\mathfrak{Q} = R_0 + 2 \sum_1^n R_j \cos j\alpha. \tag{I.345}$$

Se va presupune că deformaţiile U_j produse în suprafeţele de contact ale bilelor şi carcasei de către R_j au o lege asemănătoare cu cea a uzurii cuzinetului rodat (fig. I.92, *b*), adică

$$U_j = U_0 \cos j\alpha \qquad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{I.346}$$

Relaţia dintre deformaţia U_j, care apare în apropierea locului de contact dintre bilă şi carcasă, şi R_j este dată de formula lui Herz:

$$U_j^3=2{,}25\,(1-\mu^2)\frac{R_j^2}{rE^2}\text{ [1]}. \tag{I.347}$$

Făcînd $j=0$ şi $j=j$ şi împărţindu-le, se obţine

$$\frac{U_0^3}{U_j^3}=\frac{R_0^2}{R_j^2},$$

de unde

$$R_j=R_0\left(\frac{U_j}{U_0}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{I.348}$$

sau, ţinînd seamă de formula (I.346), rezultă:

$$R_j=R_0\cos^{\frac{3}{2}}j\alpha \qquad (j=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{I.349}$$

Formula (I.349) dă legea de variaţie a reacţiunilor în funcţie de poziţia bilelor.

Inlocuind aceste valori în (I.345), se obţine:

$$\mathfrak{Q}=R_0\left(1+2\sum_1^n\cos^{\frac{5}{2}}j\alpha\right),$$

de unde

$$R_0=\frac{\mathfrak{Q}}{1+2\sum_1^n\cos^{\frac{5}{2}}j\alpha}. \tag{I.350}$$

Valoarea numitorului din formula de mai sus depinde de numărul m al bilelor aflate sub planul orizontal ce trece prin axa de rotaţie a rulmentului.

Astfel:

pentru $m=10$ bile $\quad R_0=\frac{\mathfrak{Q}}{2{,}28}=\frac{4{,}38}{m}\mathfrak{Q}$;

pentru $m=15$ bile $\quad R_0=\frac{\mathfrak{Q}}{3{,}44}=\frac{4{,}36}{m}\mathfrak{Q}$;

pentru $m=20$ bile $\quad R_0=\frac{\mathfrak{Q}}{4{,}58}=\frac{4{,}37}{m}\mathfrak{Q}$;

se poate considera deci că pentru rulmenţii cu $m=10\ldots20$ bile, valoarea lui R_0 este dată de formula

$$R_0=\frac{4{,}37}{m}\mathfrak{Q}. \tag{I.351}$$

[1]) Hütte, Manualul Inginerului. Editura A.G.I.R., ediţia 1947, p. 737 (formula 4).

Pentru a se ţine seamă şi de influenţele jocurilor radiale, cum şi de săgeţile inelelor, în calcule se adoptă formula

$$R_0\cong\frac{5\mathfrak{Q}}{m}. \tag{I.351'}$$

In acest caz formula (I.349) devine:

$$R_j=\frac{5\mathfrak{Q}}{m}\cos^{\frac{3}{2}}j\alpha \qquad (j=1,\ 2,\ldots,\ n) \qquad (n=5\ldots10) \tag{I.352}$$

Printr-un calcul asemănător se deduce că, în cazul rulmentului cu role, relaţiile (I.351') şi (I.352) devin:

$$R_0\cong\frac{4{,}6\mathfrak{Q}}{m} \tag{I.353}$$

şi

$$R_j=\frac{4{,}6\mathfrak{Q}}{m}\cos^{\frac{3}{2}}j\alpha. \tag{I.354}$$

Calculul momentului rezistenţei de rostogolire. Este evident că rezistenţa pe care rulmentul o opune la rotirea fusului faţă de carcasa lui exterioară se datoreşte rezistenţei la rostogolire a bilelor sau a rolelor.

Problema ce se pune este să se determine momentul de frecare în rulmenţi şi să se compare valoarea rezultată cu cea dedusă la fusurile cu alunecare în cuzineţi.

Se va calcula pentru aceasta valoarea puterii consumate de rezistenţa la rostogolire a bilelor.

Se va lua o bilă a cărei rază care trece prin centrul ei face unghiul $j\alpha$ cu verticala (fig. I.129).

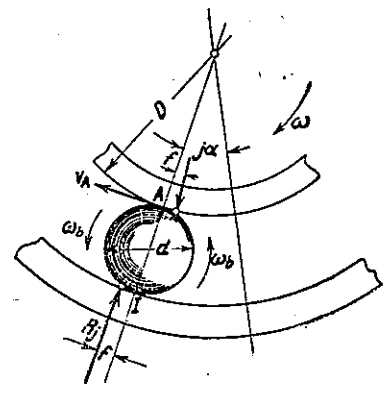


Fig. I.129. Poziţia reacţiunilor la o bilă dintr-un rulment.

Puterea consumată de frecarea de rostogolire a acestei bile faţă de cele două carcase ale rulmentului este dată de expresia

$$P_j=P_{jI}+P_{jA}, \tag{I.355}$$

în care:

P_{jI} este puterea consumată la rostogolirea bilei pe carcasa exterioară;

P_{jA} — puterea consumată la rostogolirea bilei pe carcasa interioară.

P_{jI} este dat de expresia

$$P_{jI}=M_{jI}\omega_b=fR_j\omega_b, \tag{I.356}$$

în care ω_b este viteza unghiulară a bilei faţă de carcasa exterioară. Aici I este CIR al mişcării bilei faţă de carcasa exterioară.

De asemenea,

$$P_{jA}=M_{jA}(\omega+\omega_b)=fR_j(\omega+\omega_b), \tag{I.357}$$

în care:

ω este viteza unghiulară a fusului;

$\omega+\omega_b$ — viteza unghiulară relativă a bielei față de carcasa interioară.

Ducînd pe (I.356) și (I.357) în (I.355), se obține:

$$P_j=fR_j(\omega+2\omega_b). \tag{I.358}$$

Dar

$v_A=\frac{D}{2}\omega$ (în mișcarea de rotație a carcasei interioare);

$v_A=d\omega_b$ (în mișcarea de rotație a bilei în jurul lui I).

De aici rezultă

$$\omega_b=\frac{D}{2d}\omega. \tag{I.359}$$

Introducînd această valoare în (I.358), se obține

$$P_j=fR_j\omega\left(1+\frac{D}{d}\right). \tag{I.360}$$

Insumînd puterile parțiale pentru toate bilele aflate sub planul orizontal, se obține puterea consumată de frecarea de rostogolire din rulment, adică

$$P=\sum P_j=f\omega\left(1+\frac{D}{d}\right)\sum R_j. \tag{I.361}$$

Această formulă capătă formele de mai jos pentru diferitele tipuri de rulmenți.

Astfel, pentru rulmenții cu bile, folosind formula (I.352), rezultă

$$P=f\omega\left(1+\frac{D}{d}\right)\frac{5\mathfrak{Q}}{m}\sum\cos^{\frac{3}{2}}j\alpha; \tag{I.362}$$

dacă se ia ca valoare practică pentru $m=10\ldots20$ buc.

$$\sum\cos^{\frac{3}{2}}j\alpha\cong\frac{m}{3{,}6}.$$

Inlocuind mai sus și făcînd calculele, se obține

$$P=1{,}4f\omega\left(1+\frac{D}{d}\right)\mathfrak{Q}. \tag{I.363}$$

Pentru rulmenții cu role, rezultă

$$P=f\omega\left(1+\frac{D}{d}\right)\frac{4{,}6\mathfrak{Q}}{m}\sum\cos j\alpha. \tag{I.364}$$

Luînd pentru $m=10\ldots20$ buc., se obține

$$\sum\cos j\alpha\cong\frac{m}{3{,}15};$$

înlocuind această valoare în (I.364) și făcînd calculele, rezultă

$$P=1{,}46f\omega\left(1+\frac{D}{d}\right)\mathfrak{Q}. \tag{I.365}$$

Evident că momentele frecărilor de rostogolire vor fi pentru rulmenții cu bile:

$$M_{f_b}=1{,}4f\left(1+\frac{D}{d}\right)\mathfrak{Q}, \tag{I.366}$$

iar pentru rulmenții cu role:

$$M_{f_l}=1{,}46f\left(1+\frac{D}{d}\right)\mathfrak{Q}. \tag{I.367}$$

Din analiza formulelor de mai sus se vede că frecarea de rostogolire este cu atît mai mică, cu cît diametrul D al carcasei interioare este mai mic și diametrul d al bilelor sau rolelor (după caz) este mai mare.

Dacă formulele de mai sus se pun sub o formă analogă cu (I.160) se obține:

— In cazul rulmenților cu bile:

$$M_{f_b}=\mu_b r\mathfrak{Q}=1{,}4f\left(1+\frac{D}{d}\right)\mathfrak{Q},$$

de unde

$$\mu_b=1{,}4f_r\left(1+\frac{D}{d}\right);\qquad\left(f_r=\frac{f}{r}\right). \tag{I.368}$$

— In cazul rulmenților cu role:

$$M_{f_r}=\mu_r r\mathfrak{Q}=1{,}46f\left(1+\frac{D}{d}\right)\mathfrak{Q},$$

de unde

$$\mu_r=1{,}46f_r\left(1+\frac{D}{d}\right); \tag{I.369}$$

μ_b și μ_r se numesc coeficienții de frecare reduși ai rulmenților cu bile sau cu role.

Pentru ca frecarea din rulmenți să fie mai mică decît în cuzineți (cu alunecare) trebuie să existe inegalitatea

$$\mu'>\mu_b$$

sau

$$\mu'>\mu_r,$$

adică:

— pentru rulmenți cu bile

$$\mu'>1{,}4f_r\left(1+\frac{D}{d}\right); \tag{I.370}$$

— pentru rulmenţi cu role

$$\mu' > 1{,}46 f_r \left(1 + \frac{D}{d}\right). \tag{I.371}$$

Din aceste relaţii rezultă:

— pentru rulmenţii cu bile

$$\frac{D}{d} < \frac{\mu'}{1{,}4 f_r} - 1; \tag{I.372}$$

— pentru rulmenţii cu role:

$$\frac{D}{d} < \frac{\mu'}{1{,}46 f_r} - 1. \tag{I.373}$$

Din analiza inegalităţilor (I.372) şi (I.373) se vede că rulmentul cu role este mai avantajos decît cel cu bile, deoarece la acelaşi μ' rezultă un $\frac{D}{d}$ mai mic la cel cu role decît la cel cu bile.

§ 21. FRECAREA LA ELEMENTELE CINEMATICE FLEXIBILE

21.1. Legea frecării la elementele flexibile

Din studiul frecării de rostogolire s-a văzut că fenomenul care are loc în suprafeţele de contact datorită deformaţiei celor două corpuri, produce o pseudoalunecare.

Materialul corpului care se rostogoleşte este comprimat la început, după care urmează o revenire a materialului la starea iniţială pe măsură ce presiunea specifică dintre suprateţe permite acest lucru.

Un fenomen asemănător se petrece şi în cazul frecării care are loc cu ocazia transmiterii mişcării prin intermediul unui element flexibil. Astfel de elemente flexibile se întîlnesc, după cum se ştie, la mecanismele cu transmisie prin cabluri, curele şi benzi elastice.

Fără a intra în studiul intim al fenomenului, formula care exprimă legea frecării elementelor flexibile pe un element rigid (disc, roată) se poate stabili folosind raţionamentul făcut de Euler în 1765.

Se va lua pentru aceasta mecanismul din fig. I.130, *a*, la care elementul condus *2* este acţionat de elementul conducător *1* prin elementul flexibil *3*, în cazul de faţă o curea.

Partea inferioară a curelei, numită şi ramura de ieşire, este aceea care acţionează roata condusă, în timp ce partea superioară, numită şi ramura de intrare, este porţiunea descărcată. Porţiunile de pe roţi pe care cureaua este în contact se numesc arce de înfăşurare, iar unghiurile — unghiuri de înfăşurare (α_1 respectiv α_2, unde, evident, $\alpha_1 = \alpha_2$).

Cureaua este întinsă pe cele două roţi cu o forţă T_0, care împreună cu unghiurile de înfăşurare α_1 şi α_2, determină capacitatea de transmitere a puterii de la roata conducătoare *1* la cea condusă *2*.

Secţionînd cureaua şi înlocuind acţiunea părţii îndepărtate prin tensiunile $T_1 > T_2$ (fig. I.130, *b*), urmează să se găsească relaţia dintre T_1 şi T_2.

Se presupune pentru aceasta că cureaua se mişcă cu o viteză constantă, că se neglijează forţele centrifuge dezvoltate în timpul mişcării pe roată şi că nu există rezistenţe la încovoiere.

La angajarea curelei pe roata motoare în punctul *a*, cureaua este solicitată de tensiunea T, dată de relaţia

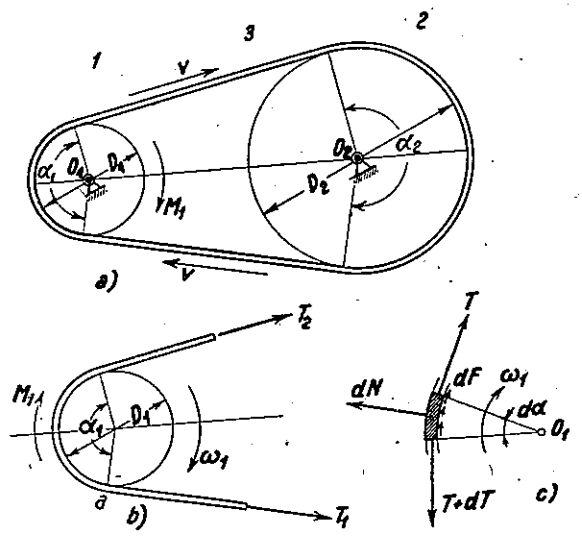


Fig. I.130. Schema unui mecanism cu element flexibil.

$$T_1 = \frac{2M_1}{D_1} + T_2 \tag{I.374}$$

în care:

M_1 este momentul motor;

D_1 — diametrul roţii motoare.

Pe măsură ce înaintează pe periferia roţii motoare, cureaua se destinde, parte din efortul T fiind preluat de frecarea dintre curea şi roată.

Astfel, la ieşirea de pe periferia roţii motoare cureaua nu mai este solicitată decît de efortul T_2, unde:

$$T_2 + F = T_1 \tag{I.375}$$

şi

$$T_1 + T_2 = T_0, \tag{I.376}$$

în care F este frecarea dintre roată şi curea pe arcul de înfăşurare α_1.

Dacă se ia acum numai o porţiune infinit mică din cureaua înfăşurată pe roată (fig. I.130, *c*), forţele care acţionează asupra ei sînt:

$T + dT$ — tensiunea la intrare;

T — tensiunea la ieşire;

dN — reacţiunea normală a roţii asupra elementului de curea;

dF — frecarea elementară dintre elementul de curea şi roată, dirijată în sensul rotaţiei, a cărei valoare este $dF = \mu\, dN$.

Din ecuaţiile de echilibru rezultă:

$$dF = (T + dT) - T = dT,$$

deci

$$dT=\mu\, dN. \tag{I.377}$$

Scriind proiecţiile forţelor după bisectoarea unghiului $d\alpha$, se obţine

$$dN=2T\sin\frac{d\alpha}{2}$$

sau

$$dN=T\, d\alpha. \tag{I.378}$$

Din (I.377) şi (I.378) rezultă

$$\frac{dT}{T}=\mu\, d\alpha. \tag{I.379}$$

Integrînd între $\alpha=0\ldots\alpha_1$ şi $T=T_2\ldots T_1$, se obţine

$$\ln\frac{T_1}{T_2}=\mu\alpha_1,$$

de unde

$$T_1=T_2e^{\mu\alpha_1}. \tag{I.380}$$

Din (I.375) şi (I.380) rezultă mărimea celor două tensiuni în curea, în funcţie de frecarea F:

$$T_2=\frac{F}{e^{\mu\alpha_1}-1};\quad T_1=\frac{Fe^{\mu\alpha_1}}{e^{\mu\alpha_1}-1}. \tag{I.381}$$

Reacţiunea T_0 în lagărele transmisiei cu curea se deduce din (I.376) şi este

$$T_0=F\frac{e^{\mu\alpha_1}+1}{e^{\mu\alpha_1}-1}. \tag{I.382}$$

Cu cît frecarea dintre curea şi roată va fi mai mare, cu atît şi capacitatea de transmitere a puterii de la roata motoare la cea condusă este mai mare.

Din (I.382) rezultă că

$$F=T_0\frac{e^{\mu\alpha_1}-1}{e^{\mu\alpha_1}+1}, \tag{I.383}$$

deci, cu cît — la acelaşi unghi de înfăşurare — cureaua va fi mai întinsă, cu atît şi puterea transmisiei este mai mare.

Dacă ω_1 este viteza unghiulară a roţii motoare *1*, puterea roţii motoare care se poate transmite la cea condusă este

$$P_1=M_1\,\omega_1=F\frac{D_1}{2}\,\omega_1=\frac{\pi D_1n_1}{60}F,$$

sau, înlocuind pe F, se obţine

$$P_1=\frac{\pi n_1}{60}D_1T_0\frac{e^{\mu\alpha_1}-1}{e^{\mu\alpha_1}+1}. \tag{I.384}$$

Mecanismele cu elemente flexibile au utilizări în diferitele ramuri ale industriei.

Randamentul lor nu este însă tot atît de bun ca al mecanismelor cu cuple inferioare sau articulate din cauza posibilităţii de alunecare a elementului flexibil pe roată.

Astăzi, în ateliere şi în uzine, transmisiile cu curele la maşinile-unelte sînt aproape total înlocuite cu acţionare individuală prin motoare electrice.

21.2. Analiza fenomenului frecării dintre elementul flexibil şi roată

Dacă se face o reprezentare grafică a variaţiei tensiunilor din cureaua unei transmisii se vede că, începînd din punctul a (fig. I.131) al ramurii de intrare, unde tensiunea T_1 are valoarea maximă, şi pînă în punctul b al ramurii de ieşire, unde tensiunea T ajunge la valoarea ei minimă T_2, tensiunea T scade în mod continuu.

Din această cauză, materialul care avea o alungire specifică $\varepsilon_1=\frac{T_1}{AE_1}$ la intrare şi-o va micşora treptat ajungînd pînă la $\varepsilon_2=\frac{T_2}{AE_2}$ la ieşire, astfel că între curea şi periferia roţii motoare va exista în tot acest timp o alunecare de natura pseudoalunecării. (Acelaşi fenomen, însă în sens invers, are loc la periferia roţii conduse).

Este evident că această pseudoalunecare consumă din energie, lucru ce se observă prin încălzirea curelei sau a benzii elastice.

Pierderea de energie datorită pseudoalunecării nu poate fi evitată, deoarece acest fenomen este la baza însăşi a transmiterii puterii la astfel de mecanisme. O bandă rigidă nu ar putea fi folosită pentru transmiterea puterii.

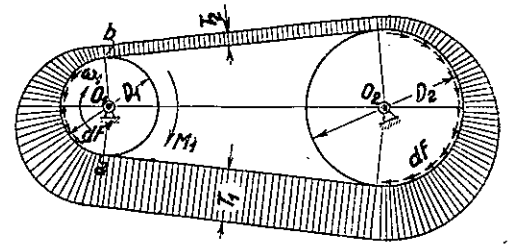


Fig. I.131. Variaţia efortului în cureaua de transmisie.

In timpul mişcării pe cele două roţi cureaua sau banda elastică este deci supusă la o întindere (pe roata condusă) şi o destindere (pe roata motoare), dînd astfel imaginea mersului unei omide ale cărei inele se depărtează şi se apropie în tot timpul mişcării.

21.3. Influenţa forţei centrifuge asupra puterii transmise prin elemente flexibile

Forţa centrifugă dezvoltată de masa curelei, care este înfăşurată pe roată micşorează reacţiunea dintre acestea.

Astfel, dacă q este greutatea pe unitatea de lungime de curea, forţa centrifugă a elementului de curea de lungime $\frac{D}{2}d\alpha=r\,d\alpha$ este

$$\frac{q}{g}\,\frac{v^2}{r}\,r\,d\alpha=\frac{q}{g}v^2\,d\alpha,$$

în care $v=r\omega_1$ este viteza tangenţială a curelei.

In acest caz, ecuaţiile (I.377) şi (I.378) devin:

$$dT=\mu\, dN, \tag{I.385}$$

$$dN=T\,d\alpha-\frac{q}{g}v^2\,d\alpha.$$

De aici rezultă ecuaţia diferenţială:

$$\frac{dT}{T-\frac{q}{g}v^2}=\mu\, d\alpha. \tag{I.386}$$

Integrată între aceleaşi limite ca şi ecuaţia diferenţială (I.379), se obţine:

$$T_1-\frac{q}{g}v^2=\left(T_2-\frac{q}{g}v^2\right)e^{\mu\alpha_1}. \tag{I.387}$$

Tensiunile T_1 şi T_2 în funcţie de frecarea F rezultă din (I.377) şi (I.375):

$$T_2=F\frac{1}{e^{\mu\alpha_1}-1}+\frac{q}{g}v^2;$$

$$T_1=F\frac{e^{\mu\alpha_1}}{e^{\mu\alpha_1}-1}+\frac{q}{g}v^2. \tag{I.388}$$

Din (I.388) rezultă forţa de frecare în cazul luării în consideraţie şi a forţei centrifuge:

$$F=\left(T_2-\frac{q}{g}v^2\right)(e^{\mu\alpha_1}-1);$$

$$F=\left(T_1-\frac{q}{g}v^2\right)\frac{e^{\mu\alpha_1}-1}{e^{\mu\alpha_1}}. \tag{I.389}$$

Se vede că, în cazul cînd viteza transmisiei creşte, capacitatea de transmitere a puterii scade.

Ea devine egală cu zero cînd

$$T_1-\frac{q}{g}v^2=0$$

sau

$$v=\sqrt{\frac{gT_1}{q}};$$

dar cum

$$v=\frac{D_1\omega_1}{2}=\frac{\pi D_1 n_1}{60},$$

rezultă

$$n_1=\frac{60}{\pi D_1}\sqrt{\frac{gT_1}{q}}. \tag{I.390}$$

La această turaţie cureaua nu mai este în contact cu discurile roţilor motoare şi conduse.

PARTEA A DOUA

DINAMICA MAŞINILOR

CAPITOLUL I

TRANSMITEREA LUCRULUI MECANIC ŞI A PUTERII

§ 1. PROBLEMELE DE BAZĂ ALE DINAMICII MAŞINILOR

In paragrafele privitoare la studiul forţelor care acţionează în maşini (partea I, §§ 2 şi 3) s-a arătat cum, prin folosirea principiului lui d'Alembert, se poate rezolva problema determinării reacţiunilor din cuplele cinematice ale unui mecanism pentru orice poziţie a elementului iniţial în timpul ciclului cinematic. In acelaşi timp, metoda permitea aflarea forţei exterioare necunoscute (motoare sau rezistente) care realizează echilibrul dinamic al mecanismului sau al maşinii.

Tot cu acea ocazie s-a arătat (partea I, § 13.2) cum, prin interpretarea geometrică a principiului deplasărilor virtuale prin metoda pîrghiei lui N. E. Jukovski, se poate determina momentul sau forţa de echilibrare a mecanismului sau a maşinii.

In toate calculele menţionate s-a presupus cunoscută viteza unghiulară a elementului iniţial, viteză considerată constantă în tot timpul ciclului cinematic al maşinii.

Acest lucru nu este însă exact, deoarece atît forţa motoare cît şi forţa rezistenţei tehnologice sînt variabile.

Din această cauză vor fi perioade în timpul ciclului cinematic, cînd lucrul mecanic al forţei motoare este mai mare decît cel al rezistenţei tehnologice şi cînd, în consecinţă, viteza unghiulară a elementului iniţial (conducător sau condus, după caz) creşte.

In intervalele de timp cînd lucrul mecanic al forţei motoare este mai mic decît cel al rezistenţei tehnologice viteza unghiulară descreşte.

Variaţiile vitezei unghiulare a elementului iniţial (manivela) modifică radical construcţia planelor vitezelor şi acceleraţiilor, pentru diferitele poziţii ale mecanismului sau maşinii în timpul ciclului cinematic.

In consecinţă, calculul cinetostatic trebuie refăcut, ţinîndu-se seamă de noile forţe de inerţie ale elementelor.

Problema în practică se pune deci sub altă formă decît s-a pus la calculul cinetostatic al mecanismului sau maşinii. Atunci s-a considerat cunoscute viteza unghiulară a elementului iniţial şi forţa motoare (sau rezistenţa tehnologică); s-au determinat — după cum s-a arătat — reacţiunile în cuplele cinematice şi momentul sau forţa de echilibrare (rezistenţa tehnologică în primul caz şi forţa motoare în al doilea caz).

Dinamica maşinilor are ca obiect rezolvarea următoarelor probleme:

a) Determinarea energiei cinetice totale a maşinii, necesară realizării mişcării date, precum şi studiul modului de repartizare a acestei energii de la elementul conducător pînă la cel condus.

Această problemă impune determinarea randamentului mecanic al maşinii, adică a gradului de utilizare a energiei totale pe care o consumă maşina, pentru efectuarea lucrului mecanic util.

b) A doua problemă este determinarea mişcării reale a maşinii sub acţiunea forţelor aplicate (cele motoare şi rezistente). Rezolvarea acestei probleme permite apoi determinarea reacţiunilor în articulaţii.

Soluţia teoretică exactă a problemei nu este însă posibilă decît în cazul sistemelor mecanice (agregatelor) cu moment de inerţie constant. In tehnică, soluţia teoretică nu poate fi obţinută decît prin metoda aproximaţiilor succesive.

Metodele experimentale permit verificarea calculelor teoretice de mai sus.

c) A treia problemă este aceea a reglării mişcării maşinii, astfel încît viteza unghiulară a elementului iniţial (manivela) să nu varieze în afara unor limite maxime şi minime prescrise de procesul tehnologic sau de condiţiile de funcţionare ale maşinii.

Problema este de altfel strîns legată de cea precedentă, deoarece în ambele intră în joc relaţiile dintre forţele, masele şi momentele de inerţie ale elementelor maşinii. Determinarea masei volantului şi proiectarea regulatoarelor constituie scopul final al soluţiilor acestei probleme.

d) In sfîrşit, ultima problemă a dinamicii maşinii are de scop găsirea metodelor de eliminare a efectelor dăunătoare ale forţelor de inerţie în cuplele cinematice fixe ale maşinii sau mecanismului, ca urmare a mişcării variate a elementelor. Eliminarea acestor efecte dăunătoare, care se manifestă prin producerea de reacţiuni suplimentare în cuplele cinematice fixe, se face printr-o judicioasă repartizare a maselor maşinii. Această repartizare se numeşte echilibrarea maşinilor şi a mecanismelor.

In toate aceste probleme se foloseşte, în primul rînd, cea de a şaptea ecuaţie generală a dinamicii: ecuaţia energiei.

De aceea studiul dinamicii maşinilor şi a mecanismelor începe totdeauna cu studiul energiei cinetice şi al diferitelor faze ale mişcării maşinii.

§ 2. ENERGIA CINETICĂ A MAŞINII

1. *In timpul mişcării maşinii,* forţele exterioare — cum sînt: forţa motoare, forţa rezistenţei tehnologice (productive), forţele de greutate ale elementelor, forţele de frecare — produc sau consumă lucrul mecanic. In cazul cînd suma tuturor acestor lucruri mecanice pînă la un anumit moment este pozitivă, viteza unghiulară a elementului conducător (motor) creşte şi deci energia cinetică a maşinii sau a mecanismului creşte.

Energia cinetică nu este deci altceva decît lucrul mecanic produs de forţele de inerţie ale elementelor maşinii sau mecanismului. Ea este egală cu lucrul mecanic al forţelor exterioare în acelaşi interval de timp.

Dacă se notează cu:

W_M — lucrul mecanic al forţelor motoare într-un interval de timp dat $t-t_0$;

W_T — lucrul mecanic al tuturor forţelor rezistente în acelaşi interval de timp $t-t_0$;

E — energia cinetică a maşinii la timpul t;

E_0 — energia cinetică iniţială a maşinii corespunzătoare timpului t_0,

atunci ecuaţia energiei cinetice a maşinii se scrie:

$$W_M - W_T = E - E_0. \tag{II.1}$$

In mişcarea plană, caracteristică celor mai multe maşini de forţă, expresia energiei cinetice a unui element oarecare j al unei maşini se poate scrie sub forma

$$E_i = \frac{1}{2} I_{\varrho_j} \omega_j^2, \tag{II.2}$$

în care:

I_{ϱ_j} este momentul de inerţie al elementului j în raport cu o axă perpendiculară pe planul mişcării şi care trece prin centrul instantaneu de rotaţie al mişcării în momentul considerat;

ω_j — viteza instantanee de rotaţie a elementului j.

Dacă, pe de altă parte, se notează cu:

I_{G_j} — momentul de inerţie al aceluiaşi element în raport cu o axă care trece prin centrul de greutate G_j,

ϱ_j — raza vectoare a centrului de greutate;

m_j — masa elementului j,

atunci, — după cum se ştie de la cursul de mecanică teoretică — se poate scrie:

$$I_{\varrho_j} = I_{G_j} + m_j \varrho_j^2. \tag{II.3}$$

Introducînd această expresie în (II.2) şi ţinînd seamă că $\varrho_j \omega_j = v_{G_j}$ este viteza centrului de greutate al elementului j, se obţine

$$E_j = \frac{1}{2} I_{G_j} \omega_j^2 + \frac{1}{2} m_j v_{G_j}^2. \tag{II.4}$$

Energia cinetică a întregii maşini se poate scrie în acest caz sub forma

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} I_{G_j} \omega_j^2 + \frac{1}{2} m_j v_{G_j}^2 \right). \tag{II.5}$$

Energia cinetică la starea iniţială va avea deci expresia

$$E_0 = \sum_{j=1}^{n} E_{j_0} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} I_{G_j} \omega_{j_0}^2 + \frac{1}{2} m_j v_{G_{j_0}}^2 \right). \tag{II.6}$$

2. *Din analiza formulelor (II.5) şi (II.6)* se vede că energia cinetică a unei maşini depinde de masele şi de momentele de inerţie ale elementelor maşinii, cum şi de pătratul vitezelor centrelor de greutate şi unghiulare ale acestora.

Dacă în timpul mişcării maşinii acţiunea forţelor motoare şi rezistente ar înceta, energia cinetică a acestuia rămîne teoretic constantă, ceea ce rezultă din formula (II.1), deoarece: $W_M = W_r = 0$.

Cum însă în timpul mişcării maşinii elementele nu au vitezele constante, rezultă că energiile lor cinetice variază. Pentru ca energia cinetică a întregului sistem (maşina sau agregatul) să rămînă constantă, trebuie ca creşterea energiilor cinetice ale unor elemente să se facă pe seama energiilor cinetice ale altor elemente ale maşinii.

Astfel se explică, de exemplu, posibilitatea trecerii prin punctele moarte ale unei maşini cu abur cu piston.

Energia cinetică a manivelei, bielei şi volantului scoate pistonul cu tija şi capul de cruce din punctul mort, unde energia lor cinetică este egală cu zero.

De aici apare în mod foarte clar că nu este posibilă realizarea unei viteze unghiulare a manivelei riguros constantă.

Cu cît în construcţia maşinii vor exista mase mai mari care se rotesc în jurul unui ax fix, cu atît se va putea realiza o mişcare mai uniformă a acestui ax, deoarece variaţiile vitezelor celorlalte elemente ale maşinii vor produce variaţii insensibile ale energiei cinetice totale, în care energia cinetică a maselor care se rotesc în jurul axului fix formează partea cea mai mare. Astfel se explică prezenţa volantului la maşinile cu piston.

3. *In timpul cînd asupra elementelor maşinii acţionează şi forţele exterioare,* variabilitatea mişcării elementului iniţial (manivela) este şi mai accentuată, din cauza variaţiei energiei cinetice totale a maşinii.

Această variaţie depinde de valorile lui W_m şi W_r în diferitele faze ale mişcării maşinii, în timpul ciclului cinematic al elementului iniţial.

Aici este cazul să se precizeze că perioada de variaţie a momentului motor M_M, deci şi a lucrului mecanic W_M produs de acesta, nu coincide totdeauna cu ciclul cinematic al maşinii sau mecanismului.

Este suficient pentru aceasta să se ia ca exemplu un motor cu explozie (fig. II.1). Se ştie că la un astfel de motor fenomenele termice din interiorul cilindrului se repetă la două rotaţii ale manivelei.

Ciclul termic sau energetic — cum va fi numit mai departe — este de două ori mai mare decît ciclul cinematic al fiecărui element al maşinii.

La maşinile cu abur ciclul energetic coincide cu ciclul cinematic.

In concluzie, atunci cînd se studiază mişcarea maşinii sub acţiunea forţelor exterioare date, se va referi la ciclul energetic, care indică perioada de variaţie a momentului motor şi, deci, a lucrului mecanic motor.

§ 3. REDUCEREA MASELOR ŞI A FORŢELOR

3.1. Reducerea maselor

Dacă se analizează mai departe ecuaţia energiei cinetice a maşinii scrisă sub forma (II.5), se constată că din punctul de vedere al calculului matematic este foarte greu de lucrat cu maşina sau mecanismul în ansamblu, deoarece atît masele cît şi forţele sînt repartizate foarte variat în timpul mişcării.

Expresia energiei cinetice sub forma (II.5) trebuie, în consecinţă, simplificată.

Din punct de vedere fizic ne putem uşor imagina la un moment dat un solid care să aibă aceeaşi energie cinetică, deci aceeaşi stare de mişcare, ca şi maşina în ansamblul ei. Acest solid ni-l putem imagina sub forma unei mase în rotaţie în jurul unei axe fixe, care să aibă deci aceeaşi viteză unghiulară ca şi elementul iniţial (manivela) al maşinii şi o masă sau un moment de inerţie în raport cu axa de rotaţie a manivelei, astfel determinate, încît energiile cinetice ale celor două sisteme (maşina şi masa în mişcare de rotaţie) să fie în orice moment egale.

Această operaţie, curentă în dinamica maşinilor şi a mecanismelor, se numeşte reducerea maselor maşinii la un element de reducere (manivela) sau la un punct de reducere (butonul de manivelă).

Problema care se pune deci este găsirea momentului de inerţie redus al masei în mişcare de rotaţie, care reprezintă astfel reducerea tuturor maselor elementelor maşinii sau ale mecanismului la axul elementului de reducere.

Analog, se poate găsi masa redusă a tuturor elementelor maşinii sau ale mecanismului într-un punct (butonul de manivelă) numit punct de reducere.

Se va lua pentru aceasta ecuaţia energiei cinetice scrisă sub forma de mai jos, obţinută prin combinarea ecuaţiilor (II.1), (II.5) şi (II.6):

$$W_M - W_r = \sum_{j=1}^{n} E_j - \sum_{j=1}^{n} E_{j_0} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} I_{G_j} \omega_j^2 + \frac{1}{2} m_j v_{G_j}^2 \right) - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} I_{G_j} \omega_{j_0}^2 + \frac{1}{2} m_j v_{G_{j_0}}^2 \right).$$

Se va lua acum fiecare sumă din membrul al doilea, care reprezintă energia cinetică a maşinii la cele două stări, şi se va transforma astfel, încît să fie echivalentă cu energia cinetică a unui solid a cărui viteză unghiulară este egală cu a elementului iniţial (manivela *1*).

Fie I_{red} — momentul de inerţie redus la elementul *1*, atunci, conform celor expuse, se obţine:

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_j = \frac{1}{2} I_{red} \omega_1^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} I_{G_j} \omega_j^2 + \frac{1}{2} m_j v_{G_j}^2 \right). \qquad \text{(II.7)}$$

Din (II.7) rezultă:

$$I_{red} = \sum_{j=1}^{n} \left[I_{G_j} \left(\frac{\omega_j}{\omega_1} \right)^2 + m_j \left(\frac{v_{G_j}}{\omega_1} \right)^2 \right]. \qquad \text{(II.8)}$$

Formula (II.8) dă valoarea momentului de inerţie redus al maşinii raportat (redus) la elementul de reducere *1*.

Expresia (II.7), în care I_{red} este dat de (II.8), arată astfel că studiul mişcării maşinii se poate înlocui cu studiul mişcării unui element (solid) în mişcare de rotaţie în jurul unui ax fix.

Masele elementelor maşinii din fig. II.1, *a* pot fi astfel reduse la o masă în mişcare de rotaţie în jurul axei elementului *1* (fig. II.1, *b*) al cărui moment de inerţie I_{red} este dat de formula (II.8).

Energia cinetică a transportorului este în acest caz egală în orice moment cu aceea a elementului de reducere, ceea ce rezultă din formula (II.7).

Dacă reducerea maselor se imaginează raportată la un punct de reducere, adică de exemplu la butonul de manivelă A al mecanismului din fig. II.1, a, atunci expresia (II.7) se poate scrie:

$$E=\sum_{j=1}^{n} E_j=\frac{1}{2}m_{red}v_A^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_j v_{G_j}^2+\frac{1}{2}I_{G_j}\omega_j^2\right). \qquad (II.9)$$

Din (II.9) rezultă imediat:

$$m_{red}=\sum_{j=1}^{n}\left[I_{G_j}\left(\frac{\omega_j}{v_A}\right)^2+m_j\left(\frac{v_{G_j}}{v_A}\right)^2\right]. \qquad (II.10)$$

Formula (II.10) dă astfel valoarea masei reduse a mecanismului sau a maşinii raportată la punctul de reducere A.

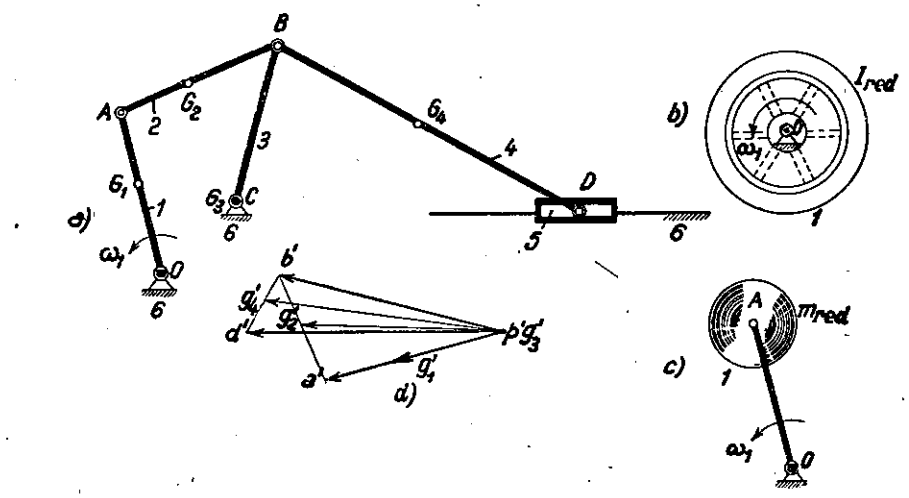


Fig. II.1. Mecanismul de transportor şi reprezentarea lui redusă la un I_{red} (fig. II.1, b) sau m_{red} (fig. II.1, c). In fig. II.1, d este reprezentat planul vitezelor corespunzător vitezei şi poziţiei din figură.

Studiul mişcării maşinii sau a mecanismului poate fi astfel înlocuit cu studiul mişcării unei mase concentrate într-un punct de reducere şi ale căror energii cinetice sînt în orice moment identice.

In cazul redat în fig. II.1, a, masele tuturor elementelor transportorului sînt echivalente cu masa redusă — m_{red} — în punctul A (fig. II.1, c).

Intre momentul de inerţie redus şi masa redusă ale unei maşini sau mecanism, dacă reducerea se face la acelaşi element, există relaţia

$$I_{red}=m_{red}\,\overline{OA}^2. \qquad (II.11)$$

Această relaţie rezultă imediat din egalarea expresiilor (II.7) şi (II.9), adică din:

$$E=\frac{1}{2}I_{red}\omega_1^2=\frac{1}{2}m_{red}v_A^2,$$

în care s-a înlocuit $v_A=\overline{OA}\omega_1$.

Atît momentul de inerţie redus cît şi masa redusă depind de mărimile maselor şi momentelor de inerţie ale elementelor maşinii, cum şi de pătratele rapoartelor dintre vitezele unghiulare şi vitezele tangenţiale ale elementelor şi viteza unghiulară, respectiv tangenţială, a elementului de reducere, care, în general, este fie element conducător, fie iniţial.

Cum vitezele tangenţiale ale diferitelor puncte ale maşinii sau ale mecanismului, ca şi vitezele unghiulare ale elementelor, sînt proporţionale cu viteza unghiulară a elementului de reducere, ceea ce reiese clar din planul vitezelor, rezultă că atît momentul de inerţie redus cît şi masa redusă depind numai de poziţia mecanismului sau a maşinii în timpul ciclului cinematic şi sînt independente de viteza unghiulară a elementului de reducere. In expresiile lui I_{red} şi m_{red} timpul t nu intervine decît prin intermediul poziţiei maşinii sau a mecanismului în interiorul ciclului cinematic.

Atît I_{red} cît şi m_{red} sînt astfel totdeauna pozitive şi sînt funcţii periodice de poziţia mecanismului sau a maşinii, valorile lor repetîndu-se după fiecare ciclu cinematic al elementului de reducere.

I_{red} şi m_{red} se pot exprima în funcţie de segmentele corespunzătoare ale lui v_{G_j} şi de rapoartele segmentelor corespunzătoare pentru ω_j din planul vitezelor construit la scara k_v.

Astfel, dacă se construieşte planul vitezelor transportorului (fig. II.1, d), atunci I_{red} şi m_{red} din fig. II.1, b, respectiv II.1, c, vor avea următoarele expresii:

$$I_{red}=I_{G_1}+m_1\left(\frac{v_{G_1}}{\omega_1}\right)^2+I_{G_2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+m_2\left(\frac{v_{G_2}}{\omega_1}\right)^2+I_{G_3}\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2+$$

$$+I_{G_4}\left(\frac{\omega_4}{\omega_1}\right)^2+m_4\left(\frac{v_{G_4}}{\omega_1}\right)^2+m_5\left(\frac{v_D}{\omega_1}\right)^2;$$

$$m_{red}=I_{G_1}\left(\frac{\omega_1}{v_A}\right)^2+m_1\left(\frac{v_{G_1}}{v_A}\right)^2+I_{G_2}\left(\frac{\omega_1}{v_A}\right)^2+m_2\left(\frac{v_{G_2}}{v_A}\right)^2+$$

$$+I_{G_3}\left(\frac{\omega_3}{v_A}\right)^2+I_{G_4}\left(\frac{\omega_4}{v_A}\right)^2+m_4\left(\frac{v_{G_4}}{v_A}\right)^2+m_5\left(\frac{v_D}{v_A}\right)^2.$$

Se ştie însă că

$$v_{G_1}=\overline{O_{G_1}}\omega_1 \quad \text{şi} \quad I_{G_1}+m_1 O_{G_1}^2=I_0,$$

în care I_0 este momentul de inerţie al elementului I în raport cu centrul de rotaţie O.

De asemenea, din planul vitezelor se deduce (fig. II.I, *d*):

$$\omega_1=\frac{k_v(\overline{p'a'})}{\overline{OA}};\quad \omega_2=\frac{k_v(\overline{a'b'})}{\overline{AB}};\quad \omega_3=\frac{k_v(\overline{p'b'})}{\overline{BC}};\quad \omega_4=\frac{k_v(\overline{b'd'})}{\overline{BD}};$$

$$v_A=k_v(\overline{p'a'});\quad v_{G_2}=k_v(\overline{p'g_2'});\quad v_{G_4}=k_v(\overline{p'g_4'});\quad v_D=k_v(\overline{p'd'}).$$

Inlocuind aceste valori în expresiile lui I_{red} şi m_{red}, se obţine:

$$I_{red}=I_0+I_{G_2}\frac{\overline{OA}^2}{\overline{AB}^2}\left(\frac{\overline{a'b'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+m_2\overline{OA}^2\left(\frac{\overline{p'g_2'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+I_{G_3}\frac{\overline{OA}^2}{\overline{BC}^2}\left(\frac{\overline{p'b'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+$$

$$+I_{G_4}\frac{\overline{OA}^2}{\overline{BD}^2}\left(\frac{\overline{b'd'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+m_4\overline{OA}^2\left(\frac{\overline{p'g_4'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+m_5\overline{OA}^2\left(\frac{\overline{p'd'}}{\overline{p'a'}}\right)^2.$$

$$m_{red}=\frac{I_{G_1}}{\overline{OA}^2}+m_1\left(\frac{\overline{p'g_1'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+\frac{I_{G_2}}{\overline{AB}^2}\left(\frac{\overline{a'b'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+m_2\left(\frac{\overline{p'g_2'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+$$

$$+\frac{I_{G_3}}{\overline{BC}^2}\left(\frac{\overline{p'b'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+\frac{I_{G_4}}{\overline{BD}^2}\left(\frac{\overline{b'd'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+m_4\left(\frac{\overline{p'g_4'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+m_5\left(\frac{\overline{p'd'}}{\overline{p'a'}}\right)^2.$$

Expresiile lui I_{red} şi m_{red} se pot scrie şi apoi calcula pentru orice poziţie a mecanismului sau a maşinii în timpul ciclului cinematic al elementului de reducere.

Din exemplul de mai sus se vede clar că I_{red} şi m_{red} nu depind de mărimea lui ω_1, deoarece scara k_v a planului vitezelor nu intră în expresiile lor analitice.

Ele depind însă de poziţia mecanismului sau a maşinii, deoarece pentru fiecare poziţie din timpul ciclului cinematic planul vitezelor capătă altă formă.

3.1.1 Calculul analitic al lui ΔI_{red} la un mecanism bieă-manivelă[1])

In cazul unui motor (fig. (II.2), ΔI_{red} se poate exprima şi analitic, pornind tot de la expresia energiei cinetice. Pentru aceasta se va proceda la repartizarea masei m_2 a bielei în A şi B, astfel încît momentul de inerţie al acestora în raport cu centrul de greutate G_2 să fie egal cu I_{G_2} al bielei în raport cu acelaşi punct.

Expresia energiei cinetice a motorului devine astfel:

$$E=\frac{1}{2}I_{G_1}\omega_1^2+\frac{1}{2}m_2\left(1-\frac{s_2}{l}\right)v_A^2+\frac{1}{2}\left(m\frac{s_2}{l}+m_3\right)v_B^2+\frac{1}{2}\left(r_A^2m_A+r_B^2m_B\right)\omega_2^2, \quad \text{(II.12)}$$

[1]) Se convine a se nota ΔI_{red} — momentul de inerţie redus al motorului fără volant.

în care:

I_{G_1} este momentul de inerţie al manivelei în raport cu centrul de greutate G_1 al acesteia;

$v_A=r\omega_1$ — viteza tangenţială a butonului de manivelă A;

v_B — viteza capului de cruce (pistonului) B;

$m_A=m_2\left(1-\frac{s_2}{l}\right)$ — o parte din masa m_3 a bielei concentrată în A, unde $l=AB$;

$m_B=m_2\frac{s_2}{l}$ — idem în B;

r_A; r_B — razele de giraţie ale momentelor de inerţie ale maselor m_A şi m_B;

m_3 — masa capului de cruce, a pistonului şi bulonului de articulaţie.

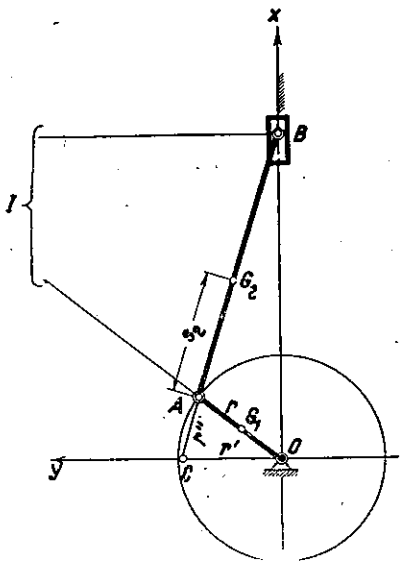


Fig. II.2. Schema mecanismului unui motor Diesel vertical cu un cilindru.

Aceste raze de giraţie rezultă din condiţia ce se impune maselor m_A şi m_B de a avea acelaşi moment de inerţie ca şi biela pe care au înlocuit-o, adică

$$I_{G_2}=\left(r_A^2+s_2^2\right)m_A+\left[r_B^2+(l-s_2)^2\right]m_B, \quad \text{(II.13)}$$

de unde

$$r_A^2m_A+r_B^2m_B=I_{G_2}-s_2^2m_A-(l-s_2)^2m_B.$$

Dacă în membrul al doilea al expresiei de mai sus se înlocuiesc valorile lui m_A şi m_B în funcţie de m_2, se obţine:

$$r_A^2m_A+r_B^2m_B=I_{G_2}-s_2(l-s_2)m_2 \quad \text{(II.14)}$$

şi expresia (II.12) devine

$$E=\frac{\omega_1^2}{1}\left[I_{G_1}+r^2\left(1-\frac{s_2}{l}\right)m_2\right]+\frac{v_B^2}{2}\left[m_2\frac{s_2}{l}+m_3\right]+\frac{\omega_2^2}{2}\left[I_{G_2}-s_2(l-s_2)m_2\right].$$

Dacă se notează pentru prescurtare:

$$\left.\begin{aligned} I_0&=I_{G_1}+r^2\left(1-\frac{s_2}{l}\right)m_2;\\ I_1'&=\left(m_3+m_2\frac{s_2}{l}\right)r^2;\\ I_1''&=\left[I_{G_2}-s_2(l-s_2)m_2\right]\lambda^2,\quad \text{unde}\quad \lambda=\frac{r}{l},\end{aligned}\right\} \quad \text{(II.15)}$$

atunci expresia energiei cinetice a motorului devine:

$$E=\frac{\omega_1^2}{2}\left[I_0+I_1'\left(\frac{v_B}{r\omega_1}\right)^2+I_1''\left(\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}\right)^2\right] \tag{II.16}$$

sau

$$E=\frac{\omega_1^2}{2}\Delta I_{red},$$

în care:

$$\Delta I_{red}=I_0'+I_1'\left(\frac{v_B}{r\omega_1}\right)^2+I_1''\left(\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}\right)^2; \tag{II.17}$$

v_B, v_A şi ω_2 se pot calcula grafic din poligonul vitezelor.

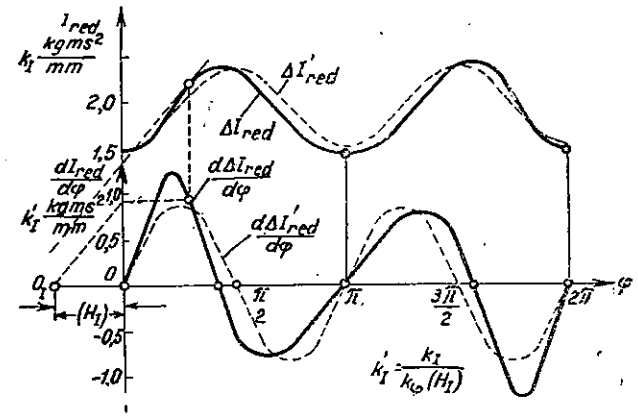


Fig. II.3. Variaţia grafică a momentului de inerţie redus ΔI_{red} (fig. II.3, *a*) şi a lui $\frac{d}{d\varphi}(\Delta I_{red})$, (fig. II.3, *b*) a motorului reprezentat schematic în fig. II.2, cu ajutorul formulelor (II.17) şi (II.26) şi a lui $\Delta I'_{red}$ şi $\frac{d}{d\varphi}(\Delta I'_{red})$, cu ajutorul formulei (II.18) (punctat).

Variaţia grafică a formulei (II.17) în funcţie de unghiul φ este trasată cu linie continuă în fig. II.3.

Se vede că această curbă este simetrică faţă de ordonata $\varphi=\pi$ numai la motoarele la care direcţia de deplasare a pistonului trece prin centrul de rotaţie O al manivelei.

Calculul fiecărei poziţii se face uşor dacă se observă din fig. II.2 că:

$$\frac{v_B}{v_A}=\frac{r'}{r}$$

şi

$$\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}=\frac{l\omega^2}{r\omega_1}=\frac{r''}{r},$$

astfel că

$$\Delta I_{red}=I_0+I_1'\left(\frac{r'}{r}\right)^2+I_1''\left(\frac{r''}{r}\right)^2. \tag{II.17'}$$

La motoarele la care raportul $\lambda=\frac{r}{l}$ este mic se foloseşte o formulă aproximativă a lui ΔI_{red}, în care se neglijează valoarea lui I_1'', iar valoarea lui v_B se ia

$$v_B=r\omega_1\sin\varphi,$$

de unde rezultă

$$\Delta I'_{red}=I_0+\frac{1}{2}I_1'(1-\cos 2\varphi). \tag{II.18}$$

Reprezentarea grafică a acestui moment de inerţie aproximativ este redată cu linii întrerupte în fig. II.3.

Formula (II.17) a momentului de inerţie redus se poate exprima şi prin dezvoltarea în serie Fourier a rapoartelor $\left(\frac{v_B}{r\omega_1}\right)^2$ şi $\left(\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}\right)^2$.

In adevăr se ştie că

$$\frac{v_B}{r\omega_1}=\sin\varphi+B_2\sin 2\varphi-B_4\sin 4\varphi+B_6\sin 6\varphi-+\ldots, \tag{II.19}$$

în care:

$$\left.\begin{aligned} B_j&=\frac{1}{j}A_j \text{ şi}\\ A_2&=\lambda+\frac{\lambda^3}{4}+\frac{15}{128}\lambda^5+\ldots\\ A_4&=\frac{1}{4}\lambda^3+\frac{3}{16}\lambda^5+\ldots\\ A_6&=\frac{9}{128}\lambda^5+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{II.20}$$

De asemenea,

$$\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}=D_1\cos\varphi-D_3\cos 3\varphi+D_5\cos 5\varphi-D_7\cos 7\varphi+-\ldots \tag{II.21}$$

în care:

$$\left.\begin{aligned} D_j&=\frac{1}{j}C_j \text{ şi}\\ C_1&=1+\frac{1}{8}\lambda^2+\frac{3}{64}\lambda^4+\ldots\\ C_3&=\frac{3}{8}\lambda^2+\frac{27}{128}\lambda^4+\ldots\\ C_5&=\frac{15}{128}\lambda^4+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{II.22}$$

Pentru calculele practice, valorile coeficienţilor A_j, B_j, C_j, D_j sînt date în tabela II.1, pentru diferite valori ale lui λ.

Pentru obţinerea pătratelor expresiilor de mai sus se utilizează indentităţile:

$$2\sin j\varphi\cdot\sin k\varphi=\cos(j-k)\varphi-\cos(j+k)\varphi;$$
$$2\cos j\varphi\cdot\cos k\varphi=\cos(j-k)\varphi+\cos(j+k)\varphi;$$

astfel, se obţine:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{v_B}{r\omega_1}\right)^2&=B_0'+B_1'\cos\varphi-B_2'\cos 2\varphi-B_3'\cos 3\varphi-B_4'\cos 4\varphi+\\ &\quad+B_5'\cos 5\varphi+B_6'\cos 6\varphi-\,-+\,+\ldots,\\ \left(\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}\right)^2&=D_0'+D_2'\cos 2\varphi-D_4'\cos 4\varphi+D_6'\cos 6\varphi-+\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{II.23}$$

în care coeficienții sînt dați de relațiile de mai jos:

$$
\left.
\begin{aligned}
&B'_0=\frac{1}{2}(1+B_2^2+B_4^2+B_6^2+\dots) && B'_1=B_2\\
&B'_2=\frac{1}{2}+B_2B_4+B_4B_6+B_6B_8+\dots && B'_3=B_2+B_4\\
&B'_4=\frac{1}{2}B_2^2-B_2B_6-B_4B_8-B_6B_{10}-\dots && B'_5=B_4+B_6\\
&B'_6=B_2B_4-B_2B_8-B_4B_{10}-B_6B_{12}-\dots && B'_7=B_6+B_8\\
&B'_8=\frac{1}{2}B_4^2+B_2B_6-B_2B_{10}-B_4B_{12}-\dots && B'_9=B_8+B_{10}\\
&B'_{10}=B_2B_8+B_4B_6-B_2B_{12}-B_4B_{14}-\dots && B'_{11}=B_{10}+B_{12}\\
&\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots && \vdots\quad\vdots\quad\vdots
\end{aligned}
\right\}
\qquad (II.24)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&D'_0=\frac{1}{2}(D_1^2-D_3^2+D_5^2+D_7^2+\dots);\\
&D'_2=\frac{1}{2}D_1^2-D_1D_3-D_3D_5-D_5D_7-\dots\\
&D'_4=D_1D_3-D_1D_5-D_3D_7-D_5D_9-\dots;\\
&D'_6=\frac{1}{2}D_3^2+D_1D_5-D_1D_7-D_3D_9-\dots\\
&D'_8=D_1D_7+D_3D_5-D_1D_9-D_3D_{11};\\
&D'_{10}=\frac{1}{2}D_5^2+D_1D_9+D_3D_7-D_1D_{11}-\dots
\end{aligned}
\right\}
$$

Cu ajutorul expresiilor (II.24) și al valorilor din tabela II.1 se pot calcula coeficienții B'_j și D'_j.

Cu o aproximație destul de bună se poate lua:

$$
\left.
\begin{aligned}
&B'=\frac{1}{2}(1+B_2^2);\quad B'_1=B'_2;\quad B'_2=\frac{1}{2};\quad B'_3=B_2+B_4;\quad B'_4=\\
&\qquad=\frac{1}{2}B_2^2;\quad B'_5=B_4;\\
&D'_0=\frac{1}{2}D_1^2;\quad D'_2=\frac{1}{2}D_1^2-D_1D_3;\quad D'_4=D_1D_3.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (II.25)
$$

Cu ajutorul formulelor (II.23), introduse în formula (II.17), se poate determina momentul de inerție redus ΔI_{red} al motorului.

Tabela II.1. Valorile coeficienților A_j, B_j, C_j, D_j pentru diferite valori ale lui λ

Coeficient	Valoarea raportului $\lambda=\frac{r}{l}$							
	1/2,5	1/3	1/3,5	1/4	1/4,5	1/5	1/5,5	1/6
A_2	0,4173	0,3431	0,2918	0,2540	0,2250	0,2020	0,1833	0,1678
A_4	0,0182	0,0101	0,0062	0,0041	0,0028	0,0021	0,0015	0,0012
A_6	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000	—	—	—	—
$B_2=\frac{1}{2}A_2$	0,2087	0,1715	0,1459	0,1270	0,1125	0,1010	0,0917	0,0839
$B_4=\frac{1}{4}A_4$	0,0045	0,0025	0,0016	0,0010	0,0007	0,0005	0,0004	0,0003
$B_6=\frac{1}{6}A_6$	0,0001	0,0001	0,0000	—	—	—	—	—
C_1	1,021	1,014	1,010	1,008	1,006	1,005	1,004	1,003
C_2	0,066	0,044	0,032	0,024	0,019	0,015	0,013	0,011
C_3	0,004	0,002	0,001	0,001	0,000	—	—	—
$D_1=C_1$	1,021	1,014	1,010	1,008	1,006	1,005	1,004	1,003
$D_3=\frac{1}{3}C_3$	0,022	0,015	0,011	0,008	0,006	0,005	0,004	0,004
$D_5=\frac{1}{3}C_5$	0,001	0,000	—	—	—	—	—	—

Formula (II.23) este importantă și pentru faptul că permite găsirea expresiei

$$\frac{d}{d\varphi}(\Delta I_{red}),$$

pentru orice valoare a lui φ.

In fig. II.3 sînt construite prin derivare grafică curbele $\frac{d}{d\varphi}(\Delta I_{red})$, (cu linie continuă) și $\frac{d}{d\varphi}(\Delta I'_{red})$, (cu linie întreruptă).

Verificarea construcției se poate face prin citirea segmentului pentru o anumită valoare a lui φ la scara $k'_I=\frac{k_I}{k_\varphi(H_I)}$ și compararea valorii obținute cu cele care rezultă din derivarea formulelor (II.17), respectiv (II.18). Se vede că $\frac{d}{d\varphi}(\Delta I'_{red})=I'_1\sin 2\varphi$ este o sinusoidă, în timp ce

$$\frac{d}{d\varphi}(\Delta I_{red})=I'_I\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v_B}{r\omega_1}\right)^2+I'_1\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}\right)^2, \qquad (II.26)$$

în care:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{v_B}{r\omega_1}\right)^2 &= -B_1'\sin\varphi+2B_2'\sin 2\varphi+3B_3'\sin 3\varphi-4B_4'\sin 4\varphi-\\ &\quad -5B_5'\sin 5\varphi-6B_6'\sin 6\varphi+\,+\,-\,-\,-\\ \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}\right)^2 &= -2D_2'\sin 2\varphi+4D_4'\sin 4\varphi-6B_6'\sin 6\varphi+\ \ldots\end{aligned}\right\} \quad (II.27)$$

este o funcție periodică.

Observație. Examinînd formulele (II.27) și (II.28), se vede că momentul de inerție redus al motorului este compus din două părți: una I_0, constantă în timpul ciclului cinematic, și a doua

$$I_{mv}=I_1'\left(\frac{v_B}{r\omega_1}\right)^2+I_1''\left(\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}\right)^2 \quad (II.28)$$

variabilă.

In concluzie,

$$\Delta I_{red}=I_0+I_{mv}. \quad (II.29)$$

S-a adoptat notația I_{red}, deoarece această valoare este mică în raport cu momentul de inerție I_v al volantului motorului.

Dacă, deci, se ia în considerație și acesta din urmă, momentul de inerție redus la motorului este

$$I_{red}=I_v+I_0+I_{mv}=I_v+I_{red}. \quad (II.30)$$

Asupra acestei expresii se va reveni la cap. III.

3.1.2 Aplicații

1. Folosind formulele (II.15), (II.17), (II.18), (II.23) și (II.25), să se calculeze momentul de inerție redus al mecanismului bielă-manivelă cu următoarele dimensiuni:

$$r=100\text{ mm};\quad l=500\text{ mm};\quad s_1=0;\quad s_2=180\text{ mm};$$

$$I_{G_1}=0{,}5\text{ kgms}^2;\quad I_{G_2}=0{,}2\text{ kgms}^2;\quad G_2=40\text{ kg};\quad G_3=100\text{ kg};$$

$$\lambda=\frac{1}{5};\quad \varphi=45°.$$

Cu ajutorul formulelor (II.15) se calculează:

$$I_0=I_{G_1}+r^2\left(1-\frac{s_2}{l}\right)\frac{G_2}{g}=0{,}5+0{,}1^2(1-0{,}36)\frac{40}{9{,}81}=0{,}5261\text{ kgms}^2;$$

$$I_1'=\left(G_3+G_2\frac{s_2}{l}\right)\frac{r^2}{g}=(100+40\times 0{,}36)\frac{0{,}1^2}{9{,}81}=0{,}116\,65\text{ kgms}^2;$$

$$I_1''=\left[I_{G_2}-s_2(l-s_2)\frac{G_2}{g}\right]\lambda^2=\left[0{,}2-0{,}18\times 0{,}32\times\frac{40}{9{,}81}\right]\frac{1}{5^2}=-0{,}00169\text{ kgms}^2.$$

Cu ajutorul formulelor (II.23) și (II.25) și al tabelei II.1 se calculează:

$$\left(\frac{v_B}{r\omega_1}\right)^2=\frac{1}{2}(1+B_2^2)+B_2\cos\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi-(B_2+B_4)\cos 3\varphi-\frac{1}{2}B_2^2\cos 4\varphi+B_4\cos 5\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}(1+0{,}1^2)+0{,}101\,\frac{1{,}41}{2}+(0{,}101+0{,}0005)\frac{1{,}41}{2}+\frac{1}{2}0{,}1^2-0{,}0005\,\frac{1{,}41}{2}=0{,}6517;$$

$$\left(\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}\right)^2=\frac{1}{2}D_1^2+\left(\frac{1}{2}D_1^2-D_1D_3\right)\cos 2\varphi-D_1D_3\cos 4\varphi=\frac{1}{2}1{,}005^2+1{,}005\times 0{,}005=0{,}5050.$$

Cu aceste date expresia (II.12) devine:

$$\Delta I_{red}=I_0+I_1'\left(\frac{v_B}{r\omega_1}\right)^2+I_2''\left(\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}\right)^2=0{,}5261+0{,}11655\times 0{,}6517-0{,}00169\times 0{,}505;$$

$$\Delta I_{red}=0{,}601202\text{ kgms}^2.$$

Dacă se aplică formula aproximativă (II 18), rezultă:

$$\Delta I_{red}'=I_0+\frac{1}{2}I_1'(1-\cos 2\varphi)=0{,}5261+\frac{0{,}11655}{2}=0{,}5844\text{ kgms}^2.$$

Eroarea rezultată este:

$$\frac{\Delta I_{red}-\Delta I_{red}'}{\Delta I_{red}}\times 100=2{,}79\%.$$

La aplicația de la § 3.3 se va vedea diferența dintre metoda analitică și cea cu ajutorul planului vitezelor.

2. Să se calculeze ΔI_{red} pentru $\varphi=0$ la motorul cu următoarele dimensiuni:

$$r=47\text{ mm};\quad l=195\text{ mm};\quad s_1=0;\quad s_2=51\text{ mm};$$

$I_{G_1}=0$ (acest moment de inerție se consideră ca făcînd parte din momentul de inerție I_v);

$$I_{G_2}=0{,}0003\text{ kgms}^2;\quad G_2=0{,}371\text{ kg};\quad G_3=0{,}768\text{ kg};$$

$$\lambda=\frac{1}{4{,}15};\quad \varphi=0.$$

Se calculează:

$$I_0=I_0+r^2\left(1-\frac{s_2}{l}\right)\frac{G_2}{g}=0{,}047^2\left(1-\frac{1}{195}\right)0{,}0378=0{,}0000\,616\text{ kgms}^2;$$

$$I_1'=\left(G_3+G_2\frac{s_2}{l}\right)\frac{r^2}{g}=0{,}047^2\left(0{,}078+0{,}0378\,\frac{51}{193}\right)=0000194\text{ kgms}^2;$$

$$I_1''=\left[I_{G_2}-s_2(l-s_2)\frac{G_2}{g}\right]\lambda^2=[0{,}0003-0{,}051\times 0{,}144\times 0{,}0378]\,\frac{1}{4{,}15^2}=0{,}0000013\text{ kgms}^2.$$

Cu ajutorul formulelor (II.23) și (II.25) și al tabelei II.1 se calculează, pentru $\varphi = 0$:

$$\left(\frac{v_B}{r\omega_1}\right)^2 = 0;$$

$$\left(\frac{\omega_2}{r\omega_1}\right)^2 = D_1^2 - 2D_1D_3 = 1{,}005^2 - 2 \times 1{,}005 \times 0{,}005 = 0{,}9999.$$

Cu aceste date expresia (II.17) devine:

$$\Delta I_{red} = I_0 + I_1' \left(\frac{v_B}{r\omega_1}\right)^2 + I_1'' \left(\frac{\omega_2}{\lambda\omega_1}\right)^2 = 0{,}0000616 + 0{,}0000013 \times 0{,}9999;$$

$$\Delta I_{red} = 0{,}0000629 \text{ kgms}^2.$$

Dacă se utilizează formula aproximativă (II.18), expresia este

$$\Delta I'_{red} = I_0 = 0{,}0000616 \text{ kgms}^2.$$

La aplicația de la § 18.3 se vede că ΔI_{red}, calculat cu ajutorul planului vitezelor, este 0,00006317 kgms², deci cu o eroare de

$$\frac{6\,317 - 6\,290}{6\,317} \times 100 = 0{,}43\%.$$

3.2. Reducerea forțelor exterioare

Reducerea forțelor exterioare care acționează asupra mecanismului sau mașinii la un punct de reducere sau la un element de reducere se face după o metodă asemănătoare celei utilizate la § 13.2, din partea I, cînd s-a studiat pîrghia lui N. E. Jukovski.

S-a arătat acolo că toate forțele și momentele forțelor exterioare care acționează asupra unui mecanism sau mașină satisfac relația puterilor instantanee:

$$\sum_{j=1}^{n} F_j v_j \cos\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} M_j \omega_j = 0, \qquad \text{(II.31)}$$

în care:

F_j, M_j sînt forțele exterioare și momentele exterioare care acționează asupra mecanismului sau mașinii;

v_j este viteza punctului de aplicație al forței F_j;

ω_j — viteza unghiulară a elementului asupra căruia acționează momentul exterior M_j;

α_j — unghiul dintre vectorii $\overline{v}_j$ și $\overline{F}_j$.

De fapt, expresia (II.31) nu reprezintă altceva decît echilibrul dinamic al mașinii sau al mecanismului scris sub altă formă.

Dacă în expresia de mai sus se explicitează forța tangențială de echilibrare F_e la butonul de manive'ă A și se împarte cu v_A, se obține:

$$F_e + \sum_{j=2}^{n} F_j \frac{v_j}{v_A} \cos\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} M_j \frac{\omega_j}{v_A} = 0.$$

Cele două sume $(\sum)$ din membrul întîi nu sînt altceva decît valoarea forțelor exterioare reduse la butonul de manivelă, care, evident, este egală și de sens contrar cu forța de echilibrare, adică (fig. II.4, *a*):

$$F_{red} = -F_e = \sum_{j=2}^{n} F_j \frac{v_j}{v_A} \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} M_j \frac{\omega_j}{v_A}. \qquad \text{(II.32)}$$

Formula (II.32) se poate deduce și direct, după următorul raționament.

Lucrul mecanic al forțelor exterioare efectuat într-o secundă (adică puterea dezvoltată) este evident:

$$P = \sum_{j=2}^{n} F_j v_j \cos\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} M_j \omega_j. \qquad \text{(a)}$$

Din prima sumă a membrului al doilea lipsește puterea forței de echilibrare ($F_1 v_A \cos\alpha_1 = F_x v_A$).

Dacă se înlocuiește mecanismul sau mașina printr-o masă redusă în punctul A — butonul de manivelă — atunci puterea dezvoltată P (aceeași ca mai sus) se poate scrie

$$P = F_{red} v_A. \qquad \text{(b)}$$

Egalînd pe (a) cu (b) și împărțind cu v_A, se obține formula (II.32).

Dacă se înlocuiește acum mecanismul sau mașina printr-o masă redusă la elementul I, a cărui viteză unghiulară este ω_1, puterea dezvoltată va avea expresia

$$P = M_{red} \omega_1. \qquad \text{(c)}$$

Puterea mașinii este dată în acest caz de expresia

$$P = \sum_{j=1}^{n} F_j v_j \cos\alpha_j + \sum_{j=2}^{n} M_j \omega_j, \qquad \text{(d)}$$

deoarece din a doua sumă a membrului al doilea lipsește puterea momentului de echilibrare ($M_1\omega_1 = M_e\omega_1$).

Egalînd pe (c) cu (d) și făcînd calculele, se obține

$$M_{red} = \sum_{j=1}^{n} F_j \frac{v_j}{\omega_1} \cos\alpha_j + \sum_{j=2}^{n} M_j \frac{\omega_j}{\omega_1}. \qquad \text{(II.33)}$$

Evident că și în acest caz

$$M_{red} = -M_e.$$

Formulele (II.32) și (II.33) determină forța redusă sau momentul redus la punctul, respectiv, elementul de reducere al mașinii sau mecanismului.

Analizînd aceste formule se vede că — la fel ca și la momentele și masele reduse — valorile lui M_{red} și F_{red} depind de poziția mașinii sau a mecanismului în timpul ciclului cinematic, deoarece formulele conțin rapoarte de forma $\frac{v_j}{\omega_1}$; $\frac{\omega_j}{\omega_1}$; $\frac{\omega_j}{v_A}$ și $\frac{v_j}{v_A}$.

Deosebit de aceasta, M_{red} și F_{red} depind de valorile pe care le iau în timpul ciclului energetic forțele F_j și momentele M_j, care pot fi atît pozitive, cît și negative.

În consecință, spre deosebire de momentele de inerție reduse și masele reduse, momentele reduse și forțele reduse pot lua atît valori pozitive, cît și valori negative.

Ținînd seamă de expresiile forței și momentului redus, precum și de expresiile masei și momentului de inerție redus al mașinii sau mecanismului, ecuația energiei cinetice se poate scrie:

$$W = W_M - W_r = \frac{1}{2} I_{red}\omega_1^2 - \frac{1}{2} I_{red_0}\omega_{10}^2 \qquad \text{(II.34)}$$

sau

$$W = W_M - W_r = \frac{1}{2} m_{red}v_A^2 - \frac{1}{2} m_{red_0}v_{A_0}^2. \qquad \text{(II.35)}$$

În cazul expresiei (II.34), $W = W_M - W_r$ reprezintă, cu semn schimbat, lucrul mecanic al momentului redus al forțelor și momentelor exterioare la elementul de reducere (elementul inițial), iar în cazul expresiei (II.35), lucrul mecanic al forței reduse la butonul de manivelă A luat ca punct de reducere, fără al forțelor de inerție a cărui expresie se află în membrul al doilea.

Construirea poligoanelor vitezelor pe planul vitezelor permite calcularea lui I_{red} și m_{red} pentru orice poziție a mecanismului sau a mașinii în timpul ciclului cinematic. Cu ajutorul planului vitezelor, cu al curbelor de variație ale forței motoare, cu al legii de variație a rezistenței tehnologice (productive), al greutății elementelor și cu ajutorul forțelor de frecare, se poate proceda la calcularea lui M_{red} sau F_{red} în tot timpul ciclului energetic al mașinii.

Studiul mișcării mașinii se reduce astfel la studiul mișcării unei mase reduse (fig. II.4, *a*) variabilă cu poziția, sub acțiunea unei forțe de echilibrare și a unei forțe reduse variabile în timpul ciclului energetic, sau a unei mase (fig. II.4, *b*) de moment de inerție variabil sub acțiunea unui moment de echilibrare și a unui moment redus, variabil în timpul aceluiași ciclu energetic.

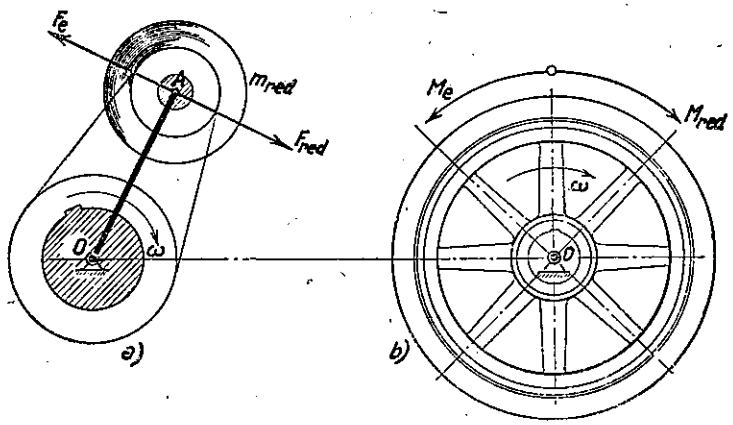


Fig. II.4. Reprezentarea simplificată a unui agregat sau mașină:
a — redus la o masă m_{red} și F_{red} cu F_e; *b* — redus la un moment de inerție I_{red} și M_{red} cu M_e.

Dacă elementul de reducere este element motor (cazul pompelor alternative, al compresoarelor cu piston), forța redusă și momentul redus au în general sensul opus mișcării (conform fig. II.4); dacă elementul de reducere este condus (cazul motoarelor cu explozie, al motoarelor Diesel, al mașinilor cu abur), atunci în general sensul lor este același cu al mișcării.

3.3. Aplicație

Să se calculeze momentul de inerție redus și forța redusă la elementul *1* (arborele cotit) al motorului din fig. II.5, *a* (motorul în V).

Se dau:

$\overline{OA} = l_1 = 0{,}070$ m, $\overline{AB} = l_2 = 0{,}280$ m; $\overline{AC} = 0{,}060$ m;

$\overline{CD} = l_4 = 0{,}220$ m; $G_2 = 5$ kg; $G_3 = 0{,}5$ kg; $G_4 = 2$ kg;

$G_5 = 0{,}5$ kg; $s_2 = AG_2 = 0{,}090$ m; $s_3 = s_5 = 0$; $s_4 = CG_4 = 0{,}110$ m;

$I_{G_2} = 0{,}006$ kgms^2; $I_{G_4} = 0{,}0008$ kgms^2; $\varphi = 45°$.

Soluție. Expresia momentului de inerție redus la elementul *1* (OA) este dată de formula (II.8), care, aplicată la motorul din figură, devine:

$$I_{red} = I_{G_1}\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2 + m_1\left(\frac{v_{G_1}}{\omega_1}\right)^2 + I_{G_2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{v_{G_2}}{\omega_1}\right)^2 +$$

$$+ m_3\left(\frac{v_B}{\omega_1}\right)^2 + I_{G_4}\left(\frac{\omega_4}{\omega_1}\right)^2 + m_4\left(\frac{v_{G_4}}{\omega_1}\right)^2 + m_5\left(\frac{v_D}{\omega_1}\right)^2.$$

Dar $I_{G_1}\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2 + m_1\left(\frac{v_{G_1}}{\omega_1}\right)^2 = I_0$ — momentul de inerție al manivelei *1* în raport cu axul ce trece prin centrul articulației O_1.

Se construiește planul vitezelor (fig. II.5, *b*), alegîndu-se o viteză de rotație a arborelui motor $n_1 = 1\,500$ rot/min.

Pentru această valoare se obține:

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = 157{,}5 \text{ rads}^{-1},$$

de unde:

$$v_A = l_1\omega_1 = 11 \text{ ms}^{-1}.$$

Din planul vitezelor construit la scara $k_v = \frac{1}{3}\frac{\text{ms}^{-1}}{\text{mm}}$, rezultă:

$$\omega_2 = k_v\frac{(\overline{a'b'})}{\overline{AB}} = 30{,}1 \text{ rads}^{-1}; \quad \omega_4 = k_v\frac{(\overline{c'd'})}{\overline{CD}} = 39{,}6 \text{ rads}^{-1};$$

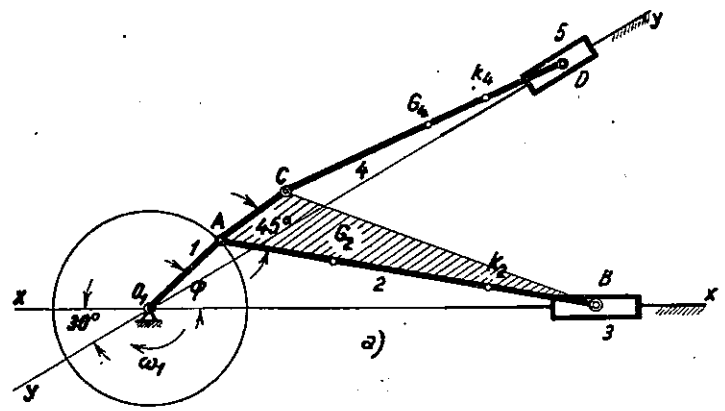
$$v_{G_2} = k_v(\overline{p'g_2'}) = 10 \text{ ms}^{-1}; \quad v_{G_4} = k_v(\overline{p'g_4'}) = 5{,}3 \text{ ms}^{-1};$$

$$v_B = k_v(\overline{p'b'}) = 9{,}16 \text{ ms}^{-1}; \quad v_D = k_v(\overline{p'd'}) = 3{,}66 \text{ ms}^{-1}.$$

Inlocuind în expresia lui I_{red} valorile date de problemă și cele calculate mai sus se obține:

$$I_{red}=I_0+0{,}006\left(\frac{30{,}1}{157{,}5}\right)^2+\frac{5}{9{,}81}\left(\frac{10}{157{,}5}\right)^2+\frac{0{,}5}{9{,}81}\left(\frac{9{,}16}{157{,}5}\right)^2+$$

$$+0{,}0008\left(\frac{39{,}6}{157{,}5}\right)^2+\frac{2}{9{,}81}\left(\frac{5{,}3}{157{,}5}\right)^2+\frac{0{,}5}{9{,}81}\left(\frac{3{,}66}{157{,}5}\right)^2=\left(I_0+\frac{3{,}35494}{1\,000}\right)\ \text{kgfms}^2.$$



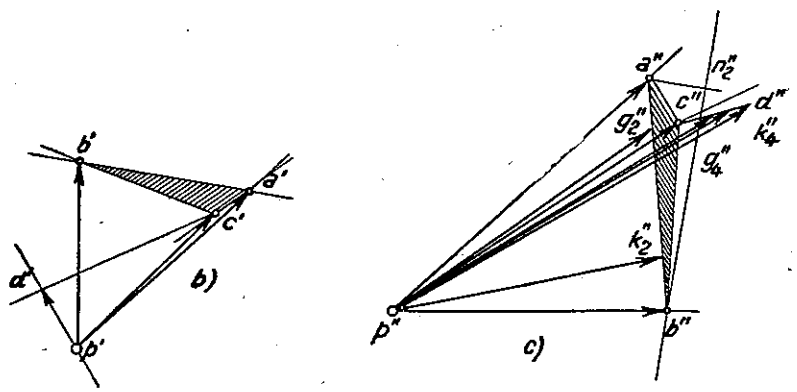


Fig. II.5. Schema cinematică a motorului în V (fig. II.5, *a*) cu
— planul vitezelor (fig. II.5, *b*) și
— planul accelerațiilor (fig. II.5, *c*).

Conform formulei (II.11), masa redusă la butonul de manivelă este

$$m_{red}=\frac{I_{red}}{l_1^2}=\left(\frac{I_0}{0{,}07}+0{,}6846\right)\ \text{kgfm}^{-1}\text{s}^2.$$

Atît I_{red} cît și m_{red} cuprind — după cum s-a văzut și la observația de la § 3.1.1 — două părți:

— una constantă — egală cu I_0, respectiv $\frac{I_0}{0{,}07^2}$ — în tot timpul ciclului energetic al motorului;

— a doua — variabilă, care corespunde momentului de inerție redus sau masei reduse la elementul *1*, respectiv punctul *A*, a tuturor celorlalte elemente ale motorului (bielele, pistoanele, buloanele de articulație) în momentul considerat ($\varphi=45°$).

Forțele motoare reduse la butonul de manivelă rezultă din formula (II.32), în care se iau în considerație numai forțele F_B și F_D care acționează asupra pistoanelor *3*, respectiv, *5*.

Se obține:

$$F_{M\,red}=F_B\frac{v_B}{v_A}\cos 0+F_D\frac{v_D}{v_A}\cos 0.$$

Dacă se introduc în expresia de mai sus mărimile obținute din planul vitezelor, se găsește:

$$F_{M\,red}=F_B\frac{\overline{p'b'}}{\overline{p'a'}}+F_D\frac{\overline{p'd'}}{\overline{p'a'}}=0{,}8327F_B+0{,}3327F_D.$$

§ 4. FAZELE MIȘCĂRII MAȘINII

Durata de mișcare a unei mașini este intervalul de timp dintre începutul mișcării și terminarea ei, sub acțiunea forțelor exterioare.

Mișcarea mașinii se ia totdeauna în considerație față de elementul de reducere, care, în general, este și cel inițial.

Studiul mișcării mașinii trebuie să aibă la bază, după cum s-a arătat la § 2, atît ciclul cinematic al mașinii, care corespunde cu ciclul de variație al momentului de inerție redus, cît și ciclul energetic, cînd acesta are o durată mai mare decît primul.

4.1. Faza de demaraj

Dacă se analizează mișcarea mașinii se observă că, la început, sub acțiunea forțelor exterioare, viteza unghiulară a elementului de reducere (inițial sau conducător) crește după o anumită lege. La sfîrșitul unui ciclu cinematic viteza unghiulară ω_1 este mai mare decît la începutul lui. Legea de variație a vitezei unghiulare în interiorul unui ciclu cinematic depinde atît de legea de variație a momentului de inerție redus I_{red} al mașinii, cît și de legea de variație a forțelor exterioare. În fig. II.6 este trasată diagrama de variație a vitezei unghiulare ω în funcție de unghiul de rotație φ al elementului de reducere.

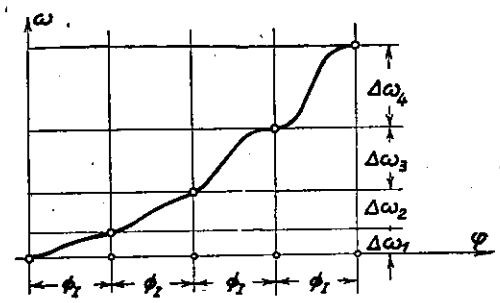


Fig. II.6. Variația grafică a lui $\omega(\varphi)$ în faza de demaraj (pornirea).

Pe abscisă s-au trasat şi intervalele Φ_I corespunzătoare perioadei de variaţie a lui I_{red}. Creşterea $\Delta\omega$ în timpul unui ciclu nu este aceeaşi, ci, în general, este variabilă, fiind în funcţie de legea de variaţie a acceleraţiei.

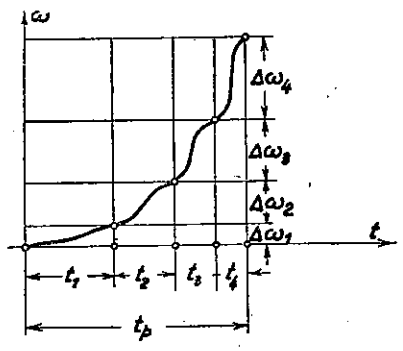


Fig. II.7. Variaţia grafică a lui $\omega(t)$ în faza de demaraj.

Dacă pe abscisă s-ar fi luat timpul t, porţiunile de timp în care elementul de reducere ar fi parcurs perioada Φ_I ar fi devenit din ce în ce mai mici, pe măsură ce maşina se apropie de viteza de regim, aşa cum se arată în fig. II.7.

După trecerea unui timp t_p se observă că viteza unghiulară nu mai creşte, ci oscilează în jurul unei valori constante ω_{med} (fig. II.8).

Faza t_p în timpul căreia se observă o creştere a vitezei unghiulare a elementului de reducere al maşinii se numeşte faza de pornire sau demaraj.

4.2. Faza de regim

După trecerea fazei de pornire urmează faza de regim sau, cum este numită în mod curent, mişcarea de regim.

In timpul acestei mişcări viteza unghiulară a elementului de reducere oscilează, după cum s-a spus mai sus, în jurul unei viteze unghiulare medii ω_{med}.

Această oscilaţie are un caracter periodic, motiv pentru care durata t_r în care are loc mişcarea se mai numeşte şi mişcare periodică a maşinii. In fig. II.8 este arătată diagrama (sau curba) de variaţie a vitezei unghiulare ω în timpul mişcării de regim.

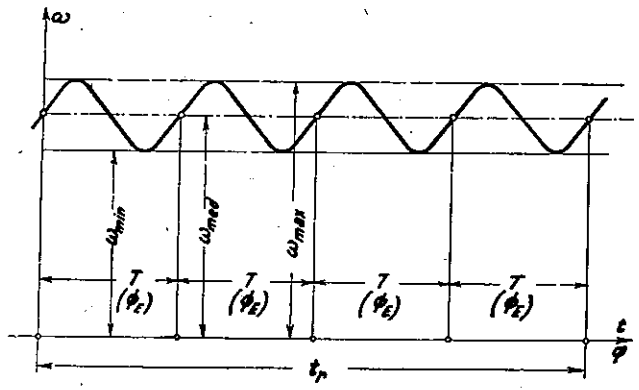


Fig. II.8. Variaţia grafică a lui $\omega(\varphi)$ în faza de regim.

In fig. II.8 T reprezintă durata unui ciclu de variaţie a lui ω. Ciclul poate să corespundă unei fracţiuni dintr-o rotaţie a manivelei, atunci cînd şi ciclul energetic este o fracţiune din rotaţia manivelei cazul motoarelor cu mai mulţi cilindri), sau poate să corespundă celui energetic, atunci cînd acesta este un multiplu de cicluri cinematice sau de variaţie a lui I_{red} (cazul motorului de explozie în patru timpi, unde $\Phi_E=2\Phi_I$).

La maşinile cu abur cu un singur cilindru, timpul T corespunde unei singure rotaţii a manivelei (deci $\Phi_E=\Phi_I$).

In concluzie, ciclul energetic Φ_E al maşinii sau motorului şi ciclul de variaţie Φ_I al momentului de inerţie redus determină curba de variaţie a vitezei unghiulare ω a elementului de reducere în timpul mişcării de regim. Periodicitatea lui ω o hotărăşte însă ciclul energetic.

4.3. Faza de oprire

Dacă acţiunea forţelor motoare sau a momentelor motoare asupra maşinii încetează, viteza unghiulară a elementului de reducere descreşte, astfel că la sfîrşitul unui ciclu de variaţie Φ_I a lui I_{red}, ω este mai mică decît la începutul lui.

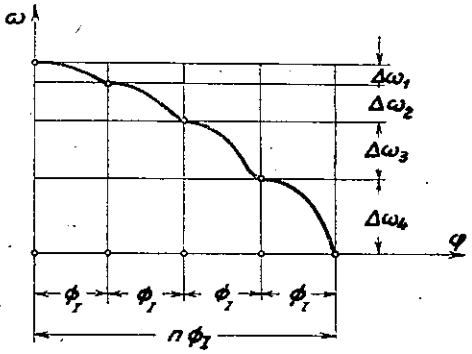


Fig. II.9. Variaţia grafică a lui $\omega(\varphi)$ în faza de oprire.

Durata t_0 a acestei faze pînă la oprirea maşinii se numeşte durata opririi sau faza de oprire.

Timpul t_0 poate fi evident scurtat dacă se măresc rezistenţele prin introducerea unor forţe de frînare.

In tot timpul fazei de frînare (fig. II, 9), legea de variaţie a vitezei unghiulare ω depinde de momentul de inerţie redus I_{red} al maşinii.

In cazul cînd diagrama de variaţie a lui ω în faza de oprire s-ar fi trasat în funcţie de t, intervalele de timp corespunzătoare lui Φ_I ar fi devenit din ce în ce mai mari.

Reprezentată în funcţie de timp, diagrama de variaţie alui ω pe durata totală de mişcare t_t a maşinii se prezintă ca în fig. II.10, unde sînt arătate cele trei faze t_p, t_r şi t_0, precum şi ciclul de variaţie T al lui ω în faza de regim.

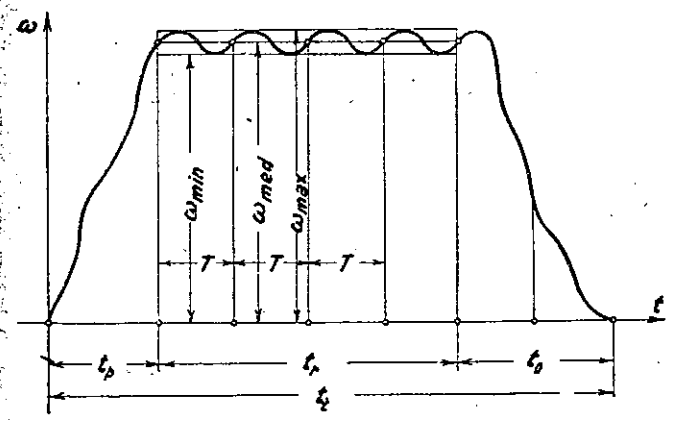


Fig. II.10. Variaţia grafică a lui $\omega(t)$ în timpul durate totale a mişcării maşinii.

Evident că durata t_r poate conţine un număr foarte mare de cicluri de variaţie T. Astfel, la un motor Diesel care acţionează un generator electric t_r

este foarte mare în raport cu t_p şi t_0, în timp ce la un motor care acţionează o macara este de acelaşi ordin de mărime.

4.4. Ecuaţiile celor trei faze ale mişcării maşinii

Cele trei faze ale duratei totale de mişcare a maşinii se pot evidenţia cu ajutorul ecuaţiei energiei cinetice a maşinii, scrisă sub una dintre formulele (II.34) sau (II.35) .

In timpul fazei de pornire, t_p se scurtează dacă rezistenţele tehnologice (productive) sînt zero, adică dacă maşina *porneşte în gol*. In acest caz, W_r fiind foarte mic, se realizează posibilitatea ca după rotaţia elementului de reducere cu unghiul Φ_I — perioada de variaţie a lui I_{red} — să se obţină $\omega_1 > \omega_{1_0}$.

Cum după rotaţia elementului I cu unghiul Φ_I se obţine

$$I_{red} = I_{red\,0},$$

ecuaţia (II.34) devine:

$$\frac{1}{2} I_{red} (\omega_1^2 - \omega_{1_0}^2) = W = W_M - W_r = \int_0^{\Phi_I} (M_M - M_r)\, d\varphi.$$

a) Faza de pornire se caracterizează astfel prin următoarele relaţii:

$$\omega_1 > \omega_{1_0}; \quad \text{deci,} \quad W_M > W_r$$

şi

$$E_1 > E_0; \quad \text{de unde} \quad \int_0^{\Phi_I} (M_M - M_r)\, d\varphi > 0. \tag{II.36}$$

In ultima inegalitate M_M reprezintă suma tuturor momentelor motoare reduse la elementul I, iar M_r — suma tuturor momentelor rezistente reduse la acelaşi element.

b) Faza de regim se caracterizează, după cum se ştie, prin periodicitatea mişcării după fiecare ciclu energetic Φ_E al maşinii. Cum la începutul şi sfîrşitul acestui ciclu există evident şi $I_{red} = I_{red\,0}$, relaţiile care caracterizează această fază vor fi:

$$\omega_1 = \omega_{1_0}; \quad \text{deci,} \quad W_M = W_r$$

şi

$$E_1 = E_0; \quad \text{de unde,} \quad \int_0^{\Phi_E} (M_M - M_r)\, d\varphi = 0. \tag{II.37}$$

c) Faza de oprire va fi caracterizată prin următoarele relaţii:

$$\omega_1 < \omega_{1_0}; \quad \text{deci,} \quad W_M = 0 < W_r$$

şi

$$E_1 < E_0; \quad \text{de unde, deoarece } M_M = 0: \quad \int_0^{\Phi_I} (M_M - M_r)\, d\varphi 0. \tag{II.38}$$

Formulele (II.36), (II.37) şi (II.38) caracterizează complet cele trei faze ale maşinii.

In timpul fazei de pornire, energia cinetică a maşinii creşte de la zero pînă la o valoare constantă, după care oscilează în jurul acesteia, luînd aceeaşi valoare la sfîrşitul unui ciclu de variaţie a vitezei unghiulare (ciclu energetic) în tot timpul fazei de regim, după care scade apoi pînă la zero în timpul fazei de oprire. Maşina cedează astfel energia cinetică acumulată în timpul fazei de pornire.

Cea mai importantă fază din punct de vedere practic este faza de regim, deoarece în acest interval de timp maşina efectuează lucrul mecanic util prin învingerea rezistenţelor tehnologice (productive) pentru care este creată.

§ 5. BILANŢUL ENERGETIC AL MAŞINII

Ecuaţia energiei cinetice (II.34) a maşinii se poate scrie şi astfel:

$$W_M - W_r - \left(\frac{1}{2} I_{red} \omega_1^2 - \frac{1}{2} I_{red} \omega_{1_0}^2\right) = 0. \tag{II.39}$$

Cum energia cinetică a maşinii nu este altceva decît lucrul mecanic al forţelor de inerţie ale maşinii, rezultă că paranteza din expresia (II. 39) se poate pune sub forma W_i, astfel că ecuaţia energiei cinetice devine:

$$W_M - W_r - W_i = 0. \tag{II.39'}$$

Termenul W_i poate fi pozitiv sau negativ, după cum viteza unghiulară a elementului de reducere a crescut sau a scăzut în intervalul de timp $t - t_0$ în care s-a scris ecuaţia energiei.

Pentru o analiză mai adîncă a ecuaţiei (II.39') trebuie să se precizeze că W_r este compus din mai multe părţi, şi anume:

$$W_r = W_{rt} + W_{rf} + W_G, \tag{II.40}$$

în care:

- W_{rt} este lucrul mecanic al rezistenţelor tehnologice (sau productive) consumat în intervalul de timp $t - t_0$; în general, acest lucru mecanic se consumă;
- W_{rf} — lucrul mecanic al forţelor de frecare pe suprafeţele sau punctele de contact ale cuplelor cinematice, al rezistenţelor datorită aerului etc.; acest lucru mecanic, spre deosebire de celelalte, totdeauna se consumă, deci este totdeauna negativ;
- W_G — lucrul mecanic al forţelor de greutate ale elementelor; el se produce sau se consumă după cum elementele maşinii coboară sau urcă în intervalul de timp $(t - t_0)$ considerat.

Dacă se înlocuieşte (II.40) în (II.39'), se obţine:

$$W_M - W_{rt} - W_{rf} - W_G - W_i = 0. \tag{II.41}$$

Sub forma (II.41), ecuaţia energiei cinetice reprezintă echivalenţa dintre lucrul mecanic al forţelor motoare W_M şi celelalte lucruri mecanice consumate sau produse.

Se poate deci scrie că:

$$W_M = W_{rt} + W_{rf} + W_G + W_i. \tag{II.42}$$

Din (II.42) rezultă că, în intervalul de timp $t - t_0$:

Lucrul mecanic produs de forţele motoare W_M se poate descompune în lucrul mecanic consumat de rezistenţele tehnologice W_{rt}, cel consumat de rezistenţele de frecare W_{rf}, cel consumat (sau produs) de forţele de greutate ale elementelor maşinii W_G şi cel consumat pentru creşterea energiei cinetice a maşinii W_i.

Dacă energia cinetică a maşinii a scăzut în acest interval de timp, atunci în ecuaţia (II.42) W_i este negativ şi deci W_M este mai mic decît în primul caz. Astfel se explică de ce în perioada de pornire (demaraj), cînd W_i este pozitiv, este necesar un lucru mecanic mai mare al forţelor motoare.

Ecuaţia (II.42) se poate pune şi sub altă formă.

In adevăr, dacă intervalul de timp $t - t_0 = dt$ este foarte mic, toţi termenii capătă forma diferenţială.

Impărţind cu dt, se obţine ecuaţia puterilor instantanee:

$$P_M = P_{rt} + P_{rf} + P_G + P_i, \tag{II.43}$$

în care:

P_M este puterea datorită forţelor motoare;
P_{rt} — puterea necesară învingerii rezistenţelor tehnologice (productive);
P_{rf} — puterea necesară învingerii tuturor rezistenţelor de frecare;
P_i — puterea necesară pentru creşterea energiei cinetice a maşinii (cînd P_i este pozitiv), sau invers, obţinută prin scăderea energiei cinetice (cînd P_i este negativ);
P_G — puterea necesară pentru învingerea forţelor de greutate ale elementelor maşinii (cînd centrul de greutate al maşinii urcă), sau invers, puterea obţinută din forţele de greutate ale elementelor (cînd centrul de greutate al maşinii coboară).

Ecuaţia (II.43) se numeşte ecuaţia bilanţului energetic al maşinii şi este de o importanţă capitală în studiul funcţionării şi randamentului maşinii.

§ 6. RANDAMENTUL MAŞINILOR

6.1. Expresiile analitice ale randamentului

Ecuaţia bilanţului energetic al maşinii permite definirea unor noţiuni de bază care caracterizează calitatea lucrului maşinii.

Aceste noţiuni apar însă numai în regimul de mişcare permanent al maşinii, cînd la sfîrşitul unui ciclu energetic sau după un număr foarte mare de astfel de cicluri, energia cinetică rămîne constantă.

In acest caz, în ecuaţia (II.42) dispare termenul W_i care reprezintă variaţia energiei cinetice.

De asemenea, tot în timpul mişcării de regim a maşinii şi la sfîrşitul unui număr de cicluri energetice lucrul mecanic W_G este egal cu zero, deoarece centrul de greutate al maşinii descrie o curbă închisă în timpul unui ciclu cinematic.

Cu aceste precizări ecuaţia bilanţului energetic al maşinii devine:

$$W_M = W_{rt} + W_{rf}. \tag{II.44}$$

In concluzie, în timpul unui ciclu energetic sau după un multiplu de astfel de cicluri din mişcarea de regim lucrul mecanic al tuturor forţelor motoare W_M este egal cu suma lucrurilor mecanice ale rezistenţelor tehnologice W_{rt} şi de frecare W_{rf}.

In mişcarea de regim se numeşte randament mecanic al maşinii sau al mecanismului raportul

$$\eta = \frac{W_{rt}}{W_M}. \tag{II.45}$$

Ţinînd seamă de (II.44), expresia randamentului mecanic se mai poate scrie şi:

$$\eta = \frac{W_M - W_{rf}}{W_M} = 1 - \frac{W_{rf}}{W_M}. \tag{II.46}$$

In practică se mai utilizează şi noţiunea de coeficient de pierdere φ, care se defineşte ca raportul dintre lucrul mecanic al forţelor de frecare şi lucrul mecanic al forţelor motoare din timpul unui ciclu energetic al mişcării de regim, adică

$$\varphi = \frac{W_{rf}}{W_M}. \tag{II.47}$$

In acest caz, relaţia dintre randament şi coeficientul de pierdere este

$$\eta = 1 - \varphi. \tag{II.48}$$

De asemenea, la unele maşini este cazul să se stabilească raportul ψ dintre lucrurile mecanice ale forţelor de frecare şi cele tehnologice, adică

$$\psi = \frac{W_{rf}}{W_{rt}}. \tag{II.49}$$

Din (II.45), (II.47), (II.48) şi (II.49) rezultă imediat:

$$\psi = \frac{\varphi}{\eta} = \frac{1-\eta}{\eta} = \frac{\varphi}{1-\varphi}. \tag{II.50}$$

Nu trebuie să se piardă din vedere că totdeauna valorile lucrurilor mecanice W_M, W_{rt}, W_{rf} trebuie calculate pentru un ciclu energetic, deoarece dacă se calculează pentru o fracţiune din ele, atunci o parte din lucrul mecanic al forţelor motoare este absorbit prin creşterea energiei cinetice a maşinii, sau invers, o parte din lucrurile mecanice ale rezistenţelor tehnologice sau de frecare se vor consuma pe socoteala energiei cinetice.

Pentru aceleaşi motive, în timpul fazelor de pornire (demaraj) şi de oprire (frînare) noţiunile de randament şi coeficient de pierdere îşi pierd înţelesul dat de formulele (II.45) şi (II.47).

Noţiunile de randament şi coeficient de pierdere se pot exprima şi dacă în loc de lucrurile mecanice W_M, W_{rt}, şi W_{rf}, se pun puterile medii dezvoltate sau consumate în timpul unui ciclu energetic în perioada de regim.

Astfel, dacă, de exemplu, variaţia momentului motor redus la butonul de manivelă al unui motor Diesel în patru timpi în timpul unui ciclu energetic $\Phi_E=4\pi$ este de forma dată în fig. II.11, atunci momentul motor mediu redus în timpul unui ciclu energetic $\Phi_E=4\pi$ va fi evident

$$M_{M\,med}=\frac{\int_0^{4\pi} M_M\, d\varphi}{4\pi},$$

şi atunci puterea medie dezvoltată de motor în timpul unui ciclu energetic din faza de regim va fi

$$P_{M\,med}=M_{M\,med}\,\omega_m .$$

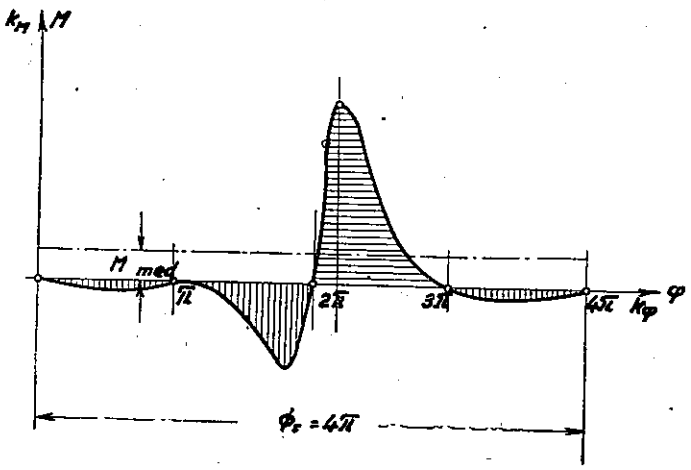


Fig. II.11. Variaţia grafică a momentului motor redus la elementul iniţial (manivela) în timpul unui ciclu energetic Φ_E la un motor Diesel în patru timpi cu un cilindru.

Cu notaţii asemănătoare expresiile (II.45) — (II.49) devin

$$\eta=\frac{P_{rt\,med}}{P_{M\,med}}=1-\frac{P_{rf\,med}}{P_{M\,med}}; \qquad (II.46')$$

$$\varphi=\frac{P_{rf\,med}}{P_{M\,med}}; \qquad (II.47')$$

$$\psi=\frac{P_{rf\cdot med}}{P_{rt\,med}}. \qquad (II.49')$$

Din formulele de mai sus rezultă că

$$0\leqq\eta<1$$

şi

$$0<\varphi\leqq 1.$$

Cînd randamentul $\eta=0$, coeficientul de pierdere este $\varphi=1$, adică lucrul mecanic al forţelor motoare este consumat numai pentru învingerea tuturor rezistenţelor de frecare.

La maşinile stabile, acest caz apare la funcţionarea în gol. Trebuie să se facă însă o deosebire între funcţionarea în gol în sensul definit mai sus şi funcţionarea locomotivelor, care în palier consumă tot lucrul mecanic produs de maşină numai pentru învingerea rezistenţelor de frecare (rezistenţa aerului, frecările în lagăre şi frecarea de rostogolire dintre bandaje şi şine), deoarece W_{rt} este egal cu zero.

Aici, însă, raţionamentul se face prin luarea în consideraţie a forţei de tracţiune de la cîrlig, fără a ne preocupa de cauzele care o produc. Din acest punct de vedere se consideră că rezistenţa tehnologică este tocmai forţa de tracţiune la cîrlig şi deci noţiunea de mers în gol definită ca mai sus dispare.

Din exemplul dat mai sus se desprinde concluzia că randamentul unei maşini nu poate servi drept criteriu de comparaţie decît pentru maşini asemănătoare, adică: maşinile cu abur stabile între ele, motoarele Diesel între ele, locomotivele între ele, maşinile-unelte pentru fiecare tip (strung, şeping, maşină de rabotat, maşină de frezat etc.) între ele etc.

6.2. Randamentul mecanismelor legate în serie

Randamentul mecanismelor legate în serie, care constituie o maşină mai complexă, se calculează ţinîndu-se seamă de randamentul fiecărui mecanism simplu luat în parte.

Fie n mecanisme legate în serie (fig. II.12). Primul produce — datorită forţei motoare care acţionează asupra elementului conducător — lucrul mecanic W_M. Aceasta cedează elementului condus lucrul mecanic util W_{rt_1}, care devine la rîndul lui lucru mecanic motor pentru elementul conducător al mecanismului următor ş. a. m. d.

In cazul fig. II.12, lucrul mecanic W_{rt_k} al roţii dinţate din mecanismul de ordinul k va fi egal cu lucrul mecanic motor $W_{M\,(k+1)}$ al roţii dinţate următoare (care este elementul conducător al mecanismului următor) de ordinul $k+1$.

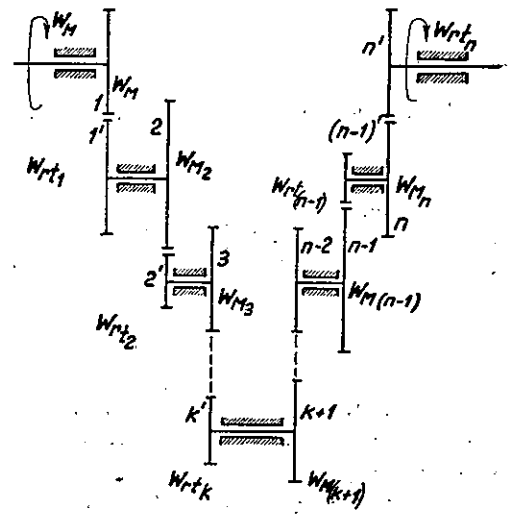


Fig. II.12. Schema cinematică a n mecanisme legate în serie.

Aplicînd formula (II.45) pentru fiecare mecanism în parte (I, I'); $(2, 2')$; $(3, 3')$; ...; (k, k'); ...; (n, n') şi, ţinînd seamă de cele de mai sus, se obţine

$$\eta_1 = \frac{W_{rt_1}}{W_M};$$

$$\eta_2 = \frac{W_{rt_2}}{W_{M_2}} = \frac{W_{rt_2}}{W_{rt_1}};$$

$$\eta_3 = \frac{W_{rt_3}}{W_{M_3}} = \frac{W_{rt_3}}{W_{rt_2}};$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\eta_k = \frac{W_{rt_k}}{W_{M_k}} = \frac{W_{rt_k}}{W_{rt\,(k-1)}};$$

$$\eta_{k+1} = \frac{W_{rt\,(k+1)}}{W_{M\,(k+1)}} = \frac{W_{rt\,(k+1)}}{W_{rt_k}};$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\eta_{n-1} = \frac{W_{rt\,(n-1)}}{W_{M\,(n-1)}} = \frac{W_{rt\,(n-1)}}{W_{rt\,(n-2)}};$$

$$\eta_n = \frac{W_{rt_n}}{W_{M_n}} = \frac{W_{rt_n}}{W_{rt\,(n-1)}}.$$

Randamentul total al celor n mecanisme legate în serie este evident

$$\eta_{1n} = \frac{W_{rt_n}}{W_{M_1}}. \tag{II.51}$$

Se vede uşor că valoarea de mai sus rezultă din înmulţirea între ele a randamentelor parţiale ale celor n mecanisme, adică:

$$\eta_{1n} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \ldots \eta_n. \tag{II.52}$$

Evident că în expresiile randamentelor, în locul lucrurilor mecanice din timpul unui ciclu energetic al mişcării de regim, se pot lua şi puterile medii corespunzătoare, conform formulei (II.46').

6.3. Randamentul mecanismelor legate în paralel şi în serie

Acest randament se calculează după aceeaşi metodă. Se va lucra de data aceasta cu puterile medii, cărora pentru simplificarea noţiunilor le vom elimina indicele „*med*".

Astfel, fie (fig. II.13) P_M puterea motoare medie din timpul mişcării de regim a elementului conducător, care se repartizează în paralel la trei grupe de mecanisme grupate în serie.

Puterile motoare care revin fiecăreia dintre aceste trei grupe de mecanisme sînt, respectiv,

$$P'_{M_1};\quad P''_{M_1};\quad P'''_{M_1}.$$

Ţinînd seamă de formula (II.52), randamentele totale ale fiecărei grupe de mecanisme grupate în serie sînt:

$$\eta_{1k} = \frac{P'_{rt_k}}{P'_{M_1}};\quad \eta_{1m} = \frac{P''_{rt_m}}{P''_{M_1}};\quad \eta_{1n} = \frac{P'''_{rt_n}}{P'''_{M_1}}.$$

Puterea totală motoare P_M este evident

$$P_M = P'_{M_1} + P''_{M_1} + P'''_{M_1}.$$

Ţinînd seamă de expresiile randamentelor de mai sus, P_M devine

$$P_M = \frac{P'_{rt_k}}{\eta_{1k}} + \frac{P''_{rt_m}}{\eta_{1m}} + \frac{P'''_{rt_n}}{\eta_{1n}}.$$

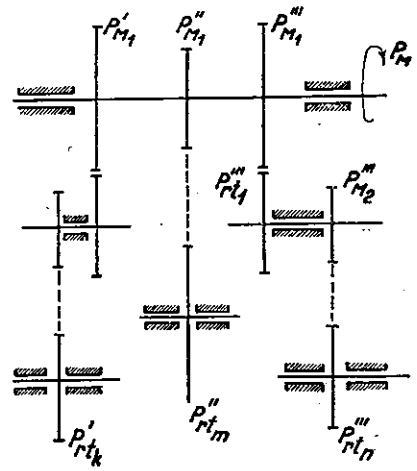


Fig. II.13. Schema cinematică a unui grup de $(k+m+n)$ mecanisme legate în serie şi paralel.

Puterea totală P_{rt} absorbită de rezistenţele tehnologice (productive) se pot de asemenea scrie sub forma

$$P_{rt} = P'_{rt_k} + P''_{rt_m} + P'''_{rt_n}.$$

Cu aceste notaţii expresia randamentului mecanic al grupei de mecanisme cuplate în paralel şi serie este

$$\eta = \frac{P_{rt}}{P_M} = \frac{P'_{rt_k} + P''_{rt_m} + P'''_{rt_n}}{\dfrac{P'_{rt_k}}{\eta_{1k}} + \dfrac{P''_{rt_m}}{\eta_{1m}} + \dfrac{P'''_{rt_n}}{\eta_{1n}}}. \tag{II.53}$$

Expresia randamentului dată de formula (II.53) se aplică la maşini-unelte (maşini de frezat universale, cutii de viteze etc.).

§ 7. RANDAMENTELE CÎTORVA MAŞINI ŞI MECANISME

7.1. Randamentul mecanismelor şi al maşinilor cu cuple cinematice inferioare

Acest randament este în general dificil de calculat, deoarece la început nu se cunosc reacţiunile în articulaţii.

La o maşină sau mecanism dat se procedează întîi la aflarea reacţiunilor în articulaţii prin efectuarea calculului cinetostatic, fără luare în consideraţie a frecării, aşa cum s-a arătat în partea I, la cap. II, § 12, 1.

Calculul se face evident pentru un număr oarecare de poziţii ale mecanismului în timpul ciclului cinematic (de obicei 12 sau 24 de poziţii).

După determinarea reacţiunilor $\underline{\mathfrak{R}_{12}}$, $\underline{\mathfrak{R}_{23}}$, ... se determină forţele de frecare care acţionează pe suprafeţele de contact ale cuplelor cinematice.

Acestea sînt de forma: $F_{12}=\mu_1\underline{\mathfrak{R}_{12}}$; $F_{23}=\mu_2\underline{\mathfrak{R}_{23}}$; ... iar momentele forţelor de frecare, cele date de formulele (I.156).

Puterile absorbite de forţele de frecare vor fi de forma

$$P_{rf_{01}}=\mu\mathfrak{R}_{01}r_0\omega_1=M_{F0}\,\omega_1;\quad P_{rf_{12}}=\mu\mathfrak{R}_{12}r_1\omega_{12}=M_{FA}\omega_{12}\ldots,$$

iar puterea totală absorbită de forţele de frecare ale mecanismului sau ale maşini va fi

$$P_{rf}=\sum_{j=0}^{j=n-1}P_{rf_{(j,\,j+1)}}. \tag{II.54}$$

Această putere se calculează pentru fiecare dintre cele 12—24 de poziţii ale mecanismului sau maşinii, după care se determină puterea medie $P_{f\,med}$ absorbită de forţele de frecare în mişcare de regim:

$$P_{rf\,med}=\frac{\sum_{j=1}^{n}P_{rf_j}}{m}. \tag{II.55}$$

Puterea medie absorbită de rezistenţele tehnologice se determină cu ajutorul formulei de mai jos, valabile pentru o anumită poziţie a mecanismului în timpul ciclului energetic:

$$P_{rt}=\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{R}_{rt_j}v_j\cos\alpha_j+\sum M_{rt_j}\omega_j.$$

Determinarea acestei puteri pentru un număr de poziţii ale mecanismului sau maşinii, în timpul ciclului energetic, permite aflarea puterii medii absorbite în mişcarea de regim

$$P_{rt\,med}=\frac{\sum_{j=1}^{n}P_{rt_j}}{m}. \tag{II.56}$$

Analog formulei (II.44) există în mişcarea de regim relaţia:

$$P_{M\,med}=P_{rt\,med}+P_{rf\,med}. \tag{II.57}$$

Randamentul maşinii sau al mecanismului cu cuple cinematice inferioare este deci dat de formula (II.46′)

$$\eta=\frac{P_{rt\,med}}{P_{M\,med}}=1-\frac{P_{rf\,med}}{P_{M\,med}}. \tag{II.46′}$$

In partea I, la cap. III, § 18,3, s-a determinat, în cazul unui mecanism patrulater articulat, valoarea forţei R_f care echilibrează acţiunea forţelor de frecare, folosind metoda pîrghiei lui N. E. Jukovski.

Puterea absorbită de R_f rezultă imediat din formula (I.192), adică

$$P_{rf}=k_v h_x R_f.$$

Dacă se face calculul cinetostatic şi pîrghia lui Jukovski pentru 12 poziţii diferite ale mecanismului, se va obţine de fiecare dată cîte o valoare pentru P_{rf}, astfel încît cu ajutorul formulei (II.55) se determină $P_{rf\,med}$, de unde cu ajutorul formelei (II.46′) se calculează randamentul maşinii sau al mecanismului.

Acelaşi calcul se poate conduce şi pe cale grafică, folosind exemplul din partea I, cap. III, § 18,3, unde, în fig. I. 103, *f*, s-a determinat rezistenţa tehnologică R în cazul frecării, şi R_0 în lipsa frecării.

Refăcînd calculul pentru 12—24 de poziţii ale mecanismului bielă-manivelă şi făcînd media celor două rezistenţe tehnologice

$$R_{med}=\frac{\sum_{k=1}^{n}R_k}{n}\quad\text{şi}\quad R_{0\,med}=\frac{\sum_{k=1}^{n}R_{0k}}{n},$$

se obţine valoarea randamentului mecanismului

$$\eta=\frac{R_{med}}{R_{0\,med}}.$$

Complexitatea calculului, al cărui mers s-a indicat mai sus, îl face inaplicabil din punct de vedere practic.

De aceea, la maşinile existente randamentul mecanic se determină totdeauna experimental, prin măsurarea în timpul mişcării de regim a puterii medii motoare $P_{M\,med}$ şi a celei medii absorbite de rezistenţele tehnologice $P_{rt\,med}$.

Făcînd raportul lor, conform formulei (II.46′), se determină η.

La proiectarea unei maşini sau mecanism se folosesc pentru η valorile determinate experimental la maşini şi mecanisme similare.

7.2. Randamentul roţilor dinţate

După cum se ştie, între profilele a doi dinţi aflaţi în angrenare există o alunecare atît timp cît punctul sau linia de angrenare nu se află în polul angrenării.

Datorită acestei alunecări, forţa motoare care acţionează pe direcţia dreptei de angrenare (la profilele în evolventă) dă naştere la o forţă de frecare între cei doi dinţi, forţă care, după cum s-a arătat la capitolul frecării, este dirijată în sens contrar vitezei relative dintre cele două profile.

Ca urmare, lucrul mecanic absorbit de această forţă de frecare în timpul angrenării micşorează puterea cedată roţii conduse.

Dar puterea roţii conduse mai este micşorată şi de lucrul mecanic absorbit de momentul frecării de rostogolire dintre profilele dinţilor, fenomen ce iese în evidenţă prin metoda inversării mişcării.

Metoda de calcul al randamentului mecanic al angrenajului va urma deci acelaşi drum ca şi al mecanismului sau maşinii cu cuple cinematice inferioare, adică prin determinarea puterii medii a forţelor de frecare $P_{rf\,med}$ şi apoi a lui $P_{M\,med}$ şi $P_{rt\,med}$. Aplicînd după aceea formula (II.46′), se calculează η.

Puterea $P_{rf\,med}$ este compusă din puterile medii consumate de frecările din lagărele celor două roţi în angrenare, din puterea consumată de frecarea de alunecare dintre profilele dinţilor în angrenare şi din momentul frecării de rostogolire, adică:

$$P_{rf\,med}=P'_{rf\,med}+P''_{rf\,med}+P'''_{rf\,med}+P^{IV}_{rf\,med},$$

în care:

$P'_{rf\,med}$, este puterea medie a frecării de alunecare dintre profilele dinţilor în timpul angrenării;

$P''_{rf\,med}=\mu_1 r_1 Q_1 \omega_1$ — puterea medie absorbită de momentul de frecare $M'_F=\mu_1 r_1 Q_1$ din lagărul roţii dinţate *1*;

$P'''_{rf\,med}=\mu_2 r_2 Q_2 \omega_2$ — puterea medie absorbită de momentul de frecare $M^2_F=\mu_2 r_2 Q_2$ din lagărul roţii dinţate *2*;

$P^{IV}_{rf\,med}$ — puterea medie absorbită de momentul frecării de rostogolire.

In formulele de mai sus s-au notat:

μ_1, μ_2 — coeficienţii de frecare dintre suprafeţele fusurilor şi lagărelor roţilor *1*, respectiv *2*;

r_1, r_2 — razele fusurilor roţilor *1*, respectiv *2*;

Q_1, Q_2 — reacţiunile din lagărele roţilor *1*, respectiv *2*;

ω_1, ω_2 — vitezele unghiulare absolute ale roţilor *1*, respectiv *2*.

Determinarea puterii $P'_{rf\,med}$ datorită frecării de alunecare dintre profilele dinţilor. Pentru aflarea lui $P'_{rf\,med}$ se va determina întîi mărimea forţei de frecare dintre profilele dinţilor, care se ştie că este de sens contrar vitezei relative $v_{M_2M_1}$ (fig. II.14).

Aceasta se determină cu ajutorul planului vitezelor (fig. II.14, *b* şi II.14, *c*).

Sensul vitezei relative se schimbă în momentul trecerii punctului de angrenare prin polul angrenării P.

Astfel, între S_2 şi P sensul este dat în fig. II.14, *b* şi are ca mărime

$$\overline{v}_{M_2M_1}=k_v(\overline{m_1m_2}).$$

Intre P şi S_1 sensul este dat în fig. II.14, *c* şi are ca mărime

$$\overline{v}_{M'_2M'_1}=k_v(\overline{m'_1m'_2}).$$

Expresia analitică a lui $v_{M_2M_1}$ se află mai repede, dînd întregului mecanism o rotaţie $-\omega_1$. In acest caz roata conducătoare *1* rămîne fixă, iar roata *2* se roteşte cu viteza unghiulară

$$\omega=|\omega_1|+|\omega_2|,$$

rostogolindu-se peste *1* cu sensul de înaintare spre dreapta.

CIR al mişcării este evident P.

Viteza punctului M_2 (punctul M de pe profilul roţii *2*) este dată de relaţia

$$v_{\overline{M_2M_1}}=x(\omega_1+\omega_2)=xv\left(\frac{1}{R_{p_1}}+\frac{1}{R_{p_2}}\right), \qquad (II.58)$$

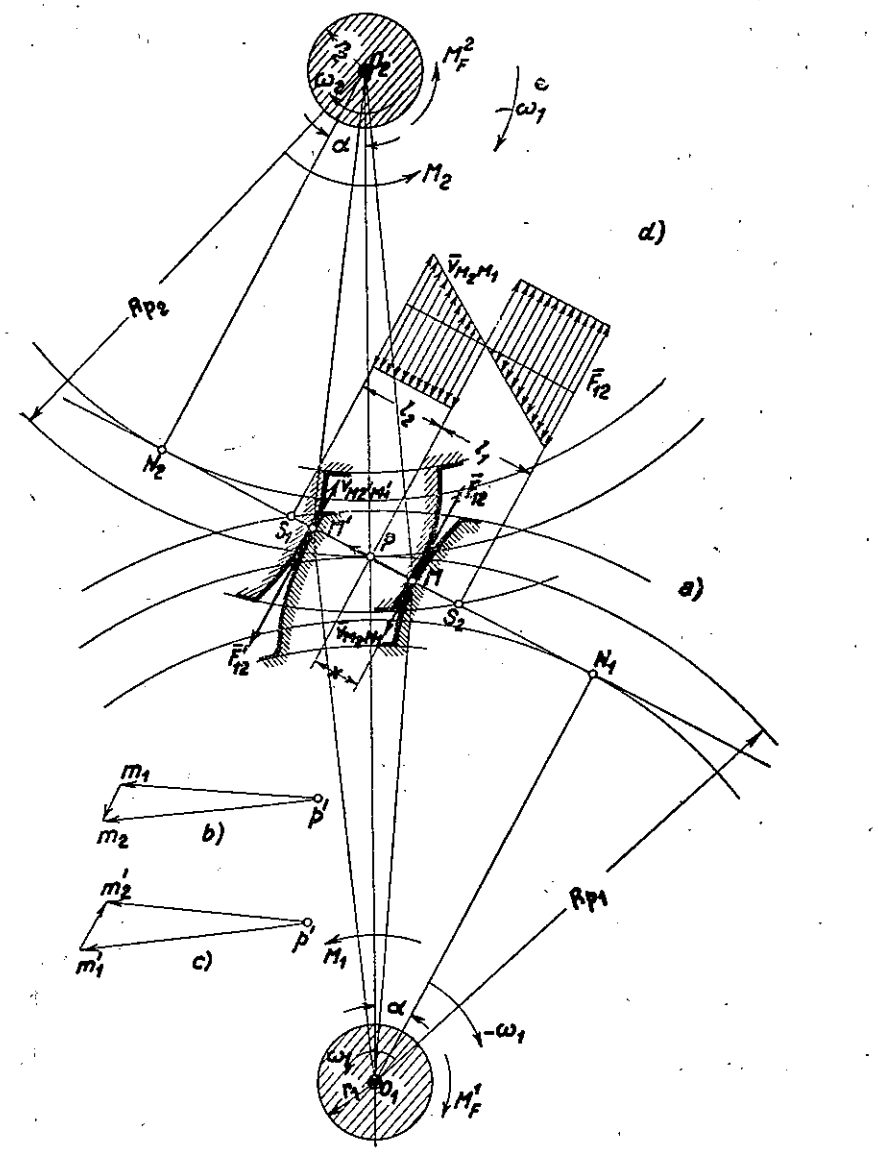


Fig. II.14. Schema cinematică a unui angrenaj cilindric cu profil evolventă (II.14, *a*), poligoanele vitezelor în porţiunea întrării în angrenare (II.14, *b*), ieşirii din angrenare (II.14, *c*) şi variaţia grafică a lui $v_{M_2M_1}$ şi F_0 în timpul angrenării (II. 14, *d*).

în care:

x este raza polară a punctului M_2 şi

$$v=R_{p_1}\omega_1=R_{p_2}\omega_2.$$

Forţa de frecare F_{12} (acţiunea roţii *1* asupra roţii *2*) este dirijată deci ca în fig. II.14, *a*.

Forţa de frecare F_{12} este egală cu

$$F_{12}=\mu N_{12},$$

în care N_{12} este presiunea normală pe dinte, deci după direcţia dreptei de angrenare.

In fig. II.14, *d* este redată variaţia grafică a frecării de alunecare F_{12} şi a vitezei de alunecare $v_{M_2M_1}$ în timpul angrenării celor doi dinţi din S_2 pînă în G.

Pentru simplificare se consideră că în tot timpul angrenării sînt în contact numai o singură pereche de dinţi, adică gradul de acoperire este egal cu unu.

Se notează cu:

M_1 — momentul motor, care acţionează la axul roţii *1*,

M_2 — momentul rezistenţei tehnologice, care acţionează asupra axului roţii *2*.

Aceste momente se află scriind ecuaţiile de echilibru ale fiecărei roţi dinţate în parte sub acţiunea forţelor şi a momentelor.

Scriind expresia momentului în raport cu axa O_2 al tuturor forţelor şi momentelor (exclusiv momentul de frecare din lagăr) care acţionează asupra roţii *2*, se obţine:

$$M_2=N_{21}R_{p_2}\cos\alpha-\mu N_{21}(R_{p_2}\sin\alpha+x),$$

de unde rezultă forţa normală N_{21}:

$$N_{21}=\frac{M_2}{R_{p_2}\cos\alpha-(R_{p_2}\sin\alpha+x)}. \tag{II.59}$$

Din echilibrul roţii motoare *1* se obţine

$$M_1=N_{12}R_{p_1}\cos\alpha-\mu N_{12}(R_{p_1}\sin\alpha-x),$$

de unde rezultă:

$$N_{12}=\frac{M_1}{R_{p_1}\cos\alpha-\mu(R_{p_1}\sin\alpha-x)}. \tag{II.60}$$

Pentru determinarea puterii $P'_{rf\ med}$ se scrie întîi expresia analitică a lucrului mecanic elementar consumat de forţa frecării de alunecare în intervalul de timp dt, adică

$$dW'_{rf}=\mu N_{12}\cdot v_{M_2M_1}\cdot dt. \tag{II.61}$$

De asemenea, se ştie că

$$\frac{dx}{dt}=R_{p_1}\omega_1\cos\alpha=R_{p_2}\omega_2\cos\alpha=v\cos\alpha,$$

deoarece $\frac{dx}{dt}$ este proiecţia pe dreapta de angrenare a vitezei periferice v a cercurilor primitive de raze R_{p_1}, respectiv R_{p_2}.

De aici rezultă

$$dt=\frac{dx}{v\cos\alpha}. \tag{II.62}$$

Inlocuind în (II.61) valorile lui $v_{M_2M_1}$, N_{12} şi dt, date de formulele (II.58), (II.60) şi (II.62), se obţine:

$$dW'_{rf}=\mu M_1\frac{x\cdot v}{R_{p_1}\cos\alpha-\mu(R_{p_1}\sin\alpha-x)}\left(\frac{1}{R_{p_1}}+\frac{1}{R_{p_2}}\right)\frac{dx}{v\cos\alpha}$$

sau

$$dW'_{rf}=\frac{M_1}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{R_{p_1}}+\frac{1}{R_{p_2}}\right)\frac{xdx}{R_{p_1}\cos\alpha-\mu(R_{p_1}\sin\alpha-x)}.$$

Intr-o primă aproximaţie se neglijează termenul $\mu(R_{p_1}\sin\alpha-x)$ de la numitor, deoarece este foarte mic în comparaţie cu $R_{p_1}\cos\alpha$.

In acest caz, expresia lucrului mecanic elementar devine:

$$dW'_{rf}=\frac{M_1}{R_{p_1}\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{R_{p_1}}+\frac{1}{R_{p_2}}\right)xdx. \tag{II.63}$$

Integrînd expresia (II.63) pe cele două porţiuni ale dreptei de angrenare, adică de la 0 la l_1 şi de la 0 la l_2, se obţine lucrul mecanic mediu consumat de forţele frecării de alunecare în timpul angrenării:

$$W'_{rf\ med}=\frac{M_1}{R_{p_1}\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{R_{p_1}}+\frac{1}{R_{p_2}}\right)\left[\int_0^{l_1}xdx+\int_0^{l_2}xdx\right],$$

de unde

$$W'_{rf\ med}=\frac{M_1}{R_{p_1}\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{R_{p_1}}+\frac{1}{R_{p_2}}\right)\frac{l_1^2+l_2^2}{2}. \tag{II.64}$$

Puterea medie de frecare $P'_{rf\ med}$ este evident

$$P'_{rf\ med}=\frac{W'_{rf\ med}}{t}, \tag{II.65}$$

în care t este durata angrenării (din S_2 la S_1).

Timpul t se găseşte integrînd ecuaţia (II.62):

$$t=\int_0^{l_1+l_2}\frac{dx}{v\cos\alpha}=\frac{l_1+l_2}{v\cos\alpha}=\frac{l_1+l_2}{R_{p_1}\omega_1\cos\alpha}.$$

Inlocuind această valoare în (II.65) şi făcînd reducerile, se obţine;

$$P'_{rf\ med}=\frac{\mu M_1\omega_1}{2\cos\alpha}\left(\frac{1}{R_{p_1}}+\frac{1}{R_{p_2}}\right)\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1+l_2};$$

cum

$$M_1\omega_1=P_1;\qquad R_{p_1}=\frac{1}{2}mz_1;\qquad R_{p_2}=\frac{1}{2}mz_2,$$

înlocuind, se obţine:

$$P'_{rf\,med}=\frac{\mu P_1}{a\cos\alpha}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1+l_2}. \qquad \text{(II.66)}$$

Formula (II.66) se poate simplifica dacă se admite

$$l_1=l_2=\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\varepsilon p\cos\alpha, \quad \text{unde} \quad l=S_2S_1,$$

deci

$$l_1+l_2=l=\varepsilon p\cos\alpha,$$

şi atunci

$$l_1^2+l_2^2=\frac{l^2}{2}=\frac{1}{2}\varepsilon^2p^2\cos^2\alpha.$$

Inlocuind în (II.66), se obţine:

$$P'_{rf\,med}=\frac{\mu P_1\pi\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right). \qquad \text{(II.66')}$$

Dacă angrenarea este interioară, formula (II.66') devine

$$P'_{rf\,med}=\frac{\mu P_1\pi\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right); \qquad \text{(II.66'')}$$

sau, scrise într-o singură formulă,

$$P'_{rf\,med}=\frac{\mu P_1\pi\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{z_1}\pm\frac{1}{z_2}\right). \qquad \text{(II.67)}$$

Determinarea puterii $P^{IV}_{rf\,med}$ datorită frecării de rostogolire. Avînd pe N_{12} şi pe f — braţul frecării de rostogolire — momentul frecării de rostogolire se obţine cu formula

$$M^{IV}_{rf}=N_{12}f.$$

Puterea absorbită este

$$P^{IV}_{rf}=M_{rf}(\omega_1+\omega_2)=N_{12}f(\omega_1+\omega_2).$$

Inlocuind mai sus valoarea lui N_{12} dată de formula (II.60), se obţine:

$$P^{IV}_{rf}=\frac{fM_1v}{R_{p_1}\cos\alpha-\mu(R_{p_1}\sin\alpha-x)}\left(\frac{1}{R_{p_1}}+\frac{1}{R_{p_2}}\right).$$

Făcînd şi aici aceeaşi aproximaţie prin neglijarea termenului $\mu(R_{p_1}\sin\alpha-x)$ de la numitor, se obţine puterea $P^{IV}_{rf}=P^{IV}_{rf\,med}$, deoarece în acest caz expresia nu mai depinde de x:

$$P^{IV}_{rf\,med}=\frac{fM_1R_{p_1}\omega_1}{R_{p_1}\cos\alpha}\left(\frac{1}{R_{p_1}}+\frac{1}{R_{p_2}}\right).$$

Reducînd şi punînd $M_1\omega_1=P_1$, rezultă

$$P^{IV}_{rf\,med}=\frac{2fP_1}{m\cos\alpha}\left(\frac{1}{z_1}\pm\frac{1}{z_2}\right), \qquad \text{(II.68)}$$

unde se consideră + pentru angrenarea exterioară
şi − pentru angrenarea interioară.

Randamentul roţilor dinţate se obţine acum prin aplicarea formulei (II.46'), unde $P_1=P_{M\,med}$:

$$\eta=1-\frac{P'_{rf\,med}+P''_{rf\,med}+P'''_{rf\,med}+P^{IV}_{rf\,med}}{P_{M\,med}}.$$

Inlocuind valorile puterilor medii absorbite de frecări şi $P_{M\,med}$, se obţine randamentul total al roţilor dinţate.

Dacă se calculează numai randamentul angrenajului propriuzis, atunci din expresia de mai sus dispar $P''_{rf\,med}$ şi $P'''_{rf\,med}$.

Cu simplificarea de mai sus şi prin înlocuirea lui $P'_{rf\,med}$ şi $P^{IV}_{rf\,med}$ cu valorile date de formulele (II.66) şi (II.68), se obţine:

$$\eta=1-\frac{\mu}{m\cos\alpha}\left(\frac{1}{z_1}\pm\frac{1}{z_2}\right)\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1+l_2}-\frac{2f}{m\cos\alpha}\left(\frac{1}{z_1}\pm\frac{1}{z_2}\right). \qquad \text{(II.69)}$$

Dacă se ia în consideraţie numai frecarea de alunecare, atunci $f=0$, şi formula (II.69) devine

$$\eta=1-\frac{\mu}{m\cos\alpha}\left(\frac{1}{z_1}\pm\frac{1}{z_2}\right)\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1+l_2} \qquad \text{(II.70)}$$

şi, ţinînd seamă de formula (II.67), se găseşte:

$$\eta=1-\frac{\mu\pi\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{z_1}\pm\frac{1}{z_2}\right). \qquad \text{(II.71)}$$

Se precizează că în formulele randamentului roţilor dinţate z_1 este numărul de dinţi al *roţii mici.*

Formula (II.71) se utilizează în calculele aproximative de sinteză a mecanismelor cu roţi dinţate. In practică se folosesc de cele mai multe ori randamentele roţilor dinţate obţinute pe cale experimentală.

Valorile uzuale pentru calcule variază în limitele de mai jos:

— pentru roţi cu dinţi şlefuiţi $\eta=0{,}99$;
— pentru roţi de precizie $\eta=0{,}985\ldots0{,}98$;
— pentru roţi cu prelucrare obişnuită $\eta=0{,}98\ldots0{,}975$;
— pentru roţi cu dinţi înclinaţi $\eta=0{,}975\ldots0{,}97$.

Valorile randamentelor date mai sus sînt determinate fără luarea în consideraţie a frecărilor din lagăre.

La serii de roţi dinţate sau la mecanisme cuplate în paralel şi serie se utilizează formulele (II.52) şi (II.53).

Aici trebuie luată însă în consideraţie şi frecarea din lagăre.

7.2.1. Expresia exactă a randamentului angrenajului cilindric

Expresia randamentului roților dințate cilindrice se poate determina mai exact dacă în expresia lui dW'_{rf} nu se neglijează termenul $\mu(R_{p_1}\sin\alpha - x)$, ci integrala se efectuează ținînd seamă și de acest termen.

In acest caz, dacă se notează cu

$$k = \frac{2M_1}{m\cos\alpha}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)$$

și

$$a = R_{p_1}\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\mu} - \sin\alpha\right),$$

atunci expresia lui dW'_{rf} devine

$$dW'_{rf} = \frac{kxdx}{a+x}.$$

Se face schimbarea de variabilă $\frac{x}{a}=y$, în care caz se obține:

$$dW'_{rf} = ak\frac{y}{1+y}dy = ak(y - y^2 + y^3 - + \ldots)\,dy.$$

Dezvoltarea s-a putut face deoarece

$$y = \frac{x}{a} < 1.$$

După întegrare între limitele $0 - \frac{l_1}{a}$ și $0 - \frac{l_2}{a}$ rezultă:

$$W'_{rf\,med} = ak\left(\frac{l_1^2+l_2^2}{2a^2} - \frac{l_1^3+l_2^3}{3a^3} + \frac{l_1^4+l_2^4}{4a^4}\right).$$

Știind că

$$P'_{rf\,med} = \frac{W'_{rf\,med}}{t},$$

neglijînd pe l_1^3, l_2^3 etc. și înlocuind pe a și k, se obține expresia puterii medii consumate de frecarea de alunecare dintre dinți în timpul angrenării:

$$P'_{rf\,med} = \frac{P_1}{m(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1+l_2}, \qquad \text{(II.72)}$$

iar expresia randamentului, cînd se ține seamă numai de frecarea de alunecare, devine

$$\eta = 1 - \frac{\mu}{m(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1+l_2}. \qquad \text{(II.73)}$$

Considerînd $l_1 \cong l_2 \cong \frac{l}{2} = \frac{\varepsilon p\cos\alpha}{2}$, formula de mai sus devine

$$\eta = 1 - \frac{\mu\pi\varepsilon}{2(1-\mu\operatorname{tg}\alpha)}\left(\frac{1}{z_1}\pm\frac{1}{z_2}\right). \qquad \text{(II.74)}$$

Valoarea randamentului dată de formula de mai sus este mai mică decît cea precedentă, însă această diferență nu este importantă.

Astfel, pentru un angrenaj exterior cu:

$$z_1 = 15;\quad z_2 = 60;\quad \mu = 0{,}2 \text{ (frecare uscată)};\quad \varepsilon = 1{,}5,$$

se obține:

cu formula (II.71):

$$\eta = 1 - \frac{0{,}2\times 3{,}14\times 1{,}5}{2}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{60}\right) = 1 - 0{,}471\times\frac{1}{12} = 1 - 0{,}0384 = 0{,}9616;$$

cu formula (II.74):

$$\eta = 1 - \frac{0{,}2\times 3{,}14\times 1{,}5}{2(1-0{,}2\times 0{,}364)}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{60}\right) = 1 - \frac{0{,}471}{0{,}9272}\times\frac{1}{12} = 1 - \frac{0{,}0384}{0{,}9272} = 1 - 0{,}0414 = 0{,}9586.$$

Eroarea este (la coeficientul $\mu = 0{,}2$) de:

$$\frac{0{,}9616 - 0{,}9586}{0{,}9586}\times 100 = 0{,}31\%,$$ deci foarte mică.

Formula se poate stabili și pentru dinți înclinați.

Astfel, dacă β este unghiul pe care-l face flancul dintelui cu cilindrul primitiv, atunci expresia lui N_{12} din (II.60) devine

$$N_{12} = N_{21} = \frac{M_1}{R_{p_1}\cos\alpha\cos\beta - \mu(R_{p_1}\sin\alpha - x)},$$

iar formula (II.74) devine

$$\eta = 1 - \frac{\mu\pi\varepsilon}{2(\cos\beta - \mu\operatorname{tg}\alpha)}\left(\frac{1}{z_1}\pm\frac{1}{z_2}\right). \qquad \text{(II.75)}$$

In Mașinostroenie (vol. I, partea 2, ediția 1948, p. 294) se recomandă ca formulă pentru calculul randamentului roților cilindrice cu dinți înclinați, în săgeată sau în W, formula:

$$\eta = 1 - \frac{\mu\pi\varepsilon}{(2\ldots 5)\cos\beta}\left(\frac{1}{z_1}\pm\frac{1}{z_2}\right). \qquad \text{(II.76)}$$

In formulă se ia:

coeficientul 2 — pentru roți cilindrice cu dinți drepți, înclinați sau în săgeată;

coeficientul 5 — pentru același fel de roți, însă cu dinții prelucrați și mers încet;

coeficientul 3 — 4 — pentru roți cu mers repede.

Se precizează că la roțile cu dinții corijați coeficientul de pierdere (termenul al doilea din expresia randamentului) crește de 3 pînă la 4 ori.

Puterea consumată de frecarea de rostogolire, dacă nu se neglijează la integrare termenul $\mu(R_{p_1}\sin\alpha - x)$, se deduce ușor după cum rezultă mai jos:

$$dW^{IV}_{rf} = N_{21}f(\omega_1+\omega_2)\,dt = \frac{2M_1 f}{m\cos\alpha\,[R_{p_1}\cos\alpha\cos\beta - \mu(R_{p_1}\sin\alpha - x)]}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)dx;$$

dacă se notează:

$$k_1 = \frac{2M_1 f}{m\mu\cos\alpha}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)$$

şi

$$a = R_{p_1}\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\mu}-\sin\alpha\right),$$

expresia devine:

$$dW_{rf}^{IV} = k_1\frac{dx}{a+x}.$$

Integrată în lungul liniei de angrenare, se obţine (dacă se neglijează termenii l_1^3, l_2^3 etc.):

$$W_{rf}^{IV} = \frac{k_1}{a}\left[l-\frac{l_1^2+l_2^2}{2a}\right];$$

puterea medie, după înlocuirea lui k_1 şi a, devine:

$$P_{rf\,med}^{IV} = \frac{W_{rf}^{IV}}{t} = \frac{2P_1 f}{m(\cos\alpha\cos\beta-\mu\sin\alpha)}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\left(1-\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1+l_2}\right). \qquad (II.77)$$

Admiţînd şi aici că

$$l_1 \cong l_2 \cong \frac{l}{2} = \frac{\varepsilon p\cos\alpha}{2}, \text{ expresia devine:}$$

$$P_{rf\,med}^{IV} = \frac{2P_1 f}{m\cos\alpha(\cos\beta-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\left[1-\frac{\mu\pi\varepsilon}{2z_1(\cos\beta-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}\right], \qquad (II.78)$$

iar randamentul frecării de rostogolire:

$$\eta_r = 1-\frac{2f}{m\cos\alpha(\cos\beta-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\left[1-\frac{\mu\pi\varepsilon}{2z_1\cos\beta-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}\right]. \qquad (II.79)$$

Se vede că expresia randamentului unui angrenaj este destul de complicată, dacă se iau în consideraţie toate pierderile care apar în mecanism.

Erorile care ar rezulta din aproximaţiile ce se fac prin neglijarea anumitor termeni sînt foarte mici şi formulele aproximative recomandate în practică sînt suficiente pentru calculele cinetostatice.

7.3. Randamentul mecanismelor cu şurub

Acest randament a rezultat din calculul făcut în partea I, § 16, cînd s-au stabilit formulele:

$$\eta = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,(\beta+\varphi')}; \qquad (I.124)$$

$$\eta = \frac{\mathrm{tg}\,(\beta-\varphi')}{\mathrm{tg}\,\beta}\ ^{1}). \qquad (I.125)$$

[1]) In aceste formule s-a introdus unghiul β în loc de α, cum este redat în formulele (I.124) şi (I.125) din partea I, pentru a nu se confunda cu unghiul de angrenare α.

Formula (I.124) se aplică în cazul cînd sarcina este ridicată, iar formula (I.125), cînd sarcina coboară.

Aceste formule se aplică şi la calculul aproximativ al randamentului mecanismului melc-roată melcată.

Mai jos se arată deducerea directă a formulei (I.124) la un mecanism melc-roată melcată, cînd melcul este element conducător.

In punctul M (fig. II.15, a) cele două profile sînt în contact. Forţa normală cu care melcul acţionează asupra roţii melcate este N_{12} şi este dirijată după dreapta de angrenare NN.

Forţa de frecare $F_{12}=\mu N_{12}$ între cele două profile în contact este dirijată după tangenta comună TT.

Sensul forţei de frecare F_{12} este invers vitezei relative $v_{M_2M_1}$, determinată în fig. II.15, b.

Asupra roţii melcate acţionează deci forţele N_{12} şi F_{12}.

Se presupune, într-o primă aproximaţie, că angrenarea are loc în momentul cînd punctul M se află pe cercul primitiv al roţii melcate.

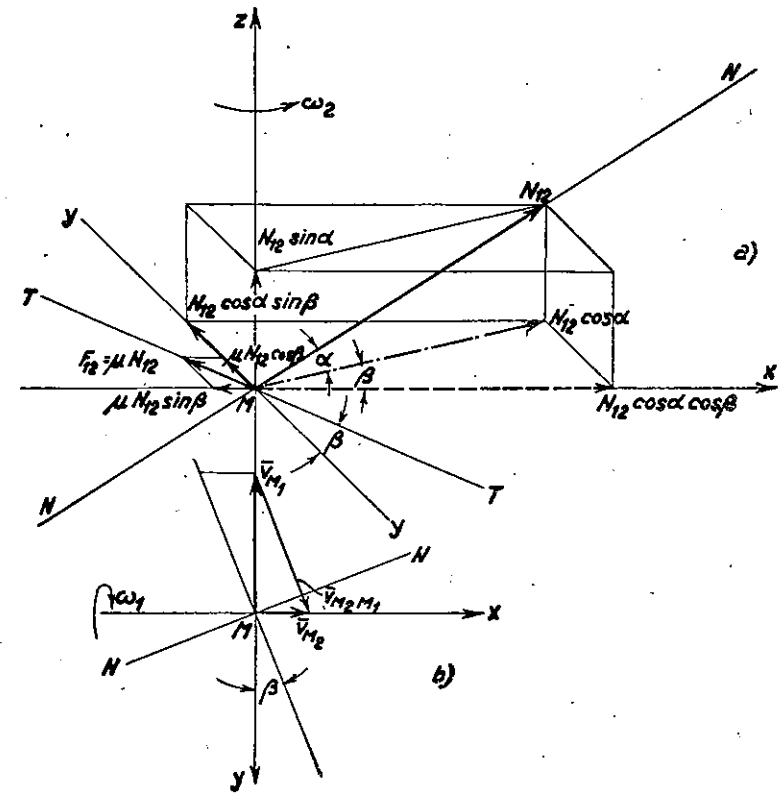


Fig. II.15. Schema forţelor ce acţionează în punctul de angrenare dintre un şurub-melc şi roată melcată (II.15, a) şi poligonul vitezelor (fig. II.15, b).

În această poziţie se calculează componentele după axele xx (direcţia forţei tangenţiale la roata melcată), yy (direcţia forţei tangenţiale motoare la melc) şi zz (direcţia perpendiculară pe cele două axe — ale melcului şi roţii melcate).

Dacă se notează cu:

α — unghiul de angrenare (20°);

β — unghiul de înclinare al elicei generatoare a melcului, se obţine din fig. II.15, *a*.

— Forţa tangenţială la roata melcată *2*:

$$T_x = N_{12}\cos\alpha\cos\beta - \mu N_{12}\sin\beta = N_{12}(\cos\alpha\cos\beta - \mu\sin\beta).$$

— Forţa tangenţială la periferia cercului de rază r_m a melcului:

$$T_y = N_{12}\cos\alpha\sin\beta + \mu N_{12}\cos\beta = N_{12}(\cos\alpha\sin\beta + \mu\cos\beta).$$

— Forţa perpendiculară pe cele două axe ale melcului şi roţii melcate:

$$T_z = N_{12}\sin\alpha.$$

Momentul motor care acţionează asupra axului melcului se poate exprima acum astfel:

$$M_1 = T_y r_m = N_{12} r_m (\cos\alpha\sin\beta + \mu\cos\beta).$$

Momentul care acţionează asupra axului roţii melcate va fi:

$$M_2 = T_x R_{p_2} = N_{12} R_{p_2} (\cos\alpha\cos\beta - \mu\sin\beta).$$

Puterile instantanee ale melcului şi roţii melcate sînt în acest caz:

La axul melcului:

$$P_1 = M_1\omega_1 = N_{12} r_m \omega_1 (\cos\alpha\sin\beta + \mu\cos\beta).$$

La axul roţii melcate:

$$P_2 = M_2\omega_2 = N_{12} R_{p_2}\omega_2 (\cos\alpha\cos\beta - \mu\sin\beta).$$

Raportul acestor două puteri instantanee va da randamentul mecanismului în poziţia considerată, adică

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \mu\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta + \mu\cos\beta} \cdot \frac{R_{p_2}\omega_2}{r_m\omega_1}.$$

Din fig. II.15, *b* rezultă imediat $v_{M_2} = v_{M_1}\operatorname{tg}\beta$, de unde

$$\frac{R_{p_2}\omega_2}{r_m\omega_1} = \operatorname{tg}\beta.$$

Introducînd această valoare în expresia randamentului, scoţînd apoi factor comun atît la numărător cît şi la numitor pe $\cos\alpha$ şi punînd

$$\frac{\mu}{\cos\alpha} = \mu' = \operatorname{tg}\varphi',$$

se obţine:

$$\eta = \frac{\cos\beta - \operatorname{tg}\varphi'\sin\beta}{\sin\beta + \operatorname{tg}\varphi'\cos\beta}\operatorname{tg}\beta.$$

Făcînd calculele mai departe, rezultă:

$$\eta = \frac{\cos\beta\cos\varphi' - \sin\varphi'\sin\beta}{\sin\beta\cos\varphi' + \sin\varphi'\cos\beta}\operatorname{tg}\beta.$$

de unde

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta + \varphi')},$$ deci formula (I.124).

Dacă roata melcată este conducătoare, sensul lui μN_{12} se schimbă şi raportul puterilor se inversează. Formula randamentului capătă astfel valoarea dată de (I.125).

Formulele (I.124) şi (I.125) exprimă astfel valorile aproximative ale randamentului mecanismului melc-roată melcată, deoarece s-a considerat că puterile instantanee P_1 şi P_2 sînt puterile medii în timpul ciclului cinematic al melcului, adică s-a considerat

$$P_1 = P_{M\,med} \quad \text{şi} \quad P_2 = P_{rt\,med},$$

de unde

$$P_{rf\,med} = P_1 - P_2,$$

şi astfel a fost posibilă aplicarea formulei (II.46′).

7.4. Randamentul mecanismelor planetare cu un singur grad de mobilitate

Se va arăta mai jos o metodă aproximativă pentru aflarea randamentelor mecanismelor planetare.

În fig. II.16, *a* s-au notat cu M_1, M_3 şi M_S momentele care acţionează asupra axelor roţilor centrale *1* (conducătoare) şi *3* (fixă) şi asupra braţului portsateliţi S (element condus).

Forţele tangenţiale: la periferia cercurilor primitive ale roţilor centrale (de raze R_{p_1}, R_{p_3}), ale sateliţilor *2* şi *2′* (de raze $R_{p_{2'}}$, şi R_{p_2}) şi la extremitatea braţului S se determină uşor cu ajutorul formulei cunoscute.

În fig. II.16, *b* s-au notat cu sensurile lor forţele tangenţiale care acţionează asupra sateliţilor *2* şi *2′* (T_{12}, T_{S_2} şi $T_{32'}$).

Scriind echilibrul sateliţilor sub acţiunea acestor forţe, se obţine:

— pentru momentul în raport cu O:

$$R_{p_{2'}} T_{32'} = R_{p_2} T_{12},$$

de unde

$$T_{32'} = T_{12}\frac{R_{p_2}}{R_{p_{2'}}};$$ (II.80)

— pentru momentul în raport cu A;

$$(R_{p_2} + R_{p_{2'}})\, T_{12} = R_{p_{2'}}\, T_{S_2},$$

de unde

$$T_{S_2} = \frac{R_{p_2} + R_{p_{2'}}}{R_{p_{2'}}}\, T_{12}.$$ (II.81)

Dacă roata *3* se angrenează exterior cu satelitul *2'*, atunci sensul momentului M_3 se schimbă şi, în consecinţă, şi sensurile lui $T_{32'}$ şi T_{S_2}, astfel că în formula (II.81) apare semnul minus înaintea lui $R_{p_{2'}}$ de la numărător.

Pentru ambele cazuri formula (II.81) devine deci:

$$T_{S_2} = \frac{R_{p_2} \pm R_{p_{2'}}}{R_{p_{2'}}} T_{12}. \qquad \text{(II.81')}$$

Raportul de transmitere i_{13} la un mecanism planetar diferenţial la care s-a imobilizat braţul S (pentru angrenarea interioară dintre *3* şi *2'*) este dat de formula

$$i_{13}^S = \frac{\omega_1 - \omega_S}{\omega_3 - \omega_S} = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}. \qquad \text{(a)}$$

Înlocuind rapoartele numerelor de dinţi cu cele ale razelor primitive, se obţine

$$i_{13}^S = -\frac{R_{p_2} R_{p_3}}{R_{p_1} R_{p_{2'}}} = \frac{\omega_1 - \omega_S}{\omega_3 - \omega_S},$$

şi ţinînd seamă de formula (II.80), rezultă:

$$\frac{\omega_1 - \omega_S}{\omega_3 - \omega_S} = -\frac{R_{p_3}}{R_{p_1}} \frac{T_{32'}}{T_{12}}. \qquad \text{(b)}$$

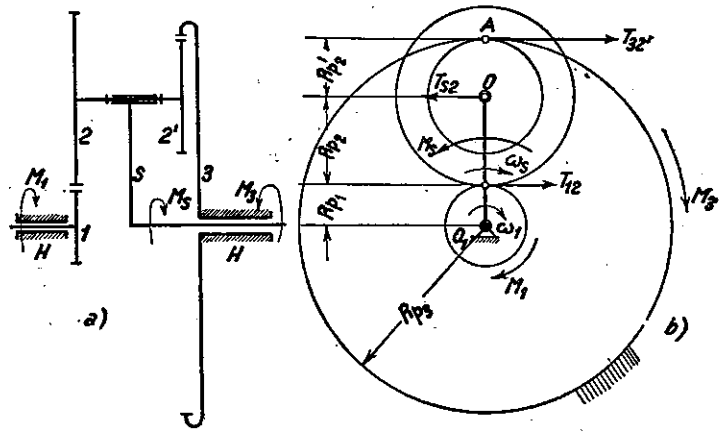


Fig. II.16. Schema unui mecanism planetar cu două roţi centrale (*1* şi *3*), una cu angrenare exterioară (*1*) şi cealaltă interioară (fig. II.16, *a*) şi forţele care acţionează (fig. II.16, *b*).

Ştiind că $R_{p_3} T_{32'} = M_3$, iar $R_{p_1} T_{12} = M_1$, şi făcînd $\omega_3 = 0$ (cazul din problema de faţă), rezultă

$$\underline{M_1(\omega_1 - \omega_S) = M_3 \omega_S} \qquad \text{(II.82)}$$

sau

$$\underline{P_1^S = P_3^S}. \qquad \text{(II.83)}$$

La un mecanism planetar cu un singur grad de mobilitate puterile fiecărei perechi de roţi care se găsesc în angrenare, raportate la braţul portsateliţi S, sînt egale.

În cazul angrenării exterioare a lui *3* cu *2'*, membrul al doilea din relaţiile (II.82) şi (II.83) capătă semnul minus, deoarece în formula (a) de mai sus ultimul membru devine pozitiv la dubla angrenare exterioară a celor doi sateliţi.

Relaţiile se pot scrie deci:

$$M_1(\omega_1 - \omega_3) = \pm M_3 \omega_S; \qquad \text{(II.82')}$$

$$P_1^S = \pm P_3^S; \qquad \text{(II.83')}$$

— pentru angrenare exterioară la roata *3*;
+ pentru angrenare interioară la roata *3*.

Expresiile P_1^S şi P_3^S au fost denumite *puterea angrenajului*. Ea caracterizează pierderile totale posibile în mecanism, acestea fiind considerate proporţionale cu puterea angrenajului.

Randamentul mecanismului se determină în două cazuri, şi anume:

1) *Roata centrală 1 este conducătoare şi braţul S element condus.*

Randamentul are în acest caz expresia:

$$\eta_{1S} = \frac{P_1 - P_f}{P_1}. \qquad \text{(II.84)}$$

P_f, care în acest caz este identic cu $P_{rf\ med}$, se exprimă în funcţie de puterea angrenajului P_1^S şi de coeficientul de pierdere general al întregului angrenaj planetar, adică

$$P_f = |P_1^S| \varphi_E \qquad \text{(II.85)}$$

sau

$$P_f = |P_1^S| \frac{\varphi_S}{1 - \varphi_S}, \qquad \text{(II.86)}$$

în care $\varphi_S = 1 - \eta_S$, iar η_S — randamentul total al angrenajului planetar.

Formula (II.85) se aplică atunci cînd la mecanismul planetar în mişcarea inversă cu viteza unghiulară ω_S dată braţului portsateliţi (deci cînd acesta rămîne imobil), roata *1* rămîne tot conducătoare, adică nu-şi schimbă sensul iniţial (deci $\omega_1 - \omega_S > 0$).

Formula (II.86) se aplică atunci cînd la mişcarea inversă roata *1* devine roata condusă (adică $\omega_1 - \omega_S < 0$).

Dacă însă randamentul general al mecanismului $\eta_S \geqslant 0{,}9$, şi deci $\varphi \leqslant 0{,}1$, se poate folosi cu suficientă precizie în ambele cazuri formula (II.85).

Ţinînd seamă de (II.82'), formula (II.85) devine:

$$P_f = |M_1(\omega_1 - \omega_S)| \varphi_S. \qquad \text{(II.87)}$$

În formulele (II.85) şi (II.87) se iau valorile absolute ale lui P_1^S, deoarece în caz contrar P_f va putea să iasă negativ şi deci η să rezulte mai mare decît unitatea.

2. Braţul S este element conducător. In acest caz, puterea la braţul S este evident:

$$P_S = P_1 + P_f,$$

iar expresia randamentului:

$$\eta_{S1} = \frac{P_1}{P_1 + P_f}, \tag{II.88}$$

în care P_f este dat de formulele (II.85) şi (II.87).

Formulele practice ale randamentului. Expresiile (II.85) şi (II.88) se pot pune sub o formă practic uşor de mînuit dacă se dă o altă formă formulei (II.87).

Astfel,

$$P_f = |M_1(\omega_1 - \omega_S)|\varphi_S = \left| M_1\omega_1 \frac{\omega_1 - \omega_S}{\omega_1} \right| \varphi_S$$

sau

$$P_f = P_1 \left| \left(1 - \frac{\omega_S}{\omega_1}\right) \right| \varphi_S = P_1 |(1 - i_{S1})| \varphi_S, \tag{II.89}$$

unde s-a notat

$$i_{S1} = \frac{\omega_S}{\omega_1}.$$

Inlocuind în (II.85) şi (II.88) şi făcînd calculele, se obţine respectiv:

— pentru cazul cînd roata *1* este conducătoare:

$$\eta_{1S} = 1 - |(1 - i_{S1})| \varphi_S; \tag{II.90}$$

— pentru cazul cînd braţul S este conducător:

$$\eta_{S1} = \frac{1}{1 + |1 - i_{S1}| \varphi_S}. \tag{II.91}$$

Formulele aproximative (II.90) şi (II.91) dau rezultate foarte aproape de cele reale obţinute experimental, cu excepţia cazurilor cînd i_{S1} devine egal cu 1 în formula (II.90), sau ∞ în formula (II.91). De asemenea trebuie observat că puterile angrenajului au fost determinate fără luarea în consideraţie a frecărilor din angrenaj, motiv pentru care aceste metode de determinare a randamentului sînt aproximative.

7.5. Aplicaţii

Aplicaţia 1. Să se calculeze randamentul mecanismului din fig. II.16 la care se dau: $z_1=30$; $z_2=40$; $z_{2'}=20$; $z_3=50$ şi randamentul fiecărei perechi de roţi $\eta=0,95$.

Rezolvare

— Pentru cazul cînd *1* este roată conducătoare:

$$i_{S1} = \frac{1}{i_{1S}} = \frac{1}{1 - i_{13}^S} = \frac{1}{1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}} = \frac{1}{1 + \frac{40 \times 50}{30 \times 20}} = \frac{3}{13}.$$

Randamentul general al mecanismului, în cazul cînd braţul portsateliţi S este fix, rezultă din aplicarea formulei (II.52) a mecanismelor cuplate în serie, deci:

$$\eta_{13} = \eta_{12} \cdot \eta_{2'3} = 0,95 \times 0,95 = 0,9.$$

Coeficientul de pierderi rezultă:

$$\varphi_S = 1 - \eta_{13} = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Inlocuind în formula (II.90) valorile găsite, se obţine:

$$\eta_{1S} = 1 - |(1 - i_{S1})| \varphi_S = 1 - \left(1 - \frac{3}{13}\right) \times 0,1 = 0,923.$$

— Pentru cazul cînd braţul S este un element conducător, valorile obţinute se introduc în formula (II.91) şi se obţine:

$$\eta_{S1} = \frac{1}{1 + |(1 - i_{S1})| \varphi_S} = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{3}{13}\right) \times 0,1} = 0,928.$$

Aplicaţia 2. Să se calculeze randamentul mecanismului planetar din fig. II.17. Numărul de dinţi ai fiecărei roţi este:

$$z_{2'} = 20;\ z_3 = 30;\ z_{3'} = 20 \text{ şi } z_4 = 50.$$

Randamentul fiecărei perechi de roţi se dă $\eta=0,95$.

Raportul de transmitere de la braţul portsateliţi S la roata centrală *2'* se obţine din relaţiile de mai jos:

$$i_{S2'} = \frac{1}{i_{2'S}} = \frac{1}{1 - i_{2'4}^S} =$$

$$= \frac{1}{1 - (-1)^2 \frac{z_3 z_4}{z_{2'} z_{3'}}} = \frac{1}{1 - \frac{30 \times 50}{20 \times 20}} = -\frac{4}{11}.$$

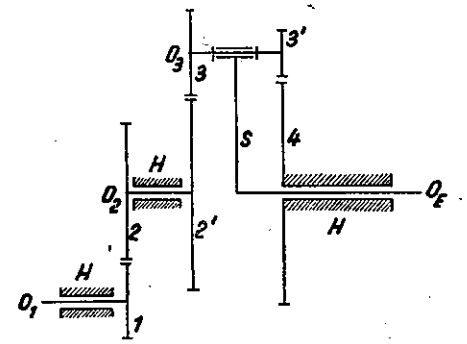


Fig. II.17. Schema unui mecanism planetar cu două roţi centrale şi angrenare exterioară la sateliţi.

Randamentul întregului reductor, considerînd roata *1* conducătoare va fi:

$$\eta_{1S} = \eta_{12} \cdot \eta_{2'S} = \eta_{12}[1 - |(1 - i_{S2'})| \varphi_S] =$$

$$= 0,95\left[1 - \left(1 + \frac{4}{11}\right) \times 0,1\right] =$$

$$= 0,95 \times \frac{9,5}{11} = 0,820.$$

Dacă braţul S este element conducător, atunci, înlocuind în formula

$$\eta_{S1} = \eta_{S2} \cdot \eta_{21} \quad \text{valoarea lui} \quad \eta_{S2} \quad \text{din (II.91)},$$

se obţine:

$$\eta_{S1} = \frac{\eta_{21}}{1 + |(1 - i_{S2})| \varphi_S} = \frac{0,95}{1 + \left(1 + \frac{4}{11}\right) \times 0,1} = \frac{11 \times 0,95}{12,5} = 0,836.$$

7.6. Randamentul mecanismelor planetare diferenţiale (cu mai multe grade de mobilitate)

Randamentul acestor mecanisme se determină atunci cînd este folosit pentru transmiterea de puteri.

Pentru aflarea formulelor randamentelor se va lua exemplul din fig. II.16, în care roata centrală *3* este mobilă, adică un mecanism cu două grade de mobilitate.

Se deosebesc două cazuri:

a) cînd braţul S şi una dintre roţile centrale sînt elemente conducătoare;

b) cînd cele două roţi centrale *1* şi *3* sînt conducătoare, iar braţul S este element condus.

In ambele cazuri se va lua în consideraţie şi frecarea din angrenaje.

Din formulele (a) şi (b) de la § 7.4 rezultă imediat

$$-\frac{R_{p_3}}{R_{p_1}}\frac{T_{32'}}{T_{12}}=i_{13}^{S},$$

sau, ţinînd seamă că $R_{p_3}T_{32'}=M_3$, şi $R_{p_1}T_{12}=M_1$, se obţine

$$M_3=-M_1 i_{13}^{S}. \qquad \text{(II.92)}$$

In cazul cînd se ia în consideraţie şi frecarea dintre profilele dinţilor, formula (II.92) devine evident:

$$M_3=-M_1 i_{13}^{S}\eta_{13}^{x}. \qquad \text{(II.93)}$$

Exponentul x al randamentului η_{13} este $+1$ sau -1, după cum roata centrală *1* asupra căreia acţionează momentul M_1 devine conducătoare sau condusă, atunci cînd se dă întregului mecanism o mişcare cu viteza unghiulară $-\omega_S$, adică atunci cînd braţul portsateliţi S este imobil.

Acest fenomen se poate constata astfel:

— dacă în urma mişcării $-\omega_S$ dată întregului mecanism mişcarea roţii centrale *1* îşi schimbă sensul iniţial pe care l-a avut ca roată conducătoare, roata centrală *1* devine roată condusă în mecanismul inversat şi deci în formula (II.93) $x=-1$;

— dacă în urma mişcării $-\omega_S$ dată întregului mecanism viteza unghiulară a roţii centrale *1* nu-şi schimbă sensul, aceasta rămîne roată conducătoare şi în mecanismul inversat şi deci în formula (II.93) $x=+1$.

Matematic cele arătate mai sus se pot sistematiza în raportul de mai jos:

$$\nu=\frac{\omega_1-\omega_S}{\omega_1}=\frac{\frac{\omega_1}{\omega_S}-1}{\frac{\omega_1}{\omega_S}}=\frac{i_{1S}-1}{i_{1S}}\gtrless 0. \qquad \text{(a)}$$

a) Dacă roata centrala *1* este roată conducătoare, atunci din raportul

$$\nu=\frac{i_{1S}-1}{i_{1S}}$$

se deduce că atunci cînd

$$0<i_{1S}<1,$$

se obţine $\nu<0$ şi $\omega_1<\omega_S$, deci $x=-1$, deoarece roata centrală *1* devine roată condusă în mecanismul inversat.

— Dacă însă

$$0>i_{1S}>1,$$

atunci $\nu>0$ şi $\omega_1>\omega_S$, deci $x=+1$, deoarece roata centrală *1* rămîne *roată conducătoare* şi în mecanismul inversat.

b) Dacă braţul portsateliţi S este element conducător, atunci din raportul

$$\nu=\frac{i_{1S}-1}{i_{1S}}$$

se deduce atunci cînd

$$0<i_{1S}<1,$$

se obţine $\nu<0$ şi $\omega_S>\omega_1$, deci $x=+1$, deoarece în acest caz roata centrală *1* devine *roată conducătoare* în mecanismul inversat, iar dacă

$$0>i_{1S}>1,$$

atunci ω_1 şi $\omega_S<\omega_1$, deci $x=-1$, deoarece roata centrală *1*, rămîne tot *roată condusă* în mecanismul inversat.

Semnul lui x se poate concretiza în tabela II.2.

Tabela II.2

Valorile lui i_{1S}	Valoarea lui x	
	Felul roţii centrale *1*	
	conducătoare	condusă
$0<i_{1S}<1$	−	+
$0>i_{1S}>1$	+	−

După precizarea semnului lui x din formula (II.93) se poate trece acum la determinarea randamentului mecanismului planetar diferenţial.

Pentru aceasta se scrie ecuaţia de echilibru a întregului mecanism:

$$M_1+M_3+M_S=0. \qquad \text{(II.94)}$$

a) Dacă M_3 şi M_S sînt momente motoare iar M_1 este momentul rezistent la roata condusă *1*, expresia randamentului mecanismului $\eta_{3S\,(1)}$ se poate scrie conform formulei (II.46′) şi ţinînd seamă de semne:

$$\eta_{3S\,(1)}=\frac{-M_1\omega_1}{M_3\omega_3+M_S\omega_S}. \qquad \text{(II.95)}$$

Inlocuind valorile lui M_3 şi M_S din formulele (II.93), respectiv (II.94), şi făcînd calculele, se obţine:

$$\eta_{3S\,(1)}=\frac{1}{i_{13}^{S}\eta_{13}^{x}\frac{\omega_3}{\omega_1}+\left(1-i_{13}^{S}\eta_{13}^{x}\right)\frac{\omega_S}{\omega_1}}. \qquad \text{(II.96)}$$

b) Dacă braţul portsateliţi S este element condus, expresia randamentului se poate scrie ţinînd de asemenea seamă de semne:

$$\eta_{13\,(S)}=-\frac{M_S\omega_S}{M_1\omega_1+M_3\omega_3}. \qquad \text{(II.97)}$$

Inlocuind şi aici valorile lui M_3 şi M_S din formulele (II.93), respectiv (II.94), şi făcînd calculele, se obţine:

$$\eta_{13(S)}=\frac{1-\eta_{13}^{x}i_{13}^{S}}{\frac{\omega_1}{\omega_S}-\eta_{13}^{x}i_{13}^{S}\frac{\omega_3}{\omega_S}}. \tag{II.98}$$

Formulele (II.96) şi (II.98) permit determinarea randamentului oricărui mecanism planetar diferenţial cu două grade de mobilitate.

Dacă în formula (II.98) se face $\omega_3=0$, se obţine expresia randamentului unui mecanism planetar cu un singur grad de mobilitate la care braţul portsateliţi S este elementul condus:

$$\eta_{1S}=\frac{1-\eta_{13}^{x}i_{13}^{S}}{\frac{\omega_1}{\omega_S}}.$$

sau

$$\eta_{1S}=\frac{1-\eta_{13}^{x}i_{13}^{S}}{i_{1S}}. \tag{II.99}$$

Ştiind că $i_{1S}=1-i_{13}^{S}$, formula de mai sus devine:

$$\eta_{1S}=\frac{1-(1-i_{1S})\,\eta_{13}^{x}}{i_{1S}}; \tag{II.99'}$$

se vede că între formulele (II.90) şi (II.99') există o diferenţă structurală.

Dacă în formula (II.96) se face $\omega_3=0$ şi ţinînd seamă că $i_{1S}=1-i_{13}^{S}$, se obţine:

$$\eta_{S1}=\frac{i_{1S}}{1-(1-i_{1S})\,\eta_{13}^{x}}. \tag{II.100}$$

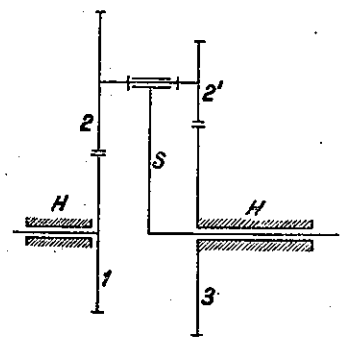


Fig. II.18. Schema mecanismului planetar diferenţial cu două roţi centrale şi angrenări exterioare şi un grad de mobilitate.

Formula (II.100) reprezintă expresia exactă a randamentului unui mecanism planetar cînd braţul portsateliţi S este elementul conducător.

7.7. Aplicaţii

Aplicaţia 3. Să se determine randamentul mecanismului planetar din fig. II.18 în următoarele cazuri:

a) roata centrală *1* este element conducător;

b) braţul portsateliţi S este element conducător.

Se dau:

Randamentul angrenajului în serie *12—2'3* cînd braţul S este fix şi deci roata *3* mobilă (în mecanismul inversat) este $\eta_{13}=0{,}9$.

Numărul de dinţi ai roţilor:

$$z_1=20;\quad z_2=22;\quad z_{2'}=20;\quad z_3=18.$$

Soluţie. Cazul a). Roata centrală *1* este element conducător.

Valoarea randamentului se obţine prin aplicarea formulei (II.99'):

$$\eta_{1S}=\frac{1-(1-i_{1S})\,\eta_{13}^{x}}{i_{1S}}. \tag{II.99'}$$

Se calculează i_{1S}:

$$i_{1S}=1-i_{13}^{S}=1-\frac{z_2z_3}{z_1z_{2'}}=1-\frac{22\times18}{20\times20}=\frac{1}{100};$$

$$i_{1S}=0{,}01.$$

Deoarece $0<i_{1S}<1$, din tabela II.2 rezultă că

$$x=-1.$$

Randamentul este deci:

$$\eta_{1S}=\frac{1-(1-0{,}01)\,0{,}9^{-1}}{0{,}01}=-10.$$

Valoarea negativă a randamentului arată că mecanismul planetar din fig. II.18 nu poate funcţiona cu roata centrală *1* ca element conducător, deoarece se autofrînează.

Cazul b). Braţul portsateliţi S este element conducător.

In acest caz formula randamentului este dată de (II.100), iar din tabela II.2 rezultă că $x=+1$, deci formula (II.100) devine:

$$\eta_{S1}=\frac{i_{1S}}{1-(1-i_{1S})\,\eta_{13}}=\frac{0{,}01}{1-(1-0{,}01)\,0{,}9}=0{,}091.$$

In concluzie, cînd în angrenajul planetar din fig. II.18 braţul portsateliţi S este element conducător, randamentul mecanismului este $\eta=9\%$, adică 91% din puterea motoare este consumată de rezistenţele de frecare.

Dacă

$$z_1'=100;\quad z_2=99;\quad z_{2'}=100;\quad z_3=101,$$

atunci

$$i_{1S}=1-i_{13}^{S}=1-\frac{100^2-1}{100^2}=\frac{1}{10\,000},$$

adică

$$0<i_{1S}<1,\quad \text{deci}\quad x=+1$$

şi

$$\eta_{S1}=0{,}005,\quad \text{adică}\quad \eta_{S1}=0{,}5\%_{00}.$$

Rezultă deci că, cu cît raportul de transmitere η_{1S} este mai mic, cu atît şi randamentul este mai mic.

Astfel de mecanisme nu sînt utilizate pentru transmiterea de puteri, ci pentru scopuri cinematice (divizor etc.).

Aplicaţia 4. Să se determine randamentul mecanismului planetar din fig. II.16 cu aceleaşi date din aplicaţia 2.

— Cazul cînd roata centrală *1* este conducătoare.

Expresia randamentului este dată de formula (II.99').

Valoarea lui i_{1S} este

$$i_{1S}=1-i_{13}^{S}=1-(-1)\,\frac{z_2z_3}{z_1z_{2'}}=1+\frac{40\times50}{30\times20}=\frac{13}{3}.$$

Deoarece

$$i_{1S}>1,$$

din tabela II.2 rezultă că $x=+1$, deci expresia randamentului devine

$$\eta_{1S}=\frac{1-(1-i_{1S})\,\eta_{13}}{i_{1S}},$$

sau, înlocuind, se obţine

$$\eta_{1S}=\frac{1-\left(1-\frac{13}{3}\right)0{,}9}{\frac{13}{3}}=0{,}923.$$

— In cazul cînd braţul S este element conducător, expresia randamentului este dată de formula (II.100).

Pentru braţul S element conducător (deci roata centrală 1 condusă) rezultă $x=-1$. Valoarea randamentului este în acest caz

$$\eta_{S1}=\frac{i_{1S}}{1-(1-i_{1S})\,\eta_{13}^{-1}}=\frac{\frac{13}{3}}{1-\left(1-\frac{13}{3}\right)\times\frac{1}{0{,}9}}=0{,}929.$$

Se constată că între rezultatele de la aplicaţia 2 din § 7.5 şi cele de la aplicaţia de faţă există o diferenţă de 0,1% în cazul cînd braţul S este element conducător şi nici o diferenţă cînd acesta este element condus.

7.8. Randamentul mecanismelor cu came

La capitolul frecării s-a determinat relaţia (I.129) dintre forţa $\mathfrak{Q}$ care ridică tachetul şi reacţiunea T a arcului în cazul limită, cînd contactul dintre ghidaj şi tija tachetului are loc în cele două puncte extreme A şi B (§ 3.5) şi nu există frecare între tachet şi camă.

In cazul existenţei şi a acestei frecări, în formula (I.129) în loc de δ se va pune $\delta+\varphi_{12}$ formula devine:

$$\mathfrak{Q}=\frac{T\cos\varphi'}{\cos(\delta+\varphi_{12}+\varphi')}. \qquad \text{(II.101)}$$

Poziţia forţei $\mathfrak{Q}$ faţă de axa geometrică a tijei tachetului se modifică atunci cînd nu se ia în consideraţie frecarea dintre tijă şi ghidaj şi nici dintre vîrful tachetului şi camă.

In fig. II.19 sînt redate poziţiile lui $\mathfrak{Q}$ şi $\mathfrak{Q}_0$.

Evident că, în cazul lipsei frecării, relaţia dintre $\mathfrak{Q}_0$ şi T se deduce imediat din ecuaţia de proiecţii pe direcţia axei tachetului:

$$\mathfrak{Q}_0=\frac{T}{\cos\delta}. \qquad \text{(II.102)}$$

Momentul motor care acţionează asupra tachetului 2 este dat de expresia evidentă care rezultă din fig. II.19:

$$M_1=\mathfrak{Q}h=\mathfrak{Q}(b-x)\sin(\delta+\varphi_{12}). \qquad \text{(II.103)}$$

In lipsa frecării, acest moment devine

$$M_{10}=\mathfrak{Q}_0h_0=\mathfrak{Q}_0(b-x)\sin\delta. \qquad \text{(II.104)}$$

Expresia randamentului mecanismului cu came este evident:

$$\eta=\frac{M_{10}}{M_1}=\frac{\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{Q}}\,\frac{\sin\delta}{\sin(\delta+\varphi_{12})}. \qquad \text{(II.105)}$$

Inlocuind în expresia de mai sus valorile lui $\mathfrak{Q}$ şi $\mathfrak{Q}_0$ din (II.101), respectiv (II.102), şi făcînd calculele, se obţine:

$$\eta=\frac{\cos(\delta+\varphi_{12}+\varphi')}{\cos\varphi'\sin(\delta+\varphi_{12})}\operatorname{tg}\delta. \qquad \text{(II.106)}$$

Dezvoltînd:

$$\cos(\delta+\varphi_{12}+\varphi')=$$
$$=\cos(\delta+\varphi_{12})\cos\varphi'-\sin(\delta+$$
$$+\varphi_{12})\sin\varphi'$$

şi înlocuind, se obţine expresia randamentului:

$$\eta=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}(\delta+\varphi_{12})}-\operatorname{tg}\varphi'\operatorname{tg}\delta. \qquad \text{(II.107)}$$

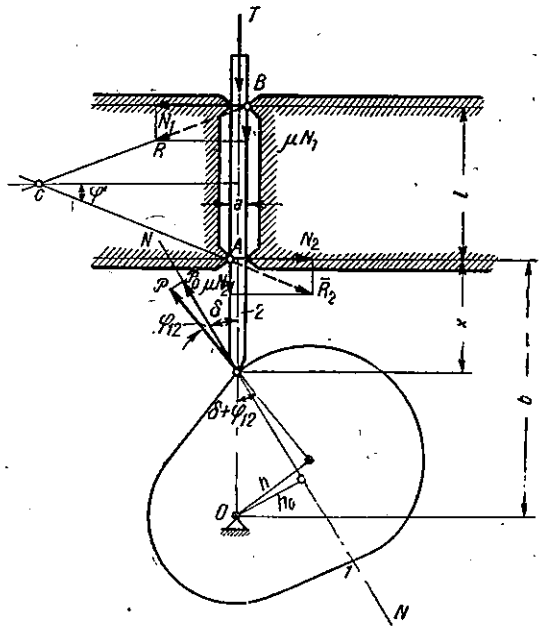


Fig. II.19. Schema mecanismului cu camă cu tachet cu vîrf şi cu direcţiile forţelor motoare $\mathfrak{Q}$ şi $\mathfrak{Q}_0$, corespunzătoare existenţei respectiv lipsei frecării între tachet şi camă.

Randamentul unui astfel de mecanism dat de formula (II.107) variază atît în funcţie de unghiul de presiune δ, cît şi de unghiul de frecare redus φ'.

In fig. II.20 sînt redate (după Kojevnikov) diferitele curbe de variaţie ale randamentului η pentru diferite valori ale lui δ şi φ'.

Astfel, un prim fascicul de curbe dă valoarea lui η pentru $\delta=5°$, $10°$, $15°$, $20°$, $30°$, $40°$, $50°$. $60°$ şi $70°$. Pentru fiecare dintre aceste valori se trasează curba de variaţie a lui η în funcţie de variabila φ'. Pentru uniformitatea citirilor abscisa s-a notat cu $\frac{\pi}{2}-\varphi'$ pentru cazul cînd se citesc valorile randamentelor la $\delta=$ constant.

Astfel, pentru $\varphi'=0$, corespunde pe abscisă $\frac{\pi}{2}-0=90°$ şi pe curba corespunzătoare lui $\delta=5°$ se citeşte $\eta=0{,}5$, pe curba $\delta=10°$ se citeşte $\eta=0{,}65$ etc.

Aceleaşi valori se găsesc şi pentru celălalt fascicul de curbe în care sînt calculate randamentele mecanismului pentru 11 valori ale lui φ' corespunzătoare lui: $\varphi'=0°$, $10°$, $15°$, $20°$, $30°$, $40°$, $50°$, $60°$, $70°$, $80°$ şi $90°$.

Pe abscisă se măsoară în acest caz unghiul de presiune δ.

Astfel, pentru curba corespunzătoare lui $\varphi'=0$ (curba cea mai superioară), pentru $\delta=10°$ luat pe abscisă se găseşte $\eta=0{,}65$, adică la fel ca şi în primul caz.

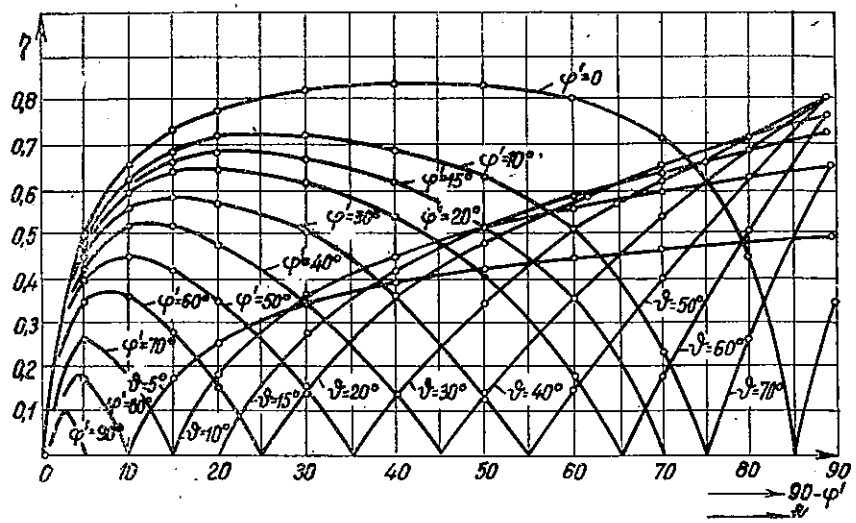


Fig. II.20. Curbele de variaţie ale randamentului η al unui mecanism cu came pentru diferite valori ale unghiului de presiune δ şi unghiului de frecare redus φ'.

Diagrama permite o rapidă apreciere a domeniului de utilizare a unui mecanism cu came şi dă indicaţii preţioase în proiectare.

7.9. Randamentul mecanismelor liniare şi condiţiile de nereversibilitate

1. *In tehnică există un foarte mare număr de mecanisme destinate transmiterii puterii.* Cea mai importantă problemă care trebuie rezolvată pentru această categorie de mecanisme (angrenaje, scripeţi diferenţiali, cricurile cu şurub, mecanism şurub-melc-roată melcată etc.) este determinarea posibilităţii de comparaţie a randamentelor diferitelor categorii pentru diferite rapoarte de transmitere.

Astfel, dacă se cunoaşte randamentul unui astfel de mecanism (de exemplu un mecanism şurub-melc-roată melcată), să fie posibilă calcularea randamentelor mecanismelor similare pentru diferite rapoarte de transmitere şi să se găsească în acelaşi timp raportul minim de transmitere pentru nereversibilitate, precum şi calculul randamentului în mişcare directă în acest caz limită.

2. *Pentru aceasta se va conveni să se dea denumirea de mecanism liniar mecanismului în care pierderile de putere datorite frecării sînt proporţionale atît cu viteza sau viteza unghiulară a elementului conducător (sau iniţial) cît şi cu o funcţie liniară de puterile datorite forţelor exterioare (motoare şi rezistenţă tehnologică).*

Astfel, toate angrenajele sînt mecanisme liniare, deoarece atît frecările din lagăre (cuplele de rotaţie), cît şi frecările din angrenajul propriu-zis [formulele (II.67) şi (II.68) de la § 7.2] satisfac definiţia de mai sus. La fel şurubul-melc-roată melcată, ghidajul înclinat, scripeţii diferenţiali, mecanismele planetare, cricurile cu şurub.

Pentru determinarea expresiei generale a randamentului se va lua un mecanism de transmisie (de exemplu un angrenaj cilindric) la care se va nota:

M_M — momentul motor (constant în timpul ciclului energietic) la arborele motor;

M_{rt} — momentul rezistenţei tehnologice la arborele condus, de asemenea constant în timpul ciclului energietic;

ω_1 — viteza unghiulară a arborelui motor;

ω_2 — viteza unghiulară a arborelui condus;

$M_M\omega_1$ — puterea medie la arborele motor;

$M_{rt}\omega_2$ — puterea medie la arborele condus;

$k_1\omega_1\ (M_M + k_2 M_{rt})$ — puterea medie a frecărilor absorbite de mecanism;

$i=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ — raportul de transmitere.

$\frac{M_{rt}}{i}$ — momentul rezistenţei tehnologice redus la arborele motor.

Cu aceste notaţii se poate acum scrie pentru mişcarea directă (fluxul de energie merge de la arborele motor la cel condus):

$$M_M\omega_1 - M_{rt}\omega_2 = k_1\omega_1\,(M_M + k_2 M_{rt}) \qquad \text{(II.108)}$$

sau

$$M_M\omega_1 - \frac{M_{rt}}{i}\,\omega_1 = k_1\omega_1\,(M_M + k_2 M_{rt}). \qquad \text{(II.108')}$$

Din formula de mai sus rezultă expresia randamentului pentru mişcarea directă η_d:

$$\eta_d = \frac{M_{rt}\omega_2}{M_M\omega_1} = \frac{M_{rt}}{iM_M} = \frac{1-k_1}{1+k_1k_2\,i}. \qquad \text{(II.109)}$$

Pentru mişcarea inversă (fluxul de energie de la arborele condus către cel motor) se pot scrie:

$$\frac{M_{rt}}{i}\,\omega_1 - M_M\omega_1 = k_1\omega_1\,(M_M + k_2 M_{rt}), \qquad \text{(II.110)}$$

de unde rezultă randamentul pentru mişcarea inversă η_i.

$$\eta_i = \frac{iM_M}{M_{rt}} = \frac{1-k_1k_2\,i}{1+k_1}. \qquad \text{(II.111)}$$

3. *Se vor numi mecanisme simetrice acele mecanisme la care, pentru* $i=1$, *randamentele în mişcarea directă şi inversă sînt egale.* Astfel de mecanisme cuprind toate angrenajele, pîrghiile simple, şurubul şi piuliţa.

Din formulele (II.109) şi (II.111), pentru $i=1$, rezultă că la astfel de mecanisme:

$$\eta_d=\eta_i=\frac{1-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{1-k_1k_2}{1+k_1},$$

de unde

$$k_2=+1.$$

(Valoarea -1 care rezultă din rezolvare nu poate fi luată în consideraţie, deoarece duce la concluzia că $\eta_d=\eta_i=1$, deci lipsa frecărilor).

O formulă convenabilă pentru k_2 poate fi

$$k_2=i^{n-1}, \tag{II.112}$$

unde $n=0$; 1 şi 2, primele două valori corespunzînd — după cum se va vedea — mecanismelor obişnuite.

In acest caz $k_2i=i^n$ şi formulele (II.109) şi (II.111) devin:

$$\eta_d=\frac{1-k_1}{1+k_1i^n}; \tag{II.113}$$

$$\eta_i=\frac{1-k_1i^n}{1+k_1}. \tag{II.114}$$

Dacă acum se elimină k_1 din formulele de mai sus, se obţine:

$$\frac{1-\eta_i}{i^n+\eta_i}=\frac{1-\eta_d}{1+\eta_di^n} \tag{II.115}$$

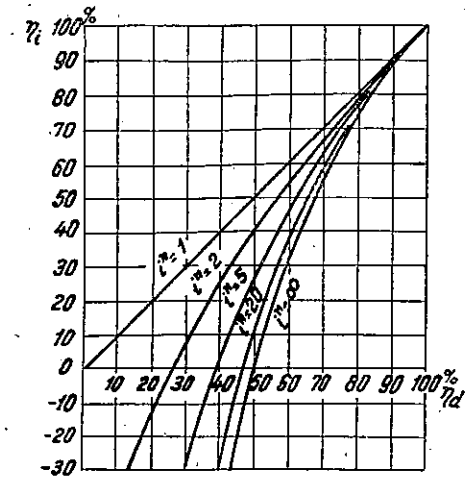


Fig. II.21. Relaţia între randamentul direct η_d şi invers η_i la mecanismele liniare.

sau, calculînd pe η_i:

$$\eta_i=\frac{i^n(2\eta_d-1)+1}{\eta_d(i^n-1)+2}. \tag{II.116}$$

Expresia (II.115) se poate pune şi sub forma

$$\frac{1}{1-\eta_d}-\frac{1}{1-\eta_i}=\frac{i^n-1}{i^n+1}. \tag{II.117}$$

Formula (II.116) permite reprezentarea pe o diagramă a curbelor de variaţie ale lui η_i în funcţie de η_d şi pentru diferite valori ale lui i^n.

In fig. (II.21) sînt date curbele pentru $i_n=1,2,5,20$ şi ∞.

Valorile negative pentru η_i arată că puterea absorbită de frecare este mai mare decît puterea introdusă în mecanism.

4. *Aplicaţii la mecanisme particulare* se pot face dacă determinăm pentru fiecare caz în parte valoarea coeficienţilor k_1 şi i^n. Acest lucru se realizează prin identificarea formulelor (II.113) şi (II.114) cu cele calculate pentru mecanismul respectiv.

Astfel, pentru ghidajul înclinat s-au determinat la § 16.2 din partea I formulele:

Pentru mişcarea directă:

$$\mathfrak{S}=G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta+\varphi)}. \tag{I.114}$$

Pentru mişcarea inversă:

$$\mathfrak{S}'=G\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}. \tag{I.115}$$

Expresiile celor două randamente vor fi deci:

— pentru mişcarea directă:

$$\eta_d=\frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}}=\frac{\sin\alpha\sin(\beta+\varphi)}{\sin\beta\sin(\alpha+\varphi)}=\frac{1+\mu\operatorname{ctg}\beta}{1+\mu\operatorname{ctg}\alpha}; \tag{II.118}$$

— pentru mişcarea inversă:

$$\eta_i=\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}_0'}=\frac{\sin\beta\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha\sin(\beta-\varphi)}=\frac{1-\mu\operatorname{ctg}\alpha}{1-\mu\operatorname{ctg}\beta}. \tag{II.119}$$

Din comparaţia lor cu (II.113) şi (II.114), rezultă:

$$k_1=-\mu\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\mu}{\operatorname{tg}\beta}; \tag{II.120}$$

$$i^n=-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}=-\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{II.121}$$

Valoarea raportului de transmitere i, în cazul de faţă, este dată de raportul dintre deplasarea ds_1 a forţei motoare $\mathfrak{S}$ pe direcţia ei de acţiune şi deplasare ds_2 pe verticală a greutăţii G.

Intre aceste două deplasări elementare există relaţia evidentă

$$\frac{ds_1}{\sin\beta}=\frac{ds_2}{\sin\alpha}$$

sau

$$\frac{v_1}{\sin\beta}=\frac{v_2}{\sin\alpha},$$

de unde:

$$i=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{II.122}$$

Dacă forţa $\mathfrak{S}$ este orizontală $\left(\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, formulele de mai sus devin:

— pentru mişcarea directă:

$$\eta_d=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}=\frac{1-\mu\operatorname{tg}\alpha}{1+\mu\operatorname{ctg}\alpha}; \tag{II.123}$$

— pentru mişcarea inversă:

$$\eta_i=\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\mu\operatorname{ctg}\alpha}{1+\mu\operatorname{tg}\alpha}, \tag{II.124}$$

iar coeficienţii:

$$k_1=\mu \operatorname{tg}\alpha, \tag{II.125}$$

$$i^n=\operatorname{ctg}^2\alpha, \tag{II.126}$$

$$i=\operatorname{ctg}\alpha. \tag{II.127}$$

De aici rezultă imediat

$$n=2.$$

Curbele din fig. II.21 permit să se afle valorile randamentului η_i al mişcării inverse a pietrei de culisă pe ghidajul înclinat pentru diferite valori ale lui $i^n=\operatorname{ctg}^2\alpha$.

De exemplu, pentru $\operatorname{ctg}^2\alpha=2$; $\alpha=35°20'$ şi $\eta_d=0{,}25$; $\eta_i=0$, de unde rezultă valoarea coeficientului de frecare μ pentru ca piatra să nu alunece:

$$\eta_d=0{,}25=\frac{1-\frac{1}{1{,}41}\mu}{-1+1{,}41\,\mu}, \text{ deci}$$

$\mu=0{,}7089$; $\varphi=35°20'$, ceea ce era de aşteptat.

La mecanismele cu şurub randamentele în cele două cazuri sînt:

— la mişcarea directă:

$$\eta_d=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\beta+\varphi')}=\frac{1-\mu'\operatorname{tg}\beta}{1+\mu'\operatorname{ctg}\beta}; \tag{II.128}$$

— la mişcarea inversă:

$$\eta_i=\frac{\operatorname{tg}(\beta-\varphi')}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{1-\mu'\operatorname{ctg}\beta}{1+\mu'\operatorname{tg}\beta}, \tag{II.129}$$

în care

$$\mu'=\frac{\mu}{\cos\alpha};\quad \alpha=20°.$$

Comparîndu-le cu (II.113) şi (II.114), rezultă:

$$k_1=\mu'\operatorname{tg}\beta; \tag{II.130}$$

$$i^n=\operatorname{ctg}^2\beta. \tag{II.131}$$

Expresia raportului de transmitere i în cazul şurubului — melc (cu m_f începuturi) — roată melcată, cu z dinţi, este

$$i=\frac{z}{m_f}. \tag{II.132}$$

Din (II.131) şi (II.132) rezultă valoarea lui n:

$$n=\frac{2\ln(\operatorname{ctg}\beta)}{\ln z-\ln n_f}. \tag{II.133}$$

După cum se vede, prin determinarea expresiei randamentelor diferitelor mecanisme şi prin indentificarea lor cu formulele (II.113) şi (II.114), se pot apoi folosi toate concluziile deduse mai înainte sau care se vor deduce mai departe.

5. *Randament etalon.* Pentru mecanismele simetrice se adoptă denumirea de randament etalon η_1 atunci cînd $i^n=1$, adică $n=0$ (pentru $i\neq 1$). Această mărime poate fi utilizată drept criteriu de comparaţie.

Din ecuaţiile (II.113) şi (II.114), pentru $i^n=1$, rezultă:

$$\eta_1=\frac{1-k_1}{1+k_1}, \tag{II.134}$$

de unde rezultă valoarea lui k_1:

$$k_1=\frac{1-\eta_1}{1+\eta_1}. \tag{II.135}$$

Dacă înlocuim această valoare în ecuaţiile (II.113) şi (II.114), se obţine:

$$\eta_d=\frac{2\eta_1}{(1+\eta_1)+(1-\eta_1)\,i^n}; \tag{II.136}$$

$$\eta_i=\frac{1}{2}[(1+\eta_1)-(1-\eta_1)\,i^n]. \tag{II.137}$$

In fig. II.22 şi II.23 s-au trasat curbele de variaţie ale lui η_d şi η_i în funcţie de i^n, pentru diferitele valori ale η_1.

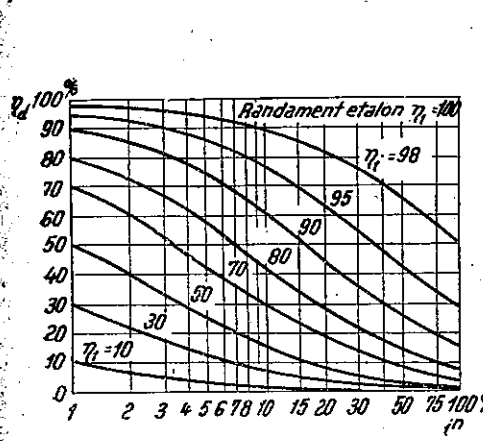


Fig. II.22. Curbele de variaţie ale randamentului în mişcare directă η_d în funcţie de raportul de transmitere i^n pentru diferite valori ale randamentului etalon η_1.

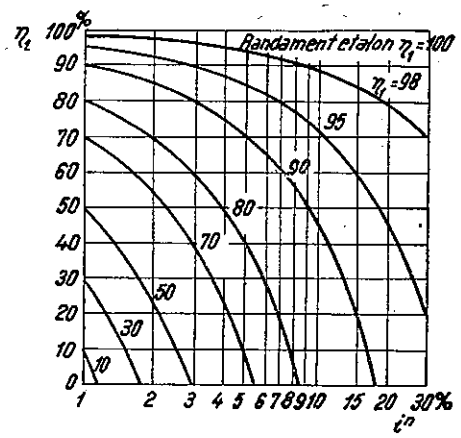


Fig. II.23. Curbele de variaţie ale randamentului în mişcarea inversă η_i în funcţie de raportul de transmitere i^n pentru diferite valori ale randamentului etalon η_1.

Dacă se elimină i^n între (II.136) şi (II.137), se obţine

$$1-\eta_i=\eta_1\left(\frac{1}{\eta_d}-1\right). \tag{II.138}$$

In fig. II.24 sînt trasate curbele de variaţie ale lui η_i în funcţie de η_d pentru diferitele valori ale lui η_1.

6. *Nereversibilitatea.* Se ştie că un mecanism de transmisie va fi nereversibil dacă, la mişcarea inversă, $\eta_i=0$. Astfel s-a văzut mai sus cum, în cazul ghidajului înclinat la $\eta_i=0$, unghiul de frecare este egal cu înclinarea

ghidajului şi deci piatra de culisă nu poate aluneca decît dacă se măreşte greutatea pietrei sau se schimbă sensul forţei $\mathfrak{R}$.

Pentru a studia variaţia randamentului limită în mişcarea directă η_{d0}, se va pune $\eta_i=0$ în formula (II.117), în care caz rezultă:

$$\eta_{d0}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{i^n}\right) \text{ sau } \frac{1}{i^n}=1-2\eta_{d0}. \qquad \text{(II.139)}$$

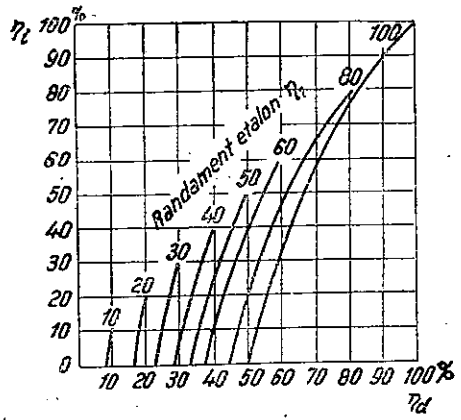


Fig. II.24. Curbele de variaţie ale randamentului în mişcare inversă η_i în funcţie de randamentul în mişcare directă η_d pentru diferite valori ale randamentului etalon η_1.

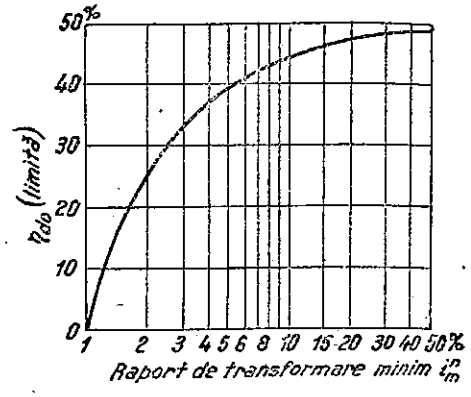


Fig. II.25. Curba de variaţie a randamentului limită η_{d0} în mişcarea directă în funcţie de i_m^n în cazul nereversibilităţii.

In fig. II.25 s-a trasat curba de variaţie a randamentului limită pentru mişcarea directă (η_{d0}) pentru diferite valori ale lui i^n. Din aceasta se vede că η_{d0} tinde către 50% cînd $i^n=50$ şi devine zero cînd $i^n=1$.

Dacă în formula (II.137) se pune $\eta_i=0$, se obţine

$$i_m^n=\frac{1+\eta_1}{1-\eta_1}, \text{ de unde } \eta_1=\frac{i_m^n-1}{i_m^n+1}. \qquad \text{(II.140)}$$

Din formulele de mai sus rezultă valoarea maximă a lui i_m^n în funcţie de η_1 pentru ca un mecanism să fie reversibil, sau minimă, ca să fie nereversibil. Curba este redată în fig. II.26.

In sfîrşit, dacă se pune $\eta_i=0$ în formula (II.138), se obţine

$$\frac{1}{\eta_{d0}}=1+\frac{1}{\eta_1} \text{ sau } \eta_{d0}=\frac{\eta_1}{1+\eta_1}. \qquad \text{(II.141)}$$

Curba $\eta_{d0}(\eta_1)$ este trasată în fig. II.27.

Se vede din această curbă că η_{d0} este egal cu 50% numai cînd $\eta_1=1$.

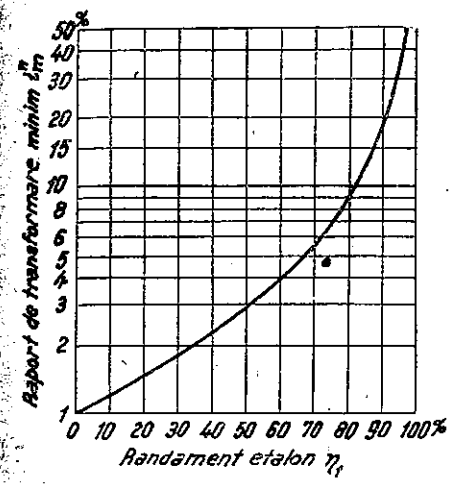


Fig. II.26. Curba de variaţie a raportului de transmitere minim i_m^n în funcţie de randamentul etalon η_1 în cazul nereversibilităţii.

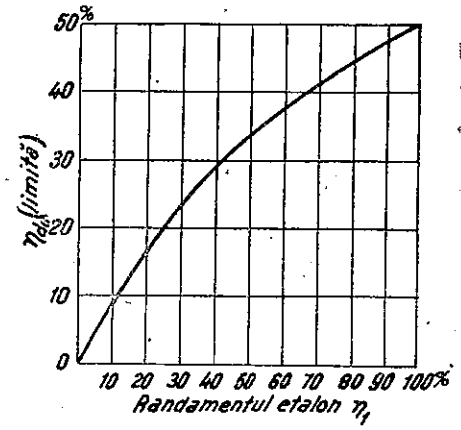


Fig. II.27. Curba de variaţie a randamentului limită η_{d0} în mişcarea directă şi randamentul etalon η_1 în cazul nereversibilităţii.

7. *Ca aplicaţii la randament etalon şi nereversibilitate* se va lua cazul ghidajului înclinat (cu forţa $\mathfrak{R}$ orizontală) şi al angrenajelor.

a) Aplicaţie la ghidajul înclinat

In acest caz, din (II.125) şi (II.134) rezultă:

$$\eta_1=\frac{1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}. \qquad \text{(II.142)}$$

Comparînd această expresie cu (II.140), rezultă că pentru nereversibilitate

$$i_m^n=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mu}. \qquad \text{(II.143)}$$

Cum în cazul limită al nereversibilităţii $\eta_i=0$ şi $i_m^n=\mathrm{ctg}^2\alpha$, aceasta din urmă, conform formulei (II.126), rezultă imediat că $\mu=\mathrm{tg}\,\alpha$ şi randamentul etalon devine:

$$\eta_1=\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}. \qquad \text{(II.144)}$$

Randamentul limită în mişcarea directă η_{d0} rezultă din (II.141):

$$\eta_{d0}=\frac{1}{2}(1-\mu^2), \qquad \text{(II.145)}$$

care se anulează pentru $\varphi=45°$.

b) Aplicaţie la angrenaje.

S-a văzut că o expresie mai exactă a randamentului angrenajului cilindric este aceea dată de formula (II.73).

Dacă se notează :

$$k_1=\frac{\mu}{m\cos\alpha\,(1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)\,z_2}\,\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1+l_2}; \tag{II.146}$$

$$k_1 i=\frac{\mu}{m\cos\alpha\,(1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)\,z_1}\,\frac{l_1^2+l^2}{l_1+l_2},\quad \text{unde}\quad i=\frac{z_2}{z_1}, \tag{II.147}$$

expresia randamentului în mișcarea directă din formula (II.73) devine

$$\eta_d=1-(k_1+k_1 i). \tag{II.148}$$

Cu o foarte mică eroare expresia de mai sus se poate scrie și

$$\eta_d=\frac{1-k_1}{1+k_1 i}. \tag{II.149}$$

In adevăr, formula (II.149) devine (II.148) dacă se dezvoltă binomul $(1+k_1 i)^{-1}$ și se neglijează termenii $k_1^2 i^2$, $k_1^3 i^3$, $k_1^2 i$, $k_1^3 i^2$ etc.

Se poate pune sub forma simetrică dată de formula (II.149), și expresia randamentului frecării de rostogolire (II.79), dacă se consideră :

$$1-\frac{\mu\pi\varepsilon}{2z_1\,(\cos\beta-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}\cong 1$$

și se notează :

$$k_1=\frac{2f}{mz_2\cos\alpha\,(\cos\beta-\mu\mathrm{tg}\,\alpha)}; \tag{II.146'}$$

$$k_1 i=\frac{2f}{mz_1\cos\alpha\,(\cos\beta-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}. \tag{II.147'}$$

Comparînd formula (II.149) cu (II.113), se vede că în cazul angrenajelor $n=1$.

Randamentul angrenajului în mișcarea inversă va fi evident

$$\eta_i=\frac{1-k_1 i}{1+k_1}. \tag{II.150}$$

Se vede imediat că angrenajul este un mecanism liniar simetric, deoarece pentru $i=1$ se obține :

$$\eta_d=\eta_i.$$

In cazul limită al pinionului și cremalierei, cînd $i=\infty$; $z_1\neq 0$; $z_2=\infty$, cele două randamente devin :

$$\eta_d=\frac{1}{1+k_1 i} \tag{II.151}$$

și

$$\eta_i=1-k_1 i, \tag{II.152}$$

iar curba care dă relația dintre aceste două randamente se obține fie din eliminarea lui $k_1 i$, iar din (II.117) în care se face $i^n=i=\infty$:

$$\frac{1}{1-\eta_d}-\frac{1}{1-\eta_i}=1. \tag{II.117'}$$

Din curba care se trasează (fig. II.24) se vede că pentru

$$\eta_d\leq 0{,}50,\quad \text{adică}\quad k_1 i>1,$$

mecanismul devine nereversibil, deoarece

$$\eta_i\leq 0.$$

Condiția de nereversibilitate la un pinion și cremalieră rezultă deci din formulele (II.147) și (II.151) :

$$z_1<\frac{\mu}{m\cos\alpha\,(1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}\,\frac{l_1^2+l_2^2}{l_1+l_2}. \tag{II.153}$$

Cu aproximația menționată mai înainte se mai poate scrie și

$$z_1<\frac{\mu\pi\varepsilon}{2\,(1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)}. \tag{II.153'}$$

Dacă se admit următoarele date pentru mecanismul pinion-cremalieră :

$$\mu=0{,}2;\quad \varepsilon\cong 1{,}78;\quad 1-\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}9272,$$

atunci mecanismul se va autofrîna cînd

$$z_1<\frac{0{,}2\times 3{,}14\times 1{,}78}{2\times 0{,}9272}\cong 0{,}6\ \text{dinți}.$$

In concluzie, acest mecanism cu un $\mu=0{,}2$ (care este un maxim) nu se poate bloca niciodată, de aceea trebuie prevăzut cu roată cu clichet.

Randamentul etalon al angrenajelor este cel dat de expresia (II.134), unde k_1 are una dintre valorile date de (II.146) și (II.147), deoarece $z_1=z_2$.

Randamentul etalon η_1 are diferite valori, după numărul de dinți ($z_1=z_2$) ai celor două roți ale angrenajului.

Interesante pentru angrenaje sînt curbele din fig. II.24, unde se vede că de la $\eta_1<0{,}5$ și $\eta_1<1$ randamentele η_i devin negative.

Cum la angrenaje se obține totdeauna prin construcție $\eta_d>0{,}5$, rezultă și de aici că *la angrenajele cilindrice nu există posibilitatea de autofrînare.*

Analizînd, în sfîrșit, curbele din fig. II.25—II.27, se vede de asemenea că randamentul limită η_{d0} al unui angrenaj trebuie să scadă sub curbă pentru ca să se producă autofrînarea la mișcarea inversă, lucru care nu se produce în cazul angrenajelor.

CAPITOLUL II

MIȘCAREA MAȘINII SUB ACȚIUNEA FORȚELOR EXTERIOARE

§ 8. ECUAȚIA DE MIȘCARE A MAȘINII

8.1. Ecuația de mișcare sub formă finită (ecuația energiei cinetice). Caracteristicile mecanice ale mașinilor

La 3.3 s-au determinat ecuațiile energiei cinetice ale mașinii sau mecanismului (II.34) și (II.35) sub cele două forme corespunzătoare :

— momentului de inerție redus al mașinii I_{red} și
— masei reduse m_{red} a mașinii.

Expresiile energiei cinetice a maşinii sub cele două forme nu reprezintă, în fond, decît ecuaţiile de mişcare ale maşinii scrise sub forma finită:

$$W = W_M - W_r = \frac{1}{2} I_{red}\,\omega_1^2 - \frac{1}{2} I_{red_0}\,\omega_{1_0}^2; \qquad \text{(II.34)}$$

$$W = W_M - W_r = \frac{1}{2} m_{red}\,v_A^2 - \frac{1}{2} m_{red_0}\,v_{A_0}^2. \qquad \text{(II.35)}$$

Lucrul mecanic al forţelor exterioare $W_M - W_r = W$ are o importanţă fundamentală în studiul mişcării maşinii. In special este importantă cunoaşterea variabilelor de care depinde variaţia lucrului mecanic.

Astfel, el poate depinde:

— fie de poziţia elementului conducător al maşinii, adică de φ în cazul manivelei (sau s în cazul cînd elementul conducător este pistonul);

— fie de viteza unghiulară ω a elementului conducător;

— fie de ambele variabile în acelaşi timp.

Se vor da cîteva exemple:

a) Dacă se analizează mişcarea unui agregat compus dintr-un motor cu explozie şi un concasor, atunci forţele exterioare şi deci lucrurile lor mecanice W_M şi W_r depind de poziţiile elementelor conducătoare (pentru motorul cu explozie: pistonul; pentru concasor: manivela acestuia).

Un astfel de agregat este redat în fig. I.56.

Ecuaţiile (II.34) şi (II.35) vor putea fi rezolvate fără dificultate, calculînd din ele viteza unghiulară a elementului conducător sau de reducere în funcţie de toate celelalte valori care — evident — depind numai de poziţia elementelor conducătoare.

b) Dacă se analizează mişcarea agregatului compus dintr-un motor electric şi o pompă centrifugă sau presă cu manivelă, atunci forţa motoare T tangenţială care acţionează asupra axului pompei sau manivelei presei depinde de viteza unghiulară a axului motorului electric şi poate fi pusă sub forma

$$T = a - b\omega.$$

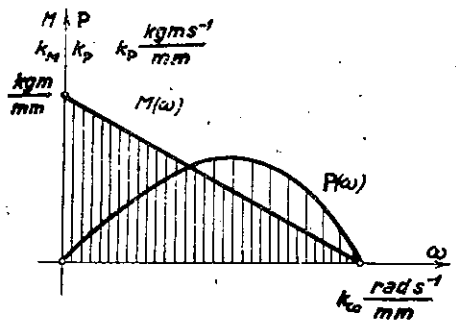


Fig. II.28. Caracteristicile mecanice ale motorului electric.

Cuplul (momentul) motor va fi în acest caz

$$M = TR = Ra - Rb\omega = M_0 - b'\omega,$$

iar puterea dezvoltată

$$P = M\omega = M_0\omega - b'\omega^2.$$

Atît momentul (cuplul) motor cît şi puterea se dau de obicei sub formă de diagrame numite caracteristicile mecanice ale maşinilor.

In cazul de faţă, diagramele de variaţie $M(\omega)$ şi $P(\omega)$ sînt redate în fig. II.28.

In fig. II.29 sînt redate caracteristicile mecanice ale unei turbine cu apă. Se constată că diagrama de variaţie a momentului motor $M(\omega)$, este o curbă descendentă cu concavitatea în jos foarte aproape de o linie dreaptă, iar a puterii $P(\omega)$, forma unei parabole.

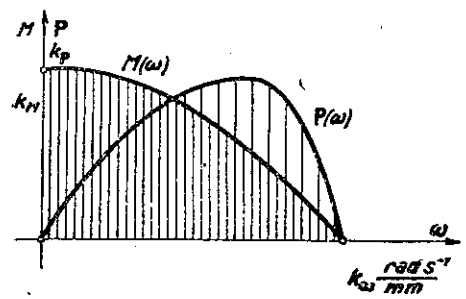


Fig. II.29. Caracteristicile mecanice ale turbinei cu apă.

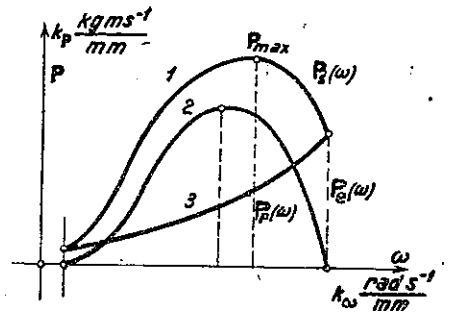


Fig. II.30. Caracteristica mecanică a motorului de avion.

c) In fig. II.30 este reprezentată caracteristica mecanică a unui motor de avion. Aici sînt trasate: curba *1* — diagrama de variaţie a puterii medii indicate $P_i(\omega)$; curba *2* — diagrama de variaţie a puterii efective $P_e(\omega)$; curba *3* — diagrama de variaţie a puterii consumate $P_r(\omega)$.

Din examinarea diagramei $P_r(\omega)$ se vede că ea creşte cu viteza; de aici se trage concluzia că în timp ce cuplul motor scade în general cu viteza, cuplul rezistent creşte cu viteza elementului conducător.

d) Mai jos se dau caracteristicile mecanice ale cîtorva maşini de lucru care se cuplează, fie direct, fie prin curea la maşinile motoare.

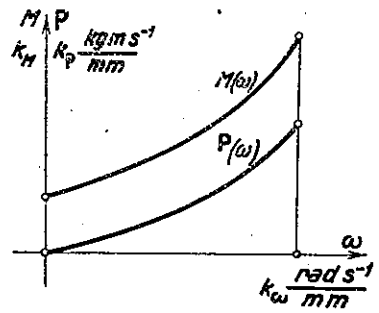


Fig. II.31. Caracteristica mecanică a pompei centrifuge.

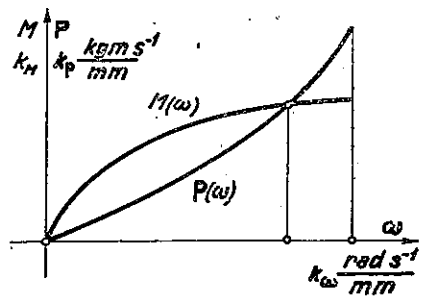


Fig. II.32. Caracteristica mecanică a unei maşini de tors.

Astfel, în fig. II.31 sînt redate caracteristicile mecanice ale unei pompe centrifuge, iar în fig. II.32, ale unei maşini de tors.

e) In sfîrşit, dacă se analizează funcţionarea unui agregat compus dintr-un motor Diesel cuplat direct cu un generator, agregat numit în mod curent şi grup electrogen, se constată că forţa motoare care acţionează asupra pistoa-

nelor motorului, deci şi lucrul mecanic W_M al acestora, depinde de poziţia elementului de reducere, în timp ce forţa rezistenţei tehnologice (productive), deci şi lucrul mecanic respectiv W_r, depinde de viteza unghiulară a arborelui motor, la fel ca şi în cazul motorului de avion cuplat cu elicea.

In concluzie, rezolvarea ecuaţiei de mişcare — pentru aflarea vitezei unghiulare a agregatului — este foarte complexă, metodele diferind de la caz la caz, în funcţie de variabilele de care depind forţele exterioare.

Sînt cazuri cînd calculul se poate simplifica întrucîtva, de exemplu atunci cînd I_{red} şi M_{red} sînt constante în timpul ciclului energetic al maşinii.

Agregatul turbogenerator (turbină de abur sau de apă cuplată direct cu generatorul electric) sau electropompele (motor electric — pompă centrifugă) etc., sînt exemple de agregate cu moment de inerţie redus constant.

In toate cazurile, însă, rezolvarea ecuaţiilor de mişcare (II.34) şi (II.35) nu se poate face fără cunoaşterea stării iniţiale de mişcare a agregatului.

8.2. Ecuaţia de mişcare scrisă sub forma ecuaţiei lui Lagrange

Ecuaţiile de mişcare ale maşinii sau ale agregatului pot fi scrise şi sub forma derivată în raport cu arcul parcurs de punctul de reducere (cînd se lucrează cu masa redusă) sau cu unghiul de rotire al manivelei motoare (cînd se lucrează cu momentul de inerţie redus la aceasta), folosind ecuaţiile lui Lagrange.

Se ştie că numărul acestor ecuaţii este egal cu numărul gradelor de mobilitate ale maşinii, fiecărui grad de mobilitate corespunzîndu-i o coordonată generalizată.

In cazul general, forma acestor ecuaţii este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta E}{\delta q_j'}\right)-\frac{\delta E}{\delta q_j}+\frac{\delta E_p}{\delta q_j}=Q_j;\quad (j=1,2,\ldots,n). \tag{a}$$

Mai sus s-a notat:

q_j — coordonata generalizată;

q_j' — viteza generalizată $q_j'=\frac{dq_j}{dt}$;

E — energia cinetică a maşinii sau agregatului, a cărei expresie este dată de una dintre formulele (II.7) şi (II.9);

E_p — energia potenţială a maşinii;

Q_j — forţa generalizată corespunzătoare coordonatei generalizate q_j.

In cazul cînd agregatul are un singur grad de mobilitate, cele n ecuaţii de mai sus se reduc la una.

Drept coordonată generalizată se poate alege unghiul de rotaţie φ al elementului conducător sau iniţial, care este în acelaşi timp şi element de reducere. Energia cinetică are forma dată de formula (II.7), iar forţa generalizată are expresia momentului redus M_{red}. La § 14.3 se va deduce expresia analitică a energiei cinetice la un motor Diesel.

Dacă se alege drept coordonată generalizată, deplasarea butonului de manivelă A, atunci expresia energiei cinetice va fi de forma (II.9), iar forţa generalizată — forţa redusă în punctul A a tuturor forţelor exterioare F_{red}.

Energia potenţială E_p a agregatului se poate considera egală cu zero, deoarece forţele care acţionează asupra elementelor şi derivă dintr-un potenţial (greutatea elementelor şi a forţelor elastice) influenţează foarte puţin mişcarea agregatului, mai ales că toate motoarele au realizată şi echilibrarea statică.

In adevăr, la maşinile moderne cu viteze mari de funcţionare, greutăţile elementelor sînt foarte mici, iar rigiditatea lor e foarte mare. La § 14.4 se va arăta expresia analitică a energiei potenţiale pentru cazul unui motor Diesel cu un cilindru.

Cu observaţiile de mai sus ecuaţia lui Lagrange se poate pune sub una dintre cele două forme care vor fi deduse mai jos:

a) Dacă $q_j=\varphi$, atunci $q_j'=\omega$, $Q_j=M_{red}$,

şi deci:

$$E=\frac{1}{2}I_{red}\omega^2.$$

Inlocuind expresiile de mai sus în formula (a), se obţine:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\delta}{\delta\omega}\left(\frac{1}{2}I_{red}\omega^2\right)\right]-\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{1}{2}I_{red}\omega^2\right)=M_{red}$$

sau

$$\frac{d}{dt}\left(I_{red}\omega\right)-\frac{1}{2}\omega^2\frac{dI_{red}}{d\varphi}=M_{red}.$$

Ţinînd seamă că I_{red} depinde de timpul t, prin intermediul lui φ ecuaţia de mai sus se poate scrie:

$$I_{red}\frac{d\omega}{dt}+\omega\frac{dI_{red}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{2}\omega^2\frac{dI_{red}}{d\varphi}=M_{red}.$$

Cum $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$, ecuaţia de mai sus devine:

$$I_{red}\frac{d\omega}{dt}+\frac{1}{2}\omega^2\frac{dI_{red}}{d\varphi}=M_{red}. \tag{II.154}$$

b) Dacă

$$q_j=s;\quad q_j'=v;\quad Q_j=F_{red},$$

şi

$$E=\frac{1}{2}m_{red}v^2,$$

atunci ecuaţia lui Lagrange devine:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{1}{2}m_{red}v^2\right)\right]-\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{1}{2}m_{red}v^2\right)=F_{red}.$$

Derivînd şi făcînd simplificările, se obţine:

$$m_{red}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{2}v^2\frac{dm_{red}}{ds}=F_{red}\,. \qquad \text{(II.155)}$$

Observaţie. Ecuaţiile de mişcare ale agregatului (II.154) şi (II.155) se pot obţine şi direct prin derivarea energiei cinetice în raport cu unghiul de rotaţie al elementului de reducere.

In adevăr, din expresia

$$M_{red}\,d\varphi=dE$$

se obţine

$$M_{red}=\frac{dE}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{2}I_{red}\,\omega^2\right).$$

Efectuînd derivarea, se obţine:

$$M_{red}=\frac{1}{2}\omega^2\frac{dI_{red}}{d\varphi}+I_{red}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{2}\omega^2\right);$$

cum

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{2}\omega^2\right)=\omega\frac{d\omega}{d\varphi}=\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{d\varphi}\frac{d\omega}{dt},$$

înlocuind mai sus, se obţine:

$$M_{red}=\frac{1}{2}\omega^2\frac{dI_{red}}{d\varphi}+I_{red}\frac{d\omega}{dt},$$

adică tocmai ecuaţia (II.154).

De asemenea, din expresia

$$F_{red}\,ds=dE$$

se obţine:

$$F_{red}=\frac{dE}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}M_{red}\,v^2\right),$$

de unde, prin derivare, rezultă tocmai ecuaţia (II.155).

§ 9. REZOLVAREA ANALITICĂ A ECUAŢIILOR DE MIŞCARE ALE AGREGATULUI ÎN CAZUL CÎND FORŢELE EXTERIOARE DEPIND NUMAI DE POZIŢIA ELEMENTULUI DE REDUCERE

9.1. Calculul vitezei unghiulare a elementului de reducere

Rezolvarea ecuaţiei de mişcare a agregatului în cazul general este aproape imposibilă, deoarece — după cum s-a arătat — forţele exterioare pot depinde simultan atît de poziţia elementului de reducere, cît şi de viteza unghiulară a acestuia. Afară de aceasta, starea iniţială a mişcării agregatului este, în general, necunoscută.

Aflarea expresiei analitice a vitezei unghiulare a elementului de reducere sau a vitezei punctului de reducere implică exprimarea tuturor celorlalte mărimi în funcţie de o singură variabilă, alta decît viteza.

Mai jos se va rezolva ecuaţia de mişcare a maşinii pe cale analitică în cazul cînd forţele exterioare depind numai de poziţia elementului de reducere.

Se foloseşte în acest scop una dintre cele două ecuaţii: (II.34) sau (II.35). Se va lua ecuaţia (II.34):

$$\frac{1}{2}I_{red_1}\omega_1^2-\frac{1}{2}I_{red_0}\omega_{1_0}^2=W_M-W_r\,.$$

Deoarece forţele exterioare sînt funcţii de φ (poziţia elementului de reducere), atunci

$$W=\int_{\varphi_0}^{\varphi}(M_M-M_r)\,d\varphi=\int_{\varphi_0}^{\varphi}M_{red}\,d\varphi=W(\varphi).$$

De asemenea, pentru simplificarea notaţiilor nu se va mai da elementului de reducere indicele 1.

Cu aceste observaţii ecuaţia de mişcare a maşinii devine:

$$\frac{1}{2}I_{red}\,\omega^2-\frac{1}{2}I_{red_0}\omega_0^2=W(\varphi); \qquad \text{(II.156)}$$

în care $W(\varphi)$ este deci lucrul mecanic efectuat de momentul redus în intervalul de la φ_0 pînă la φ.

In ecuaţia (II.156) I_{red} şi I_{red_0} sînt funcţii de φ, iar ω_0 — viteza unghiulară la starea iniţială — se consideră cunoscută.

In consecinţă, se poate calcula imediat valoarea lui ω:

$$\omega=\sqrt{\frac{2}{I_{red}}W(\varphi)+\frac{I_{red_0}}{I_{red}}\omega_0^2}\,. \qquad \text{(II.157)}$$

Dacă starea iniţială considerată cunoscută este începutul mişcării maşinii, atunci $\omega_0=0$, şi ecuaţia (II.157) devine:

$$\omega=\sqrt{\frac{2}{I_{red}}W(\varphi)}. \qquad \text{(II.158)}$$

9.2. Calculul timpului t

Timpul t necesar agregatului pentru a ajunge de la viteza unghiulară corespunzătoare unghiului φ_0 (ω_0 sau 0, după caz) pînă la viteza ω dată de una dintre cele două formule (II.157) sau (II.158) se determină după cum urmează:

Din ecuaţia

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}\quad\text{se obţine}\quad dt=\frac{d\varphi}{\omega},$$

care, integrată între aceleaşi limite φ_0 şi φ, se obţine:

a) pentru cazul cînd ω este dat de formula (II.157), iar starea iniţială se consideră $t_0=0$:

$$t=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{I_{red}}W(\varphi)+\frac{I_{red_0}}{I_{red}}\omega_0^2}}; \tag{II.159}$$

b) pentru cazul cînd ω este dat de formula (II.158) şi $t_0=0$:

$$t=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{I_{red}}W(\varphi)}}. \tag{II.160}$$

Grupele de formule (II.157), (II.159) şi (II.158), (II.160) permit calcularea valorilor lui ω şi t în funcţie de φ, adică $\omega(\varphi)$ şi $t(\varphi)$.

Prin eliminarea lui φ din cele două expresii, se obţine:

$$\omega(t).$$

9.3. Calculul acceleraţiei unghiulare ε a elementului de reducere

Acceleraţia unghiulară se obţine imediat, ştiind că

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\omega\frac{d\omega}{d\varphi}.$$

ε se poate calcula fie prin derivarea funcţiei $\omega(t)$ obţinută mai sus, fie din înmulţirea expresiei lui ω dată de una dintre formulele (II.157) sau (II.158) cu derivata acestora în raport cu φ.

9.4. Calculul vitezei tangenţiale, al timpului şi a acceleraţiei tangenţiale

Dacă ecuaţia energiei cinetice este dată sub forma (II.35), relaţiile se găsesc după acelaşi procedeu ca mai sus.

In acest caz

$$W=\int_{s_0}^{s}(F_M-F_r)\,ds=\int_{s_0}^{s}F_{red}\,ds=W(s),$$

în care $W(s)$ este lucrul mecanic efectuat de forţa redusă a tuturor forţelor exterioare în raport cu punctul de reducere în intervalul de la s_0 la s (exclusiv forţele de inerţie).

Ecuaţia (II.35) devine astfel:

$$\frac{1}{2}m_{red}v^2-\frac{1}{2}m_{red_0}v_0^2=W(s). \tag{II.35'}$$

Calculînd pe v şi t, se obţine uşor:

$$v=\sqrt{\frac{2}{m_{red}}W(s)+\frac{m_{red_0}}{m_{red}}v_0^2} \tag{II.161}$$

şi

$$t=\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m_{red}}W(\varphi)+\frac{m_{red_0}}{m_{red}}v_0^2}}. \tag{II.162}$$

Acceleraţia totală a a punctului de reducere A (v. fig. II.1) este evident

$$a_A=\sqrt{(a_A^{\nu})^2+(a_A^{\tau})^2}.$$

In expresia de mai sus:

$a_A^{\nu}=\frac{v_A^2}{OA}$, unde v_A este dat de formula (II.161) şi OA este distanţa de la centrul de rotaţie la punctul de reducere A, iar

$$a_A^{\tau}=\frac{dv_A}{dt}=\frac{dv_A}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v_A\frac{dv_A}{ds}.$$

In felul acesta calculul analitic permite aflarea vitezei v, a acceleraţiei a şi a timpului t, pentru orice poziţie a elementului de reducere în timpul ciclului energetic al maşinii, în cele trei faze de mişcare ale agregatului.

Deşi problema aşa cum este prezentată pare simplă, totuşi la aplicaţiile practice se întîmpină greutăţi la efectuarea integrărilor ce apar în expresiile soluţiilor, de arece expresiile analitice ale lui $W(\varphi)$ şi $I_{red}(\varphi)$; $W(s)$ şi $M_{red}(s)$ sînt în general complicate.

Afară de aceasta, în timpul fazei de regim este greu de ales starea iniţială. De aceea valoarea lui ω_0 sau v_0 se alege în mod aproximativ egală cu viteza medie unghiulară, adică

$$\omega_0=\omega_{med}=\frac{\pi n}{30},$$

unde n este numărul de rotaţii pe minut ale elementului de reducere.

§ 10. REZOLVAREA ANALITICĂ A ECUAŢIILOR DE MIŞCARE ALE AGREGATULUI, SCRISE SUB FORMA ECUAŢIEI LUI LAGRANGE ÎN CAZUL CÎND FORŢELE EXTERIOARE DEPIND NUMAI DE POZIŢIA PUNCTULUI DE REDUCERE

La maşinile şi agregatele la care viteza unghiulară a elementului de reducere are variaţii mici în timpul fazei de regim, ea se poate considera aproximativ constantă şi deci:

$$\varphi=\omega_{med}\,t,$$

adică unghiul φ de rotaţie al manivelei este în acest caz proporţional cu timpul.

Ipoteza care se face va duce evident la erori cu ocazia integrării ecuaţiei energiei cinetice puse sub forma Lagrange. In adevăr, I_{red} la timpul $t=\frac{\varphi}{\omega_{med}}$ — în ipoteza vitezei unghiulare constante — are o valoare diferită de aceea care ar rezulta în cazul cînd elementul de reducere se roteşte cu viteza unghiulară reală.

De asemenea, $M_{red}(\varphi)$ corespunzător timpului $t=\frac{\varphi}{\omega}$ în ipoteza $\omega=\text{const}$ va avea o valoare diferită de aceea care ar rezulta cînd $\omega=\omega_{med}$.

Se va arăta mai jos cum se poate evalua eroarea comisă în ipoteza $\omega_{med}=\text{const}$.

In fig. II.33, *a* se dă curba de variaţie a lui $\omega(t)$ în mişcarea de regim, ciclul de variaţie fiind T.

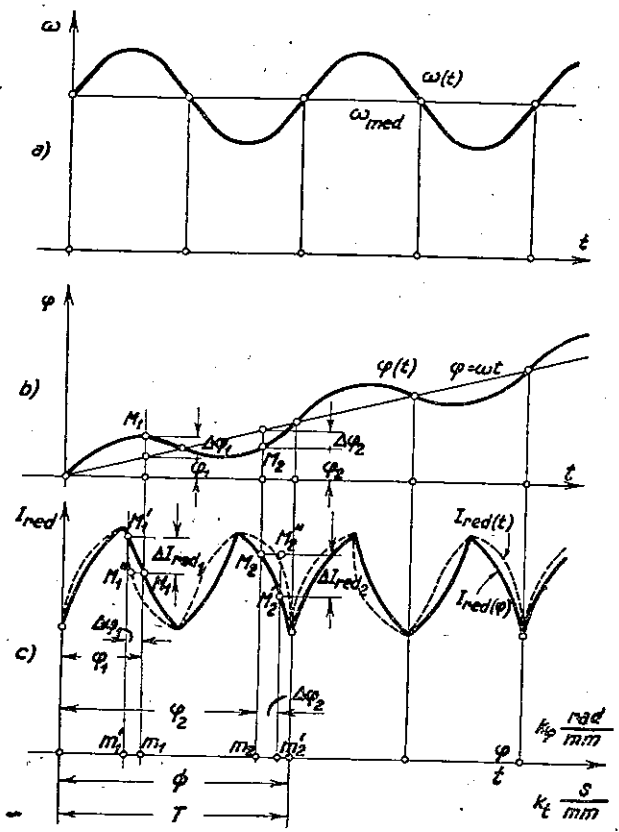


Fig. II.33. Determinarea erorilor care se fac la evaluarea lui M_{red} şi I_{red} în cazul ipotezei $\omega=\omega_{med}=\text{const}$.

Prin integrare grafică se obţine în fig. II.33, *b* curba $\varphi(t)$.

Dacă $\omega\cong\omega_{med}=\text{const}$ şi este dată în fig. II.33, *a* prin paralela la axa t, atunci în fig. II.33, *b* curba integrală va fi dreapta $\varphi=\omega(t)=\omega_{med}\cdot t$, care intersectează curba integrală $\varphi(t)$ în punctele de abscisă unde $\omega=\omega_{med}$.

Din fig. II.33, *b* se poate deduce, pentru orice moment t, care este valoarea unghiului cu care s-a rotit elementul de reducere în cazul vitezei unghiulare reale ω şi în cazul cînd se consideră $\omega\cong\omega_{med}=\text{constant}$.

Astfel, pentru cazul din figură se vede că, după timpul t, elementul de reducere s-a rotit cu unghiul φ în cazul lui ω real, şi cu unghiul $\varphi+\Delta\varphi$, în cazul $\omega\cong\omega_{med}=\text{const}$ în poziţia M_1, unghiul $\Delta\varphi$ este negativ, deoarece la acest moment $\omega_{med}<\omega$, în timp ce în poziţia M_2, $\Delta\varphi>0$, deoarece $\omega_{med}>\omega$.

$\Delta\varphi$ se numeşte deviaţie unghiulară şi expresia ei analitică se va calcula la § 15.6 cu formula II.239. Construcţia curbei $\Delta\varphi(\varphi)$ se va face la §§ 18.2 şi 18.3 (fig. II.57).

In fig. II.33, *c* este trasată curba $I_{red}(\varphi)$. Scara k_φ a unghiului φ a fost astfel aleasă, încît segmentul X care reprezintă ciclul de variaţie Φ a lui I_{red} şi M_{red} să fie egal cu cel care reprezintă mărimea ciclului energetic a lui ω la scara k_t.

In acest caz, deoarece $\Phi=k_\varphi\cdot x$ şi $T=k_t\cdot x$, rezultă relaţia dintre cele două scări:

$$k_\varphi=\frac{\Phi}{T}k_t. \tag{II.163}$$

Dacă acum se transpun în fig. II.33, *c* pe abscisă unghiurile φ şi $\varphi+\Delta\varphi$, corespunzătoare lui t din fig. II.33, *b*, ordonatele acestora intersectează curba $I_{red}(\varphi)$ în punctele M_1, M_1', respectiv M_2, M_2', astfel încît:

— punctele M_1 şi M_2 dau valoarea reală $I_{red_1}=k_1(\overline{M_1m_1})$, respectiv $I_{red_2}=k_1(\overline{M_2m_2})$, corespunzătoare curbei $\varphi(t)$, adică a mişcării reale a maşinii;

— punctele M_1', M_2' dau valoarea lui $I'_{red_1}=k_1(\overline{M_1'm_1'})$, respectiv $I'_{red_2}=k_1(\overline{M_2'm_2'})$, în ipoteza vitezei unghiulare $\omega_{med}=\text{const}$.

Diferenţa dintre aceste două segmente determină eroarea ce se face.

Astfel, pentru punctul M_1 de pe curba $\varphi(t)$ din fig. II.33, *b* se determină în fig. II.33, *c*:

$$\Delta I_{red_1}=I_{red_1}-I'_{red_1}=k_1(\overline{M_1m_1}-\overline{M_1'm_1'})<0.$$

Pentru punctul M_2, se obţine:

$$\Delta I_{red_2}=I_{red_2}-I'_{red_2}=k_1(\overline{M_2m_2}-\overline{M_2'm_2'})>0;$$

Se vede că ΔI_{red} poate fi pozitiv sau negativ, după poziţia elementului de reducere în timpul ciclului cinematic.

Eroarea este evident funcţie şi de forma curbei $I_{red}(\varphi)$ sau $M_{red}(\varphi)$, fiind cu atît mai mare cu cît $\frac{dI_{red}}{d\varphi}$, respectiv $\frac{dM_{red}}{d\varphi}$, sînt mai mari (în valoare absolută).

Pentru construirea curbei $I_{red}(t)$ în cazul considerării mişcării uniforme a elementului de reducere se procedează după cum urmează.

La fiecare valoare a lui t se determină din fig. II. 33, *b* valorile φ şi $\varphi+\Delta\varphi$. Cu acestea se determină din fig. II.33, *c* I_{red} şi I'_{red}. Valoarea lui I'_{red} se transpune apoi pe ordonata corespunzătoare lui t şi se obţine punctul M_1''. Toate punctele determinate ca şi M_1'' unite printr-o curbă punctată (fig. II.33, *c*) dă curba $I_{red}(t)$ căutată.

In cazul cînd se vrea construirea curbei $I_{red}(\varphi)$, astfel încît pentru orice valoare a lui t să se obţină $I'_{red}=I_{red}$, se procedează după cum se vede în fig. II.33, *c*. In punctul M_1' se scade segmentul $(\overline{M_1'M_1''})=\frac{\Delta I_{red_1}}{k_1}$, iar în punctul M_2' se adaugă segmentul $(\overline{M_1'M_2''})=\frac{\Delta I_{red_2}}{k_1}$. Prin unirea tuturor punctelor M_1'' astfel obţinute rezultă curba $I'_{red}(\varphi)$.

Aceeaşi metodă expusă mai sus se poate utiliza şi pentru determinarea erorilor care rezultă din curba $M_{red}(\varphi)$.

Cu aceste observaţii se poate trece acum la integrarea ecuaţiei lui Lagrange (II.154), care se poate scrie în acest caz:

$$I_{red}\frac{d\omega}{dt}+\frac{\omega^2}{2}\frac{dI_{red}}{dt}\frac{dt}{d\varphi}=M_{red}$$

sau

$$I_{red}\frac{d\omega}{dt}+\frac{\omega}{2}\frac{dI_{red}}{dt}=M_{red}$$

sau, în sfirşit,

$$\frac{d\omega}{dt}+\frac{\omega}{2I_{red}}\frac{dI_{red}}{dt}-\frac{M_{red}}{I_{red}}=0. \qquad \text{(II.164)}$$

Pentru integrarea acestei ecuaţii se face o schimbare de variabile, punînd $\omega=uv$.

Dacă se înlocuieşte în (II.164), se obţine:

$$u\frac{dv}{dt}+v\frac{du}{dt}+\frac{uv}{2I_{red}}\frac{dI_{red}}{dt}-\frac{M_{red}}{I_{red}}=0; \qquad \text{(a)}$$

se pune condiţia

$$v\frac{du}{dt}+\frac{uv}{2I_{red}}\frac{dI_{red}}{dt}=0.$$

Cum $v\neq 0$, rezultă:

$$\frac{du}{dt}+\frac{u}{2I_{red}}\frac{dI_{red}}{dt}=0; \qquad \text{(b)}$$

separînd variabilele şi integrînd, se obţine:

$$\ln u=-\frac{1}{2}\int\frac{dI_{red}}{I_{red}}=-\ln\sqrt{I_{red}},$$

de unde

$$u=\frac{1}{\sqrt{I_{red}}}. \qquad \text{(c)}$$

Ţinînd seamă de (b), ecuaţia diferenţială (a) devine

$$u\frac{dv}{dt}-\frac{M_{red}}{I_{red}}=0.$$

Inlocuind pe u cu valoarea dată de formula (c) şi separînd variabilele, se obţine:

$$dv=\frac{M_{red}}{I_{red}}dt,$$

care, integrată, dă

$$v=\int\frac{M_{red}}{\sqrt{I_{red}}}dt. \qquad \text{(d)}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (II.164) este deci:

$$\omega=uv=\frac{1}{\sqrt{I_{red}}}\int\frac{M_{red}}{\sqrt{I_{red}}}dt; \qquad \text{(II.165)}$$

pentru $t=0$, se dă $\omega=\omega_0$ şi $\int\frac{M_{red}}{\sqrt{I_{red}}}dt=0.$

De aici rezultă:

$$\omega=\omega_0+\frac{1}{\sqrt{I_{red}}}\int_0^t\frac{M_{red}}{\sqrt{I_{red}}}dt, \qquad \text{(II.166)}$$

sau

$$\omega=\omega_0+\Delta\omega,$$

unde s-a notat

$$\Delta\omega=\frac{1}{\sqrt{I_{red}}}\int_0^t\frac{M_{red}}{\sqrt{I_{red}}}dt. \qquad \text{(II.167)}$$

Calculul integralei din formula (II.167), deci şi al lui $\Delta\omega$, se poate lovi de dificultăţi serioase cînd expresiile lui $M_{red}(t)$ şi $I_{red}(t)$ sînt complicate.

De aceea soluţia se definitivează prin calcul grafic, atunci cînd se cunosc curbele $M_{red}(t)$ şi $I_{red}(t)$.

Pentru aceasta se construieşte în prealabil curba $\frac{M_{red}}{\sqrt{I_{red}}}$ în funcţie de timpul t, după care, prin integrare grafică, se obţine; $\int\frac{M_{red}}{\sqrt{I_{red}}}dt.$

Se arată mai jos cum se poate obţine întîi curba $\frac{1}{\sqrt{I_{red}}}(t)$ cînd se cunoaşte curba $\sqrt{I_{red}}(t)$.

Fie în fig. II.34 curba $\sqrt{I_{red}}(t)$, trasată cu linie continuă, rezultată din fig. II.33, *c*.

Construcţia este făcută la scările $k_{\sqrt{I}}$ şi k_t.

Dintr-un punct ales arbitrar pe axa t, de exemplu din punctul O_1, se duce un unghi oarecare $\alpha O_1\beta$, a cărui latură $O_1\alpha$ este paralelă cu axa ordonatelor.

Pe dreapta $O_1\beta$ se alege un segment oarecare $\overline{O_1a}=\bar{\rho}$.

Prin rabaterea lui pe dreapta $O_1\alpha$ se obţine punctul b.

Pentru un punct oarecare $2'$ de abscisă $\overline{O2}$ de pe curba $\sqrt{I_{red}}(t)$ se obţine valoarea inversă $\frac{1}{\sqrt{I_{red}}}(t)$, după cum urmează:

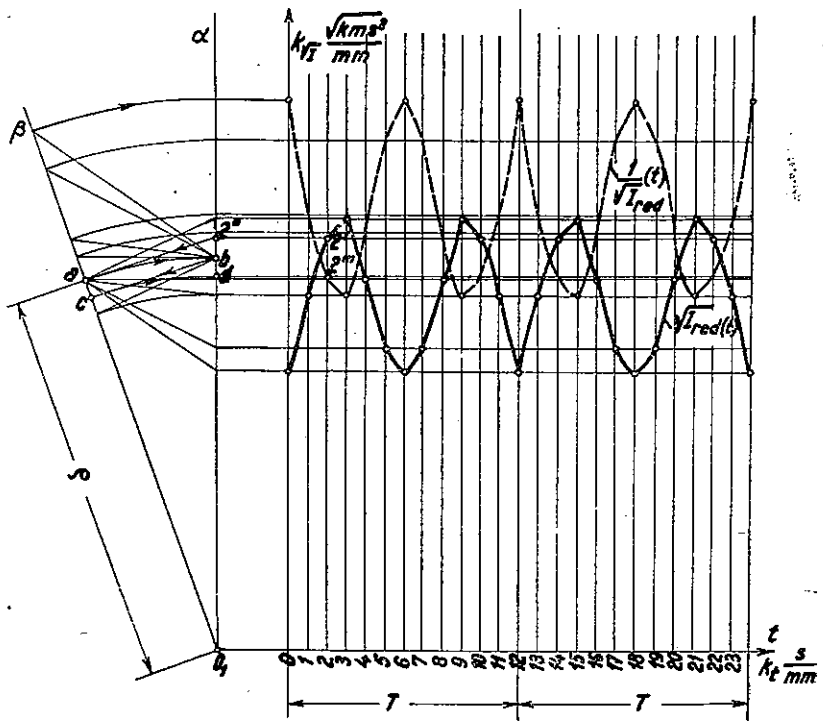


Fig. II.34. Construcţia curbei $\frac{1}{\sqrt{I_{red}}}(t)$ cînd se dă curba $\sqrt{I_{red}}(t)$.

Din $2'$ se duce paralela la abscisa care intersectează dreapta $O_1\alpha$ în punctul $2''$.

Se uneşte $2''$ cu a.

Din b se duce $bc \parallel \overline{a2''}$.

Din O_1 ca centru şi cu o rază egală cu $\overline{O_1c}$ se duce un arc de cerc care intersectează dreapta $O_1\alpha$ în punctul d.

Din d se duce paralela la abscisă pînă cînd intersectează ordonata lui $2'$ în punctul $2'''$.

Segmentul $22'''$ reprezintă, la scara corespunzătoare, valoarea lui $\frac{1}{\sqrt{I_{red}}}$.

Demonstraţia construcţiei rezultă imediat din asemănarea triunghiurilor $\triangle O_1bc$ şi $\triangle O_1a2''$.

In adevăr,

$$\frac{\overline{O_12''}}{\overline{O_1a}} = \frac{\overline{O_1b}}{\overline{O_1c}} \quad \text{sau} \quad \frac{y}{\rho} = \frac{\rho}{z},$$

de unde

$$z = \frac{\rho^2}{y}.$$

Cum

$$\sqrt{I_{red}} = k_{\sqrt{I}} y,$$

înlocuind mai sus, se obţine:

$$z = k_{\sqrt{I}} \rho^2 \frac{1}{\sqrt{I_{red}}},$$

deci z este proporţional cu $\frac{1}{\sqrt{I_{red}}}$.

Scara la care se măsoară aceste mărimi rezultă imediat din expresia de mai sus, care se scrie sub forma

$$\frac{1}{\sqrt{I_{red}}} = \frac{1}{\rho^2 k_{\sqrt{I}}} z = k_z \cdot z,$$

deci:

$$k_z = \frac{1}{\rho^2 \cdot k_{\sqrt{I}}}. \tag{II.168}$$

Dacă această construcţie se face pentru o serie de puncte ale curbei $\sqrt{I_{red}}(t)$ din timpul perioadei de variaţie T şi se unesc punctele astfel obţinute printr-o curbă (trasată în fig. II.34 prin linii întrerupte), se obţine curba

$$\frac{1}{\sqrt{I_{red}}}(t) = k_z \cdot z.$$

Prin înmulţirea ordonatelor curbei de mai sus cu ordonatele corespunzătoare ale lui $M_{red}(t)$, rezultă curba

$$\frac{M_{red}}{\sqrt{I_{red}}}(t),$$

care, integrată grafic între intervalele $t=0$ şi t, permite aflarea vitezei unghiulare ω, după ce rezultatul integrării se înmulţeşte cu $\frac{1}{\sqrt{I_{red}}}$ şi la care se adună ω_0.

Viteza unghiulară iniţială ω_0 se poate determina dacă se admite, de exemplu, că

$$\omega_{med} = \frac{\pi n}{30} = \frac{1}{T}\int_0^T (\omega_0 + \Delta\omega)\, dt.$$

Efectuînd integrala

$$\omega_{med} = \omega_0 + \frac{1}{T}\int_0^T \Delta\omega\, dt,$$

se obţine

$$\omega_0 = \omega_{med} - \Delta\omega_{med}. \tag{II.169}$$

ω_{med} se măsoară cu tahimetrul, iar $\Delta\omega_{med}$ este creşterea medie a vitezei unghiulare, adică a lui $\Delta\omega$ din (II.167). Valoarea lui $\Delta\omega_{med}$ poate deveni în multe cazuri egală cu zero, motiv pentru care de cele mai multe ori în calcule se admite:

$$\omega_0 = \omega_{med} = \frac{\pi n}{30},$$

aşa cum de fapt s-a arătat şi la § 9.4.

Valorile lui ω date de formula (II.166), trasate într-o diagramă $\omega(t)$, vor da curba de variaţie a acesteia în timpul unui ciclu energetic al maşinii sau agregatului în faza de regim (fig. II.8).

Calculul analitic al lui ω este destul de greoi şi de aceea în practică se aplică destul de rar.

Cele mai utilizate metode sînt cele grafice.

§ 11. REZOLVAREA ECUAŢIILOR DE MIŞCARE ALE AGREGATULUI CU AJUTORUL DIAGRAMEI $E(I_{red})$ (MASĂ-ENERGIE CINETICĂ)

11.1. Trasarea diagramelor $M_{red}(\varphi)$ şi $E(\varphi)$

Cea mai răspîndită metodă pentru determinarea vitezei unghiulare a elementului de reducere este metoda grafică.

Aceasta presupune cunoscute curbele de variaţie ale momentelor motoare şi rezistente $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$, ambele reduse la elementul de reducere al agregatului sau maşinii.

Evident că soluţia care se va studia mai departe comportă cunoaşterea diagramelor de variaţie ale momentelor $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$ în funcţie de poziţia φ a elementului de reducere.

Se presupune că sînt date aceste diagrame $M_M(\varphi)$ (curba m) şi $M_r(\varphi)$ (curba r), la scările k_M pentru ordonate şi k_φ pentru abscise (fig. II.35).

In faza de demaraj, cînd momentul rezistent $M_r(\varphi)$ este zero sau constant (aşa cum este cazul în fig. II.35), are loc creşterea energiei cinetice a maşinii.

Această fază durează pînă în punctul l, după care energia cinetică a maşinii scade, şi în punctul *14* începe din nou să crească.

De aici mai departe începe faza de regim sau mişcarea permanentă a maşinii, în care timp atît variaţia momentelor exterioare, cît şi variaţia momentului de inerţie redus au un caracter de periodicitate.

In fig. II.36 sînt redate, ca exemplu, diagramele de variaţie în faza de regim ale celor două momente: $M_M(\varphi)$ — fig. II.36, *a* şi $M_r(\varphi)$ — fig. II.36, *b*. In fig. II.36, *c* s-au trasat ambele diagrame, din care rezultă imediat regiunile unde momentul motor este mai mare decît cel rezistent (suprafeţele pozitive) şi unde este cazul invers (suprafeţele negative).

In fig. II.36, *d* este construită în sfîrşit curba rezultantă, care reprezintă momentul redus la arborele motor (elementul de reducere); se vede clar că în punctele *b*, *c*, *d* şi *e* valoarea lui $M_{red} = M_M - M_r$ este zero

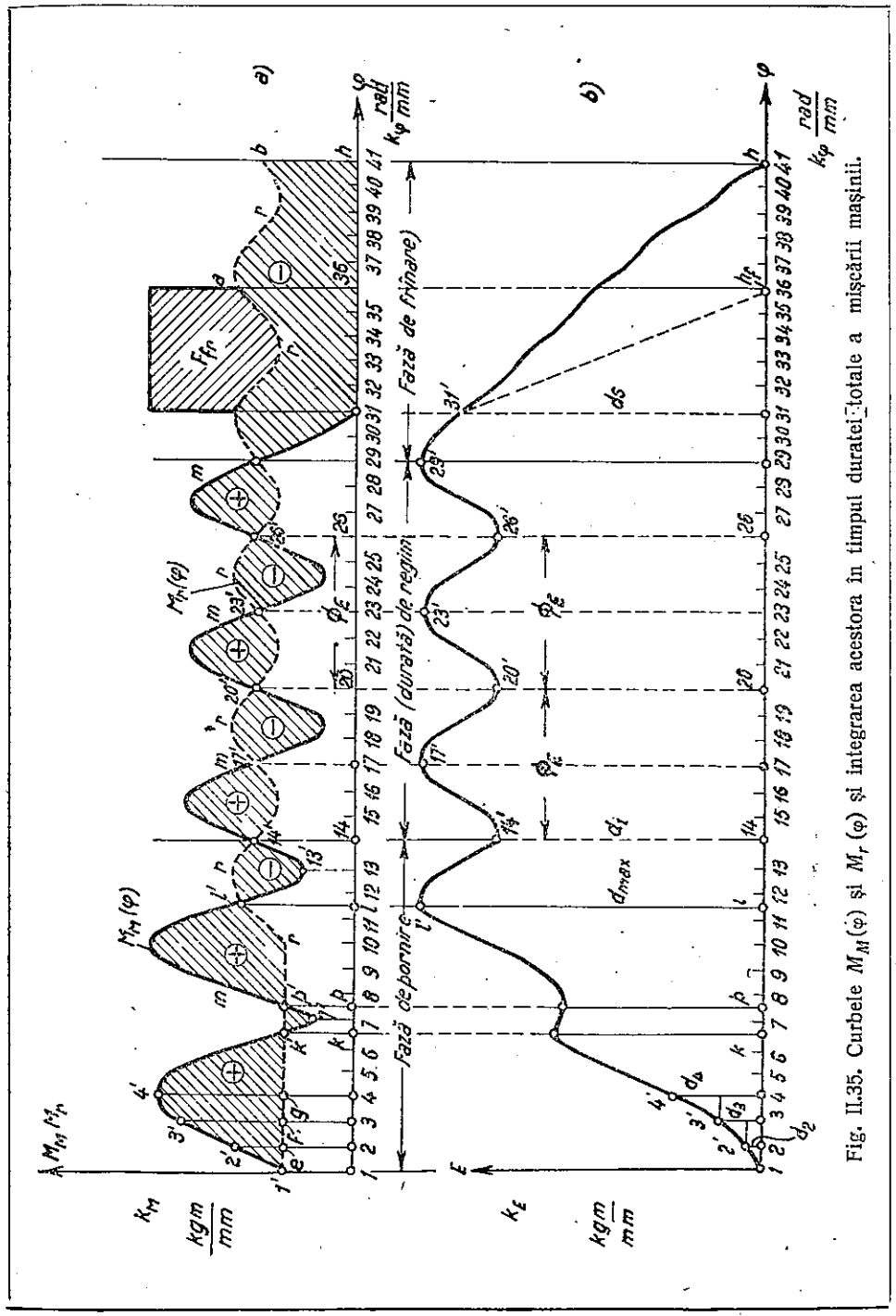


Fig. II.35. Curbele $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$ şi integrarea acestora în timpul duratei totale a mişcării maşinii.

Evident că după parcurgerea unui ciclu energetic Φ_E al maşinii valorile lui M_{red} se repetă, valoarea din *a* fiind egală cu cea din *f*.

Revenind la diagramele din fig. II.35, se precizează că timpul cît durează faza de regim este fixat de procesul tehnologic pentru care este creată maşina sau agregatul.

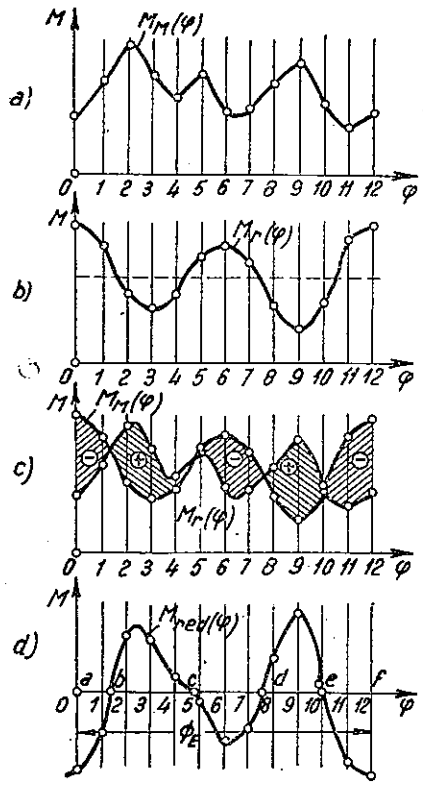


Fig. II.36. Curbele $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$ şi construcţia, prin însumare a lui $M_{red}(\varphi)=M_M(\varphi)-M_r(\varphi)$.

Aici faza de regim se consideră că începe în punctul de abscisă *29*. De aici mai departe momentul motor încetînd de a mai acţiona (el devine zero în punctul de abscisă *31*), maşina continuă să se mişte, consumînd în acest scop energia cinetică acumulată în faza de pornire, pînă cînd se opreşte (în punctul *b*).

In majoritatea cazurilor nu se aşteaptă ca energia cinetică acumulată în maşina aflată în mişcare să fie consumată de lucrul mecanic de frecare, ci — pentru a se scurta faza de oprire — se introduce un moment rezistent suplimentar (momentul de frînare) care absoarbe energia cinetică a maşinii,

In fig. II.35, *a* suprafaţa F_{fr} de deasupra curbei *r* a momentului rezistent $M_r(\varphi)$ este egală cu suprafaţa haşurată (*36*, *a*, *b*, *h*) aflată la dreapta abscisei *36*.

In funcţie de modul cum sînt redate diagramele de variaţie ale momentelor exterioare — fie ca în fig. II.35, *a*, fie ca în fig. II.36 — depinde şi modul de construcţie a lucrului mecanic efectuat.

Astfel, în cazul din fig. II.35 lucrul mecanic efectuat se construieşte sub forma curbei integrale, fiecare ordonată corespunzătoare unei anumite abscise fiind proporţională cu suprafaţa cuprinsă între curbele $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$ şi aflată la stînga ordonatei.

Pentru efectuarea acestei construcţii se alege un sistem de axe de coordonate:

$W=E-E_0$ pe ordonată la scara $k_E=k_M\cdot k_\varphi$ şi pe abscisă la aceeaşi scară k_φ.

In dreptul abscisei *2* se trasează ordonata *22'* care — la scară — reprezintă suprafaţa *1'2'e* din fig. II.35, *a*.

Energia cinetică, adică lucrul mecanic acumulat de maşină este deci:

$$W=E_2-E_1=k_\varphi k_M\ [\text{aria}\ (1,\ 1',\ 2',\ 2)-\text{aria}\ (1,\ 1',\ e,\ 2)]$$

sau

$$W=k_\varphi k_M\ \text{aria}\ (1',\ 2',\ e).$$

Dacă se admite că, la timpul *t*, avem $\omega=0$, adică maşina porneşte de la starea de repaus, atunci $W_1=0$, şi relaţia de mai sus se poate scrie:

$$W_2=k_\varphi k_M\ \text{aria}\ (1',\ 2',\ e)=k_E(\overline{22'})=k_E(\bar{d}_2).$$

In continuare, creşterea energiei cinetice în intervalul următor este:

$$E_3-E_2=k_\varphi k_M\ [\text{aria}\ (1',\ 3',\ f')-\text{aria}\ (1',\ 2',\ e)]=k_\varphi k_M\ \text{aria}\ (e,\ 2',\ 3',\ f');$$

$$W_3=k_E(\overline{33'})=k_E(\bar{d}_3).$$

Analog:

$$W_4=E_4-E_3=k_\varphi\cdot k_M\ \text{aria}\ (f',\ 3',\ 4'g')=k_E(\overline{44'})=k^E(\bar{d}_4).$$

Astfel se construieşte curba de variaţie a energiei cinetice a maşinii sau agregatului.

Pînă în punctul *k*, unde lucrul mecanic W_M al forţelor motoare este mai mare decît al rezistenţelor totale, energia cinetică a maşinii creşte, ceea ce rezultă imediat şi din ecuaţiile (II.36).

In *k* lucrul mecanic fiind — pentru o scurtă perioadă de timp — mai mic decît $W_r(\varphi)$, energia cinetică *E* scade, pentru ca apoi din punctul *p* să înceapă din nou să crească pînă în *l*, unde energia cinetică a maşinii atinge valoarea maximă:

$$E_{max}=k_E\ (\overline{ll'})=k_E\ (\bar{d}_{max}).$$

Faza de regim a funcţionării maşinii se consideră că începe în punctul de abscisă *14*.

Se vede că la începutul acestei faze energia cinetică atinge valoarea minimă egală cu:

$$E_{min}=k_E(\overline{14,\ 14'})=$$

$$=k_E(\bar{d}_l)=k_\varphi k_M\ [\text{aria}\ (1',\ 4',\ k',\ 1')-\text{aria}\ (k',\ 7',\ p',\ k')+$$

$$+\ \text{aria}\ (p',\ m,\ l',\ r,\ p')-\text{aria}\ (l',\ r,\ 14',\ 13',\ l')].$$

S-a arătat mai înainte că energia cinetică de la începutul fazei de regim se putea realiza într-un timp mult mai scurt, dacă în faza de demaraj am fi avut $M_r=0$, adică dacă aria $(1,\ 1',\ k',\ p',\ r,\ 14',\ 14)=0$.

In acest caz maşina pornea „în gol".

In timpul fazei de regim energia cinetică creşte la început (porţiunea *14'*, *17'*), cînd $W_M>W_r$, apoi scade, atunci cînd $W_M<W_r$ (porţiunea *17'*, *20'*).

Energia cinetică va avea maxime la intersecţia curbelor de moment *m* şi *r* în punctele de abscise *17*, *23* şi *29*, şi minime — la intersecţia aceloraşi curbe în punctele de abscise *14*, *20*, *26*.

Se constată că periodicitatea de variaţie a energiei cinetice este Φ_E, identică cu a vitezei unghiulare ω, după cum se va arăta mai departe. Această periodicitate a fost denumită — după cum s-a arătat şi mai înainte — ciclul energetic al maşinii.

Din punctul *29'*, de unde se consideră terminată faza de regim, energia cinetică a maşinii scade treptat.

In punctul de abscisă *31*, cînd $M_M(\varphi)=0$, energia cinetică a maşinii are valoarea:

$$E=k_E(\overline{31,\ 31'})=k_E(\overline{d_s}).$$

Construcţia diagramei energiei cinetice se continuă în timpul fazei de oprire, în cele două alternative, şi anume:

— cînd energia cinetică este absorbită numai de lucrul mecanic rezistent $W_r(\varphi)$ (curba trasată continuu *31h* din fig. II.35, *b*);

— cînd energia cinetică este absorbită şi de lucrul mecanic al forţelor de frînare (curba trasată cu linii întrerupte *31'*, h_f din fig. II.35, *b*).

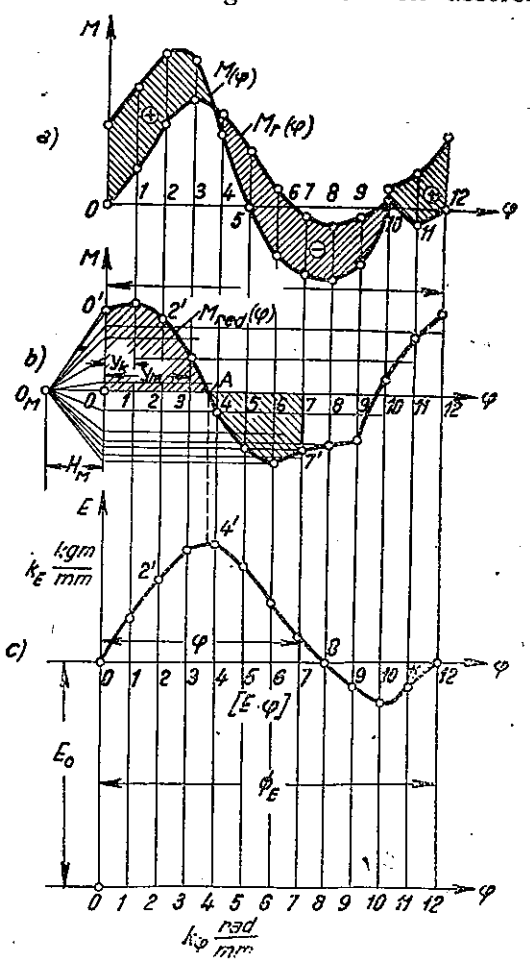


Fig. II.37. Construirea diagramei energiei cinetice prin integrarea grafică a curbei $M_{red}(\varphi)$.

Curba construită ca mai sus în fig. II.35, *b*, adică (*1*, *4'*, *l'*, *14'* ... *31'*, *h*) sau (*1*, *4'*, *l'*, ... *14'*, *31'*, h_f), după cele două cazuri, reprezintă diagrama de variaţie a energiei cinetice a maşinii în funcţie de unghiul de rotaţie al elementului de reducere.

Pentru simplificare, construcţia acestei diagrame este făcută pentru $2^1/_2$ cicluri energetice din faza de regim.

Pentru proiectanţi este important de precizat că suprafeţele dintre cele două curbe de variaţie ale lui $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$ se calculează fie prin planimetrare, cu aparate speciale, fie cu metode matematice, prin împărţirea suprafeţei în dreptunghiuri mici (metoda lui Simpson).

Construirea diagramei de variaţie a energiei cinetice, atunci cînd se dă diagrama de variaţie a lui $M_{red}(\varphi)$ (cazul din fig. II.36), se face prin integrare grafică.

In fig. II.37 se arată cum se face integrarea grafică a lui $M_{red}(\varphi)$.

Astfel, după ce s-au trasat în acelaşi sistem de coordonate $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$ în fig. II.37, *a*, şi s-au identificat porţiunile pozitive (unde $M_M > M_r$) şi cele negative (unde $M_M < M_r$), s-a trasat în fig. II.37, *b* curba $M_{red}(\varphi)$.

Evident că în timpul unui ciclu energetic Φ, suma suprafeţelor pozitive este egală cu a celor negative (în fig. II.37, *a*), iar în fig. II.37, *b* suprafeţele de deasupra axei $O\varphi$ sînt egale cu cele de sub această axă, deoarece valorile medii ale celor două momente sînt egale.

In fig. II.37, *c* se construieşte curba integrală a lui $M_{red}(\varphi)$, după metoda grafică cunoscută.

Distanţa polară H_M în mm determină scara k_E la care se va măsura energia cinetică $E=W(\varphi)$, şi anume:

$$k_E=H_M\cdot k_\varphi\cdot K_M\left[\frac{kgm}{mm}\right]. \qquad (II.170)$$

Astfel, valoarea energiei cinetice din faza de regim corespunzătoare unghiului de rotaţie $\varphi=k_\varphi(\overline{O7})$ al elementului de reducere (fig. II.37, *c*) este:

$\Delta E_{0,7}=k_E(\overline{7D})$ kgm şi este egală cu (fig. II.37, *b*);

$\Delta E_{0,7}=k_\varphi\cdot k_M$ [aria (O, O', $2'$, A, O) — aria (A, 7, $7'$, A)].

La ordonatele energiei din faza de regim trebuie adăugată energia cinetică a maşinii acumulate în faza de demaraj, care se notează în cazul de faţă E_0.

Energia cinetică totală a maşinii sau a agregatului corespunzătoare unghiului φ este deci:

$$E_{0,\varphi}=E_0+\Delta E_{0,\varphi}. \qquad (II.171)$$

Este clar că valoarea lui E_0 are o importanţă fundamentală pentru funcţionarea maşinii, deoarece, după cum se constată din formula (II.171), energia cinetică a maşinii va avea variaţii cu atît mai mici, cu cît $\frac{\Delta E}{E_0}$ va fi mai mic.

11.2. Construirea diagramei $I_{red}(\varphi)$

Separat de diagramele $M_M(\varphi)$, $M_r(\varphi)$ şi $E(\varphi)$ trasate în fig. II.37, se trasează, folosind metoda cunoscută (§ 3), şi diagrama de variaţie a momentului de inerţie redus (I_{red}) în funcţie de poziţia elementului de reducere, adică $I_{red}(\varphi)$.

In fig. II.3 s-a construit variaţia grafică a momentului de inerţie redus $I_{red}(\varphi)$ la arborele motor pentru un motor Diesel în patru timpi cu un cilindru, a cărui schemă cinematică este redată în fig. II.2.

In fig. II.38, *b* este trasată diagrama de variaţie a momentului de inerţie redus la axa geometrică a arborelui motor (I_{red}) al motorului în stea cu un cilindru principal (*0*) şi 4 cilindri secundari, ale căror biele sînt articulate la manivela mecanismului principal.

Curbele de variaţie ale momentelor de inerţie reduse la axa geometrică sînt notate cu I_{red} (pentru mecanismul principal) şi cu $I_{red_1}-I_{red_4}$ pentru mecanismele secundare.

Curba de variaţie a lui $I_{red}(\varphi)$ a rezultat din însumarea celor 5 momente de inerţie reduse. Ciclul de variaţie este, după cum se vede în figură, egal cu $\Phi_E=2\pi$.

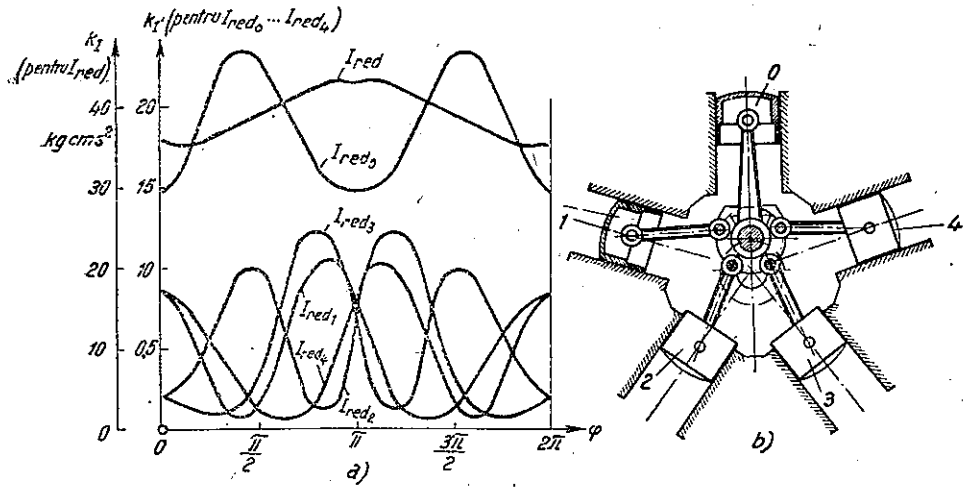


Fig. II.38. Diagrama de variaţie a lui $I_{red}(\varphi)$, (fig. II.38, *a*) la un motor în stea cu cilindri (*0* cilindrul principal şi *1 . . . 4* cilindrii secundari din fig. II.38, *b*); prin însumarea diagramelor $I_{red\,0} \dots I_{red\,4}$ se obţine I_{red}.

In fig. II.65 şi II.66 sînt redate curbe $I_{red}(\varphi)$ pentru diferite tipuri de motoare Diesel în doi şi patru timpi.

11.3. *Construirea diagramei* $E(I_{red})$

Cu ajutorul diagramelor $E(\varphi)$ din fig. II.35 sau fig. II.37 şi $I_{red}(\varphi)$ din fig. II.3 (sau II.38), se poate construi diagrama $E(I_{red})$ prin eliminarea pe cale grafică a lui φ dintre cele două curbe.

Pentru aceasta curbele se aşază aşa cum este arătat în fig. II.39.

Axa I_{red} a diagramei $I_{red}(\varphi)$ se orientează paralel cu axa φ a diagramei $E(\varphi)$, astfel încît axa φ din diagrama $I_{red}(\varphi)$ devine paralelă cu axa E din diagrama $E(\varphi)$.

Intersecţia axelor φ din diagramele $E(\varphi)$ şi $I_{red}(\varphi)$ formează originea O_1 a diagramei $E(I_{red})$.

Pentru claritatea construcţiei, diagrama $E(\varphi)$ s-a trasat astfel, încît fiecărei dintre cele trei faze ale mişcării maşinii îi corespunde un ciclu energetic, deşi în realitate — după cum s-a mai arătat — fiecare fază este compusă dintr-un mare număr de cicluri energetice.

In fig. II.39, *a* porţiunea *0—12* corespunde fazei de pornire (demarajului); porţiunea *12—24*, fazei de regim, şi *24—36*, fazei de oprire.

Energia cinetică acumulată în faza de pornire este în acest caz

$$E_0 = k_E(\overline{12}, \overline{12'}).$$

In fig. II.39, *b* s-a trasat diagrama $I_{red}(\varphi)$ corespunzătoare unui ciclu energetic care, în cazul de faţă, este egal chiar cu ciclul de variaţie al lui I_{red} (aşa cum este cazul la maşinile de abur cu un cilindru).

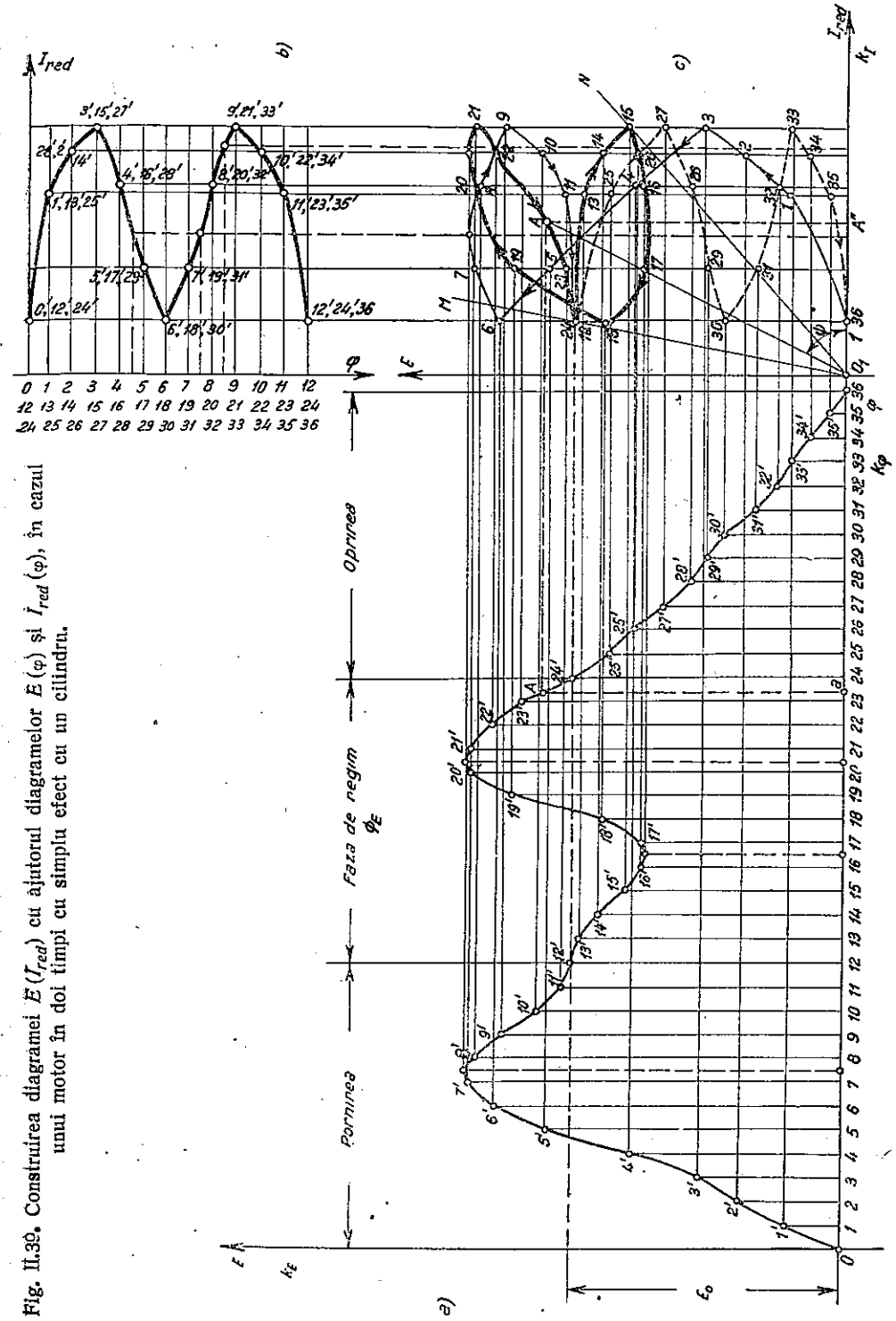


Fig. II.39. Construirea diagramei $E(I_{red})$ cu ajutorul diagramelor $E(\varphi)$ şi $I_{red}(\varphi)$, în cazul unui motor în doi timpi cu simplu efect cu un cilindru.

Diagrama $E(I_{red})$ din fig. II.39, *c* începe din punctul *1*, unde dreapta $O'12'$ din diagrama $I_{red}(\varphi)$ intersectează prelungirea axei φ a diagramei $E(\varphi)$.

Punctul următor al diagramei $E(I_{red})$ se obţine la intersecţia dreptei $1'1 \parallel O\varphi$ din diagrama $E(\varphi)$ cu dreapta $1'11'1 \parallel O\varphi$ din diagrama $I_{red}(\varphi)$.

Analog se obţin punctele *2, 3, ..., 12* corespunzătoare fazei de pornire, care, unite printr-o linie continuă, dau curba *(1, 2, 3, ..., 12)*.

Incepînd de la punctul *12* pînă la punctul *24* se obţine curba închisă $E(I_{red})$ corespunzătoare fazei de regim *(12, 13, ..., 24)*.

După încetarea acţiunii momentului motor M_M, curba $E(I_{red})$ coboară din punctul *24* pînă în punctul *36* (confundat cu punctul *1*).

Diagrama $E(I_{red})$, care apare trasată complet în fig. II.39, *b* este denumită diferit. Este cunoscută în unele tratate şi cu denumirea de „diagrama masă–energie cinetică". In cazul de faţă ea se numeşte diagrama „energie cinetică–moment de inerţie".

11.4. Determinarea vitezei unghiulare a elementului de reducere cu ajutorul diagramei $E(I_{red})$

S-a arătat că viteza unghiulară a elementului de reducere nu poate fi constantă, deoarece atît energia cinetică E, cît şi momentul de inerţie redus I_{red}, variază cu poziţia φ a elementului de reducere.

Diagrama $E(I_{red})$ permite determinarea variaţiei vitezei unghiulare în timpul celor trei faze ale mişcării maşinii şi în interiorul fiecărei faze, pentru orice poziţie a elementului de reducere.

In adevăr, expresia energiei cinetice la un moment dat este

$$E=\frac{1}{2} I_{red}\,\omega^2,$$

de unde

$$\frac{\omega^2}{2}=\frac{E}{I_{red}}. \tag{II.172}$$

In diagrama $E(I_{red})$ valoarea lui $\frac{\omega^2}{2}$ va fi astfel reprezentată prin tangenta trigonometrică a unghiului ψ format de axa I_{red} cu dreapta care uneşte originea O_1 a axelor E, I_{red}, cu punctul figurativ de pe curba $E(I_{red})$.

Din formula (II.172) rezultă imediat

$$\omega=\sqrt{2\frac{E}{I_{red}}}. \tag{II.172'}$$

Pentru un punct oarecare A' din diagrama $E(\varphi)$, viteza unghiulară ω se află după cum urmează:

Se găseşte punctul A din diagrama $E(I_{red})$ corespunzător lui A' din diagrama $E(\varphi)$.

De aici rezultă:

$$E=k_E(\overline{AA''})=k_E y;$$
$$I_{red}=k_I(\overline{O_1A''})=k_I x,$$

care, fiind înlocuite în (II.172'), dau:

$$\omega=\sqrt{2\frac{k_E}{k_I}\frac{y}{x}}=\sqrt{2\frac{k_E}{k_I}\operatorname{tg}\psi}. \tag{II.173}$$

Formula (II.173) permite determinarea lui ω pentru orice poziţie a elementului de reducere, atunci cînd este dată diagrama $E(I_{red})$.

11.5. Trasarea diagramei $\omega(\varphi)$

Diferitele valori ale lui ω corespunzătoare poziţiilor elementului de reducere obţinute cu ajutorul formulei (II.173) se pot trasa într-o diagramă $\omega(\varphi)$, ca în fig. II.40.

Evident că atunci cînd se cunoaşte E_0, este importantă numai curba de variaţie a lui $\omega(\varphi)$ din timpul unui ciclu energetic al fazei de regim.

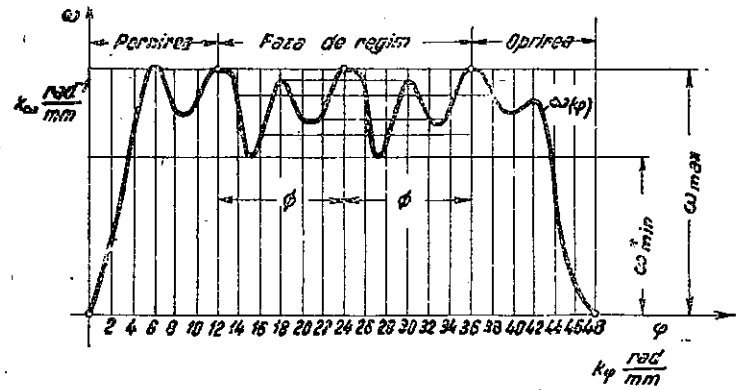


Fig. II.40. Diagrama $\omega(\varphi)$ construită ce ajutorul diagramei $E(I_{red})$.

Vitezele unghiulare maxime şi minime din timpul fazei de regim se găsesc ducînd tangentele din originea O_1 la curba închisă, corespunzătoare mişcării de regim.

Cele două tangente O_1M_1 şi O_1N_1 (fig. II.41) determină unghiurile $\psi_{1\,max}$ şi $\psi_{1\,min}$.

Cu aceste unghiuri şi cu formula (II.173) se găsesc cele două valori:

$$\omega_{max}=\sqrt{2\frac{k_E}{k_I}\operatorname{tg}\psi_{max}}; \tag{II.174}$$

$$\omega_{min}=\sqrt{2\frac{k_E}{k_I}\operatorname{tg}\psi_{min}}, \tag{II.175}$$

care determină ordonatele maximă şi minimă ale fazei de regim din diagrama $\omega(\varphi)$ (v. fig. II.40).

Cu ajutorul curbei $\omega(\varphi)$ se obţine apoi uşor acceleraţia unghiulară ε, precum şi acceleraţiile normală şi tangenţială ale punctului de reducere.

Curba $\varepsilon(\varphi)$ se poate construi prin derivarea grafică a curbei $\omega(\varphi)$ după una dintre metodele cunoscute.

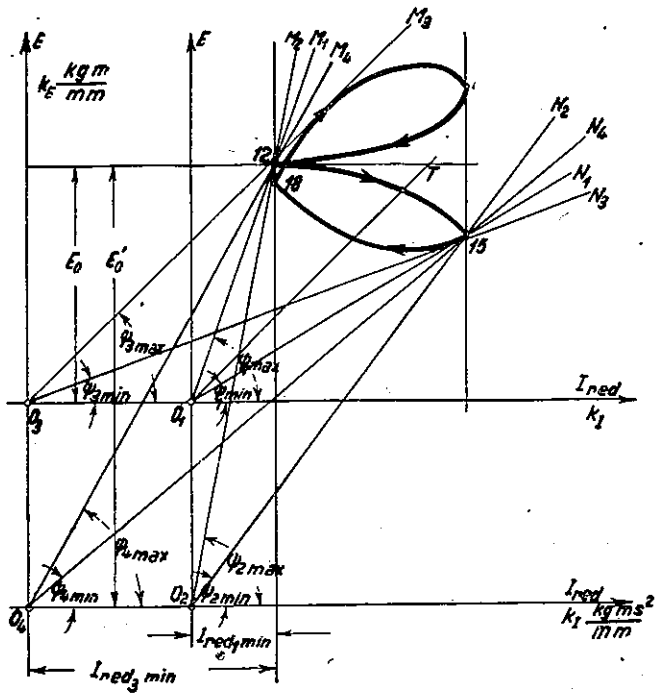


Fig. II.41. Influenţa energiei cinetice şi a momentului de inerţie redus asupra vitezei unghiulare a elementului de reducere.

Cu ajutorul acesteia se obţine apoi:

$$a_A^\tau = \varepsilon \overline{OA}$$

şi

$$a_A^\nu = \omega^2 \overline{OA},$$

unde $\overline{OA}$ este lungimea manivelei la butonul căreia s-a făcut reducerea maselor.

Curba de variaţie a timpului se poate obţine cu formula (II.160)

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega}.$$

Grafic $t(\varphi)$ se poate construi dacă în prealabil se trasează curba

$$\omega_t(\varphi) = \frac{1}{\omega}(\varphi),$$

după aceeaşi metodă indicată în fig. II.34. După aceasta se face integrarea grafică:

$$t(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \omega_t \, d\varphi.$$

In concluzie, cu ajutorul diagramei $E(I_{red})$ se poate studia complet mişcarea unei maşini sau agregat, dacă — după cum s-a precizat la început — forţele exterioare depind de poziţia φ a elementului de reducere.

Metoda de mai sus se poate aplica însă — după cum a rezultat din însăşi construcţia diagramei — numai dacă se dă starea iniţială a mişcării de regim E_0.

Aceasta echivalează cu cunoaşterea originii O_1 a axelor de coordonate ale curbei $E(I_{red})$.

In adevăr, dacă nu se cunoaşte energia cinetică E_0 de la începutul mişcării de regim, atunci originea O_1 nu este definită şi, în consecinţă, ducerea tangentelor O_1M_1; O_1N_1 la curba $E(I_{red})$ sau a unei secante O_1T (fig. II.41) pentru aflarea unghiurilor ψ_{1max}; ψ_{1min}, respectiv ψ, nu este posibilă. Din această cauză viteza unghiulară ω a elementului de reducere rămîne necunoscută.

Dacă la acelaşi moment de inerţie redus minim $I_{red_1 min}$ al maşinii energia cinetică E_0 la starea iniţială creşte pînă la valoarea E_0' (fig. II.41), atunci şi viteza unghiulară creşte, deoarece:

$$\psi_{2max} > \psi_{1max} \quad \text{şi} \quad \psi_{2min} > \psi_{1min}.$$

Dacă la aceeaşi valoare E_0 a energiei cinetice a maşinii la începutul fazei de regim momentul de inerţie redus minim creşte pînă la valoarea $I_{red_2 min}$, atunci viteza unghiulară scade, deoarece:

$$\psi_{3max} < \psi_{1max} \quad \text{şi} \quad \psi_{3min} < \psi_{1min}.$$

In cazul cînd cresc atît E_0 cît şi $I_{red\,min}$, astfel încît originea ajunge în O_4, deşi viteza unghiulară maximă scade (deoarece $\psi_{4max} < \psi_{1max}$), viteza unghiulară minimă creşte (deoarece $\psi_{4min} > \psi_{1min}$).

Rezultă de aici că oscilaţiile valorilor vitezelor unghiulare ale elementului de reducere se micşorează, astfel că agregatul sau maşina va avea o viteză unghiulară aproape constantă.

Această observaţie are o importanţă capitală în studiul volantului, după cum se va vedea mai departe (§§ 17, 18).

§ 12. REZOLVAREA ECUAŢIILOR DE MIŞCARE CU AJUTORUL DIAGRAMEI $E(\omega)$

Ecuaţia de mişcare a maşinii scrisă sub formă finită (energia cinetică a maşinii) între două stări 0 şi 1 din faza de regim este

$$W = W_{01} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{red} \, d\varphi = \frac{1}{2} I_{red_1} \omega_1^2 - \frac{1}{2} I_{red_0} \omega_0^2. \qquad \text{(a)}$$

Valorile lui I_{red_0} şi I_{red_1} din ecuaţia de mai sus se obţin din diagrama $I_{red}(\varphi)$, reprezentată de exemplu în fig. II.38.

Dacă se cunoaşte starea iniţială 0, deci şi ω_0, rezolvarea ecuaţiei de mişcare nu mai prezintă nici o dificultate matematică.

Din punct de vedere practic problema se poate simplifica printr-o construcţie grafică a curbei $\omega(\varphi)$, fără a mai fi nevoie de aflarea în prealabil a curbei $E(I_{red})$.

Pentru aceasta este necesară introducerea noţiunilor de energie cinetică fictivă — E_f, viteză unghiulară fictivă — ω_f şi moment de inerţie redus fictiv — I_f.

In acest caz ecuaţia (a) se poate scrie:

$$W = W_{01} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{red} \, d\varphi = \frac{1}{2} I_f \omega_{f_1}^2 - \frac{1}{2} I_f \omega_{f_0}^2 \qquad \text{(II.176)}$$

sau

$$W = E_{f_1} - E_{f_0}; \qquad \text{(II.177)}$$

ω_{f_1}, ω_{f_0} şi I_f se aleg astfel, încît să existe identitate între membrii ai doilea ai celor două ecuaţii (a) şi (II.176), adică:

$$\frac{1}{2} I_f \omega_{f_1}^2 \equiv \frac{1}{2} I_{red_1} \omega_1^2$$

şi

$$\frac{1}{2} I_f \omega_{f_0}^2 \equiv \frac{1}{2} I_{red_0} \omega_0^2.$$

Dacă se alege în mod arbitrar valoarea I_f, atunci din identităţile de mai sus rezultă:

$$\omega_1 = \omega_{f_1} \sqrt{\frac{I_f}{I_{red_1}}}; \quad \omega_0 = \omega_{f_0} \sqrt{\frac{I_f}{I_{red_0}}}$$

sau, în general,

$$\omega = \omega_f \sqrt{\frac{I_f}{I_{red}}}. \tag{II.178}$$

Analitic, calculul se conduce prin aflarea lui ω_{f_1} din ecuaţia (II.176) în funcţie de toate celelalte valori cunoscute. Apoi, cu ajutorul formulei (II.178), se calculează valoarea reală a vitezei unghiulare ω_1 în momentul considerat.

Grafic, problema se rezolvă după cum se arată mai jos:

a) Intr-o diagramă (W, φ) se construieşte curba $W(\varphi) = W_M(\varphi) - W_r(\varphi) = \int M_{red}\, d\varphi$, care reprezintă — după cum se ştie — curba lucrului mecanic al forţelor exterioare. Construcţia se face după aceeaşi metodă indicată în fig. II.35 sau în fig. II.37.

In cazul de faţă, curba $W(\varphi) = \int M_{red}\, d\varphi$ este redată în fig. II.42, *a*.

b) Se alege apoi o valoare arbitrară a lui I_f. De regulă, această valoare se alege egală cu $I_{red\ min}$ (v. fig. II.38). Alegerea prezintă avantajul că, în cazul cînd $I_{red\ max} - I_{red\ min} = \Delta I_{red}$ este mic, atunci

$$\frac{I_f}{I_{red}} = \frac{I_{red\ min}}{I_{red}} \cong 1 \quad \text{şi deci} \quad \omega \cong \omega_f.$$

Cu valoarea lui *If* se construieşte curba de variaţie a energiei cinetice fictive:

$$E_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2.$$

Această ecuaţie construită într-un sistem de axe de coordonate (E, ω) reprezintă o parabolă tangentă în origine la axa ω (fig. II.42, *b*).

Valorile lui W şi E_f se măsoară la aceeaşi scară pe axa ordonatelor, comună celor două curbe $W(\varphi)$ şi $E_f(\omega)$.

c) Se procedează acum la eliminarea pe cale grafică a lui $E_f = W$ dintre cele două curbe.

Pentru aceasta se procedează la fel cum s-a procedat şi în fig. II.39, însă construcţia se aranjează puţin diferit [această metodă de construcţie se utilizează în multe cazuri şi la determinarea lui $E(I_{red})$ din $E(\varphi)$ şi $I_{red}(\varphi)$].

Astfel, fie un punct A de pe curba $W(\varphi)$. Valorii lui $W = \int M_{red}\, d\varphi = k_E \times (\overline{Aa})$ corespunzătoare punctului A îi corespunde o valoare a unghiului φ dată de segmentul $\overline{Oa}$.

Viteza unghiulară fictivă ω_f, corespunzătoare valorii energiei cinetice fictive E_f, egală cu W a punctului A, se obţine ducînd din A paralela la axa verticală pînă cînd intersectează curba $E_f(\omega)$ în punctul A'. De aici se duce o orizontală care intersectează axa $O\omega$ în punctul a', care dă valoarea lui ω_f:

$$\omega_f = k_\omega (\overline{Oa'}). \tag{b}$$

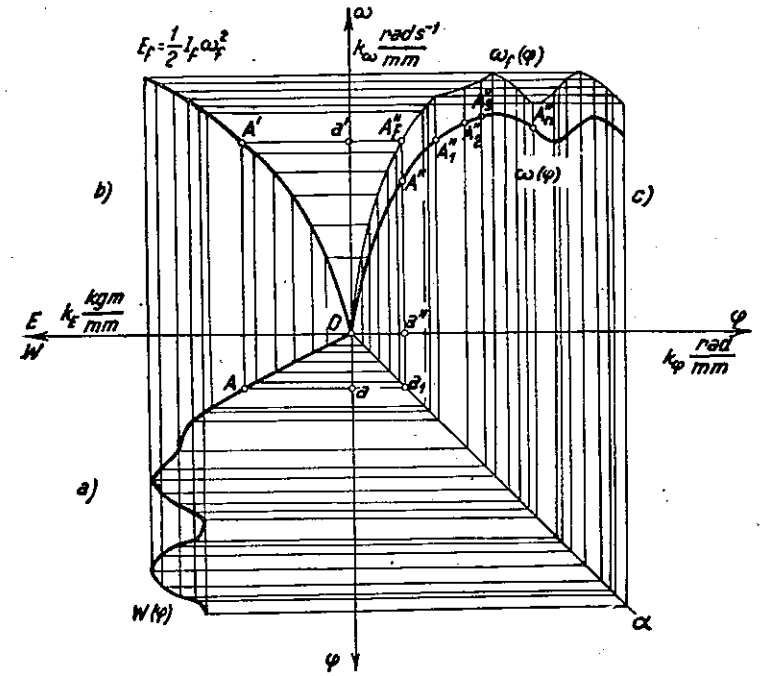


Fig. II.42. Aflarea curbei $\omega(\varphi)$ cu ajutorul curbei $E_f(\omega)$.

Acestui ω_f îi corespunde astfel un unghi de rotaţie al manivelei dat de segmentul $\overline{Oa}$, adică

$$\varphi = k_\varphi (\overline{Oa}). \tag{c}$$

Într-un sistem de axe (ω, φ) se reprezintă punctul A_f'' ale cărui coordonate sînt segmentele determinate de expresiile (b) şi (c).

Punctul A_f'' se reprezintă în fig. II.42, *c* cu ajutorul construcţiei următoare:

Din O se duce o dreaptă $O\alpha$, care face un unghi de 45° cu orizontala. Se prelungeşte orizontala Aa pînă cînd intersectează dreapta $O\alpha$ în punctul a_1. De aici se duce o verticală care intersectează axa orizontală $O\varphi$ în punctul a''.

Prelungirea acestei verticale intersectează dreapta $A'a'$ în punctul A''_f căutat.

d) Pentru aflarea vitezei unghiulare reale ω se foloseşte formula (II.178). Astfel se obţine punctul A'' care dă pe

$$\omega=\omega_f\sqrt{\frac{I_f}{I_{red}}}=k_\omega(\overline{Oa'})\sqrt{\frac{I_f}{I_{red}}}=k_\omega(\overline{a''A''}).$$

Făcînd aceeaşi construcţie pentru o serie de puncte de pe curba $W=\int M_{red}\,d\varphi$, se obţin punctele A''_1; $A''_2,\ldots,A''_n$ din diagrama (ω,φ).

Unindu-le printr-o curbă continuă, se obţine curba $\omega(\varphi)$ trasată cu linie continuă.

Curba trasată cu linie întreruptă este $\omega_f(\varphi)$.

Cu ajutorul curbei $\omega(\varphi)$ se poate apoi uşor construi prin derivare grafică curba $\varepsilon(\varphi)$ şi afla timpul şi acceleraţia totală, aşa cum s-a arătat la § 11.5.

§ 13. REZOLVAREA ECUAŢIILOR DE MIŞCARE CU AJUTORUL METODEI LUI N. E. JUKOVSKI. STUDIUL DINAMIC GENERAL AL MAŞINII

13.1. Transformarea ecuaţiei lui Lagrange

Ecuaţia de mişcare a maşinii sub forma ecuaţiei lui Lagrange (II.154) se poate pune şi sub forma

$$M_{red}-I_{red}\frac{d\omega}{dt}-\frac{\omega^2}{2}\frac{dI_{red}}{d\varphi}=0. \qquad \text{(II.179)}$$

Ecuaţia de mişcare scrisă sub această formă reprezintă echilibrul dinamic al agregatului sub acţiunea momentelor forţelor exterioare şi ale celor de inerţie.

Momentele forţelor de inerţie din ecuaţia de mai sus sînt datorite mişcării variate a elementului de reducere, mişcare care se poate imagina descompusă în două:

— o mişcare cu viteza unghiulară ω constantă şi egală cu cea reală (deci fără acceleraţie unghiulară), şi

— o mişcare cu viteza unghiulară $\omega=0$ şi cu acceleraţia unghiulară a elementului de reducere egală cu ε.

Primei mişcări N. E. Jukovski i-a dat numele de mişcare permanentă sau, mişcare de bază, iar celei de-a doua — mişcare adiţională sau iniţială.

a) Mişcarea de bază sau permanentă este deci caracterizată prin $\omega=$ const. egală cu viteza unghiulară instantanee a elementului de reducere şi $\varepsilon=0$.

b) Mişcarea adiţională sau iniţială este caracterizată prin $\omega=0$;

$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$, unde ω este viteza unghiulară a mişcării de bază.

Mişcării de bază îi corespunde momentul redus al forţelor de inerţie dat de relaţia

$$M_{ib}=-\frac{\omega^2}{2}\frac{dI_{red}}{d\varphi}. \qquad \text{(II.180)}$$

Mişcării adiţionale îi corespunde momentul redus al forţelor de inerţie dat de relaţia

$$M_{ia}=-I_{red}\frac{d\omega}{dt}. \qquad \text{(II.181)}$$

Cu expresiile notate mai sus, ecuaţia (II.179) se poate scrie

$$M_{red}+M_{ia}+M_{ib}=0. \qquad \text{(II.182)}$$

13.2. Determinarea momentului M_{ib} datorit mişcării de bază

Valoarea lui M_{ib} se poate determina prin mai multe metode, după modul cum este dată variaţia lui I_{red}.

a) Dacă I_{red} este dat sub forma unei funcţii de unghiul de rotaţie φ al elementului de reducere, atunci $\frac{dI_{red}}{d\varphi}$ se obţine imediat prin derivarea funcţiei $I_{red}(\varphi)$. Această derivată înmulţită cu factorul $-\frac{\omega^2}{2}$ dă valoarea lui M_{ib}, conform ecuaţiei (II.180). La § 3.1.1. s-a arătat cum se pot determina analitic $\Delta I_{red}(\varphi)$ şi $\frac{d}{d\varphi}(\Delta I_{red})$ în cazul unui mecanism bielă-manivelă.

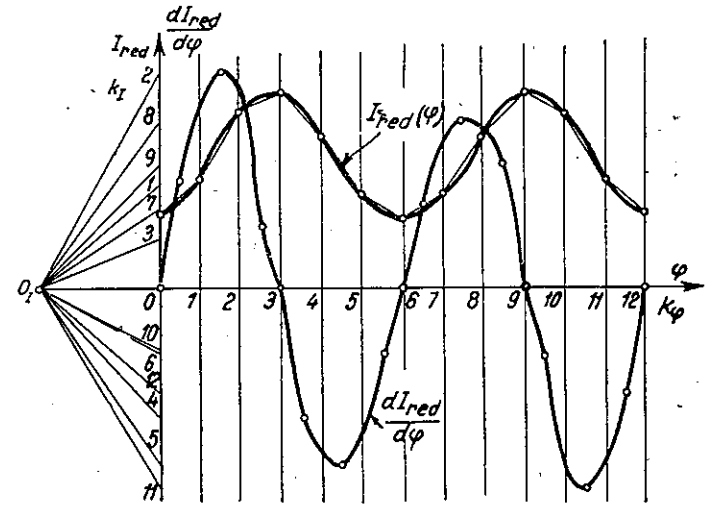


Fig. II.43. Curbele de variaţie ale momentului de inerţie redus I_{red} şi a derivatei lui în raport cu φ, $\left(\frac{dI_{red}}{d\varphi}\right)$, construite cu ajutorul planului vitezelor $I_{red}(\varphi)$ şi derivarea grafică a lui $I_{red}(\varphi)$

b) Dacă I_{red} este dat sub forma unei diagrame $I_{red}(\varphi)$, cum este redată, de exemplu, în fig. II.43, atunci curba $\frac{dI_{red}}{d\varphi}$ se obţine cu ajutorul metodei derivării grafice, după cum este arătat în figură.

Prin înmulţirea ordonatelor curbei $\frac{dI_{red}}{d\varphi}$ cu factorul $-\frac{\omega^2}{2}$ se obţine diagrama M_{ib}, conform aceleiaşi ecuaţii (II.180).

c) Cea mai elegantă metodă de determinare a lui M_{ib} este dată însă de metoda pîrghiei lui N. E. Jukovski.

In acest scop se calculează forţele de inerţie ale tuturor elementelor maşinii sau agregatului al cărui element de reducere este considerat în mişcare de rotaţie uniformă cu viteza unghiulară ω.

Se construieşte planul vitezelor rotit cu 90° şi în punctele de aplicaţie corespunzătoare celor din planul mecanismului se plasează forţele de inerţie în mărime, direcţie şi sens.

Scriind echilibrul planului vitezelor — considerat ca pîrghie rigidă — în raport cu polul vitezelor, se obţine momentul de inerţie de echilibrare, care, luat cu semn schimbat, este tocmai M_{ib} căutat al forţelor de inerţie ale mişcării de bază.

13.3. Determinarea lui M_{ia} datorit mişcării iniţiale

Această determinare se face foarte uşor cu ajutorul ecuaţiei (II.182). Dacă s-a determinat M_{ib} cu ajutorul metodelor arătate la § 13.2, iar M_{red} este cunoscut din diagramă, atunci

$$M_{ia} = -I_{red}\frac{d\omega}{dt} = -M_{red} - M_{ib}. \qquad \text{(II.183)}$$

O dată M_{ia} determinat, se calculează acceleraţia unghiulară din ecuaţia

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{M_{ia}}{I_{red}}. \qquad \text{(II.184)}$$

13.4. Studiul dinamic general al maşinii

Calculul cinetostatic al maşinii s-a făcut considerînd că viteza unghiulară a elementului iniţial este constantă şi egală că viteza medie din faza de regim.

După cum s-a văzut în paragrafele anterioare, mişcarea reală a elementului iniţial sau a elementului de reducere nu este constantă, din cauza variaţiei momentelor exterioare şi a momentului de inerţie redus al maşinii sau agregatului.

Calculul cinetostatic al maşinii a fost făcut astfel pentru o mişcare de bază a cărei viteză unghiulară era egală cu ω_{med}.

Metoda prof. N. E. Jukovski permite rezolvarea cîmpletă a problemei fundamentale a dinamicii maşinilor, aşa cum a fost enunţată în § 1.

Problema se rezolvă după cum urmează:

a) Se determină, cu ajutorul ciclului termic al maşinii şi al diagramelor de variaţie ale lui M_r, curbele $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$ (fig. II.36, *a* şi II.36, *b*).

b) De aici — prin diferenţă — se determină curba $M_{red}(\varphi)$ (de exemplu în fig. II.36, *d*) şi, cu ajutorul acesteia, prin integrare grafică sau analitică [dacă $M_{red}(\varphi)$ este dat sub forma analitică], se determină curba $E(\varphi) = \int M_{red}\, d(\varphi)$, aşa cum s-au construit în fig. II.35 sau II.37.

c) Cu ajutorul lui $E(\varphi)$ şi $I_{red}(\varphi)$ (din fig. II.38) se construieşte apoi curba $E(I_{red})$ şi, din aceasta, diagrama $\omega(\varphi)$, aşa cum s-a construit în fig. II.39 şi II.40.

d) Pentru fiecare valoare a lui ω corespunzătoare poziţiei φ a elementului de reducere se construieşte planul vitezelor şi al acceleraţiilor, considerîndu-se $\omega = \text{const}$, deci în cazul mişcării de bază a maşinii.

e) Planul acceleraţiilor permite determinarea tuturor forţelor de inerţie ale elementelor maşinii sau mecanismului şi, cu metodele cunoscute, toate reacţiunile din articulaţii şi partea din momentul redus care face echilibru dinamic în mişcarea de bază.

f) Cu ajutorul lui ω şi al lui M_{ib} se determină apoi, conform § 13.3, acceleraţia unghiulară ε, pentru poziţia considerată φ a elementului de reducere.

g) Cu acceleraţia $a_A^\tau = \varepsilon \cdot \overline{OA}$ şi $v_A = 0$ ale elementului de reducere se construieşte planul acceleraţiilor în mişcarea iniţială.

Deoarece viteza elementului de reducere este egală cu zero, rezultă că în planul acceleraţiilor nu vor exista acceleraţii centripete şi toate acceleraţiile ce vor rezulta din construcţia grafică vor avea aceeaşi direcţie cu vitezele.

In consecinţă, planul acceleraţiilor din mişcarea iniţială este asemenea planului vitezelor din mişcarea de bază.

Construcţia planului acceleraţiilor din mişcarea iniţială este deci foarte simplă, deoarece se poate face suprapus cu planul vitezelor din mişcarea de bază.

h) Se determină apoi forţele de inerţie care rezultă din mişcarea iniţială şi, cu ajutorul acestora, reacţiunile din articulaţii şi partea din momentul redus M_M, care face echilibru dinamic în mişcarea iniţială.

i) Prin suprapunerea rezultatelor din cele două calcule se obţin toate reacţiunile în articulaţii, necesare la dimensionarea sau verificarea calculului de rezistenţă al elementelor maşinii.

Calculul se poate face şi prin suprapunerea în prealabil a celor două planuri ale acceleraţiilor (din mişcarea de bază şi cea iniţială) şi, cu ajutorul acceleraţiilor rezultante, să se determine reacţiunile în articulaţii.

13.5. Aplicaţie

La un motor cu un cilindru la care se cunosc diagramele $M_{red}(\varphi)$ şi $I_{red}(\varphi)$ se cere să se calculeze reacţiunile în articulaţii (fig. II.44).

Pentru o poziţie oarecare a elementului iniţial (manivela) luat ca element de reducere (fig. II.44, *c*) se construieşte planul vitezelor (fig. II.44, *b*) şi planul acceleraţiilor

(fig. II.44, *c*), luînd drept viteză unghiulară $\omega=\text{const}$, valoarea lui ω din diagrama $\omega(\varphi)$ corespunzătoare unghiului φ. Această viteză constituie mişcarea de bază a maşinii.

Se obţine astfel:

$$v_B=k_v(\overline{p'b'});\quad a_B=k_a(\overline{p''b''});\quad a_{G_2}=k_a(\overline{p''g_2''}).$$

Cu ajutorul planului acceleraţiilor (trasat cu linii continue) se determină forţele de inerţie şi apoi, folosind metoda pîrghiei lui N. E. Jukovski, se determină M_{ib} — momentul redus al forţelor de inerţie ale mişcării de bază.

Din fig. II.44, *a* s-au determinat forţele de inerţie ale bielei şi pistonului, corespunzătoare lui $\omega=\text{const}$.

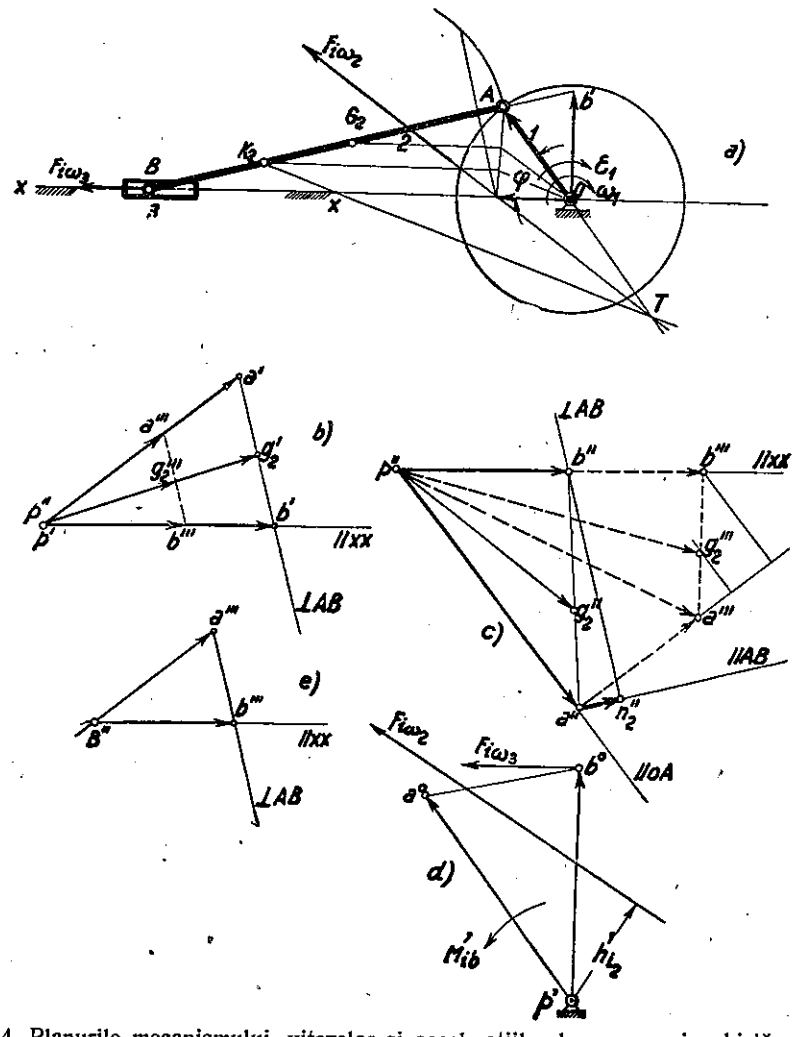


Fig. II.44. Planurile mecanismului, vitezelor şi acceleraţiilor la un mecanism bielă-manivelă pentru mişcarea de bază şi iniţială.

Astfel, pentru bielă se obţine:

$$F_{i\omega_2}=-m_2k_a(\overline{p''g_2''}).$$

iar pentru piston:

$$F_{i\omega_3}=-m_3k_a(\overline{p''b''}).$$

Aceste forţe se transpun în punctele corespunzătoare din planul vitezelor rotit cu 90° (fig. II.44, *d*).

Se scrie apoi ecuaţia de momente în raport cu polul p', obţinîndu-se momentul de echilibrare $M_{eb}=-M_{ib}$ al forţelor de inerţie pentru mişcarea de bază, după cum se arată mai jos.

Din ecuaţia de momente în raport cu p' rezultă:

$$M'_{ib}=(h'_{i_2})\cdot F_{i\omega_2}+(\overline{p'b'})\cdot F_{i\omega_3};$$

M_{ib} se obţine apoi imediat ştiind că

$$M'_{ib}=M_{ib}\cdot\frac{(\overline{p'a'})}{\overline{OA}}=\frac{1}{k_v}M_{ib}\cdot\omega_1,$$

de unde

$$M_{ib}=\frac{k_vM'_{ib}}{\omega_1}=-\frac{\omega^2}{2}\frac{dI_{red}}{d\varphi}.$$

Cu valoarea lui M_{ib} introdusă în (II.182) se obţine M_{ia} (momentul redus al forţelor de inerţie din mişcarea adiţională):

$$M_{ia}=-I_{red}\frac{d\omega}{dt}=-M_{ib}-M_{red}.$$

De aici se determină apoi acceleraţia unghiulară corespunzătoare mişcării adiţionale:

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{M_{ib}+M_{red}}{I_{red}}.$$

Cu această valoare se determină în continuare acceleraţia tangenţială a butonului de manivelă

$$a_A^\tau=\overline{OA}\cdot\varepsilon,$$

după care se construieşte un nou plan al acceleraţiilor considerînd $\omega_1=0$.

Planul acceleraţiilor pentru mişcarea adiţională este construit în fig. II.44, *e*.

Deoarece $\omega=0$, evident că se va avea

$$v_A=0;\quad v_{BA}=0;\quad v_B=0,$$

deci şi

$$a_A^\nu=\frac{v_A^2}{OA}=0;\quad a_{BA}^\nu=\frac{v_{BA}^2}{AB}=0.$$

Construcţia planului acceleraţiilor se poate astfel face chiar pe cel al vitezelor din mişcarea de bază (fig. II.44, *b*).

Notînd cu a'_A, a'_B etc. acceleraţiile din mişcarea adiţională, se obţine:

$$\overline{a}'_A=k_a(\overline{p'a'''});\quad \overline{a}'_B=k_a(\overline{p'b'''}).$$

Se face apoi calculul acceleraţiilor rezultante prin însumarea vectorială a acceleraţiilor celor două mişcări:

Astfel:

Acceleraţia totală a punctului A este (fig. II.44, *c*):

$$\bar{a}''_A=\bar{a}_A+\bar{a}'_A=k_a[\overline{(p''a'')}+\overline{(a''a''')}]=k_a\overline{(p''a''')}.$$

Acceleraţia totală a punctului B (pistonul) este:

$$\bar{a}''_B=\bar{a}_B+\bar{a}'_B=k_a[\overline{(p''b'')}+\overline{(b''b''')}]=k_a\overline{(p''b''')}.$$

Acceleraţia centrului de greutate al bielei se determină cu ajutorul metodei asemănării şi este:

$$\bar{a}''_{G_2}=k_a\cdot\overline{(p''g''_2)}.$$

Cu ajutorul acestor acceleraţii se determină apoi noile forţe de inerţie ale elementelor maşinii. Cu acestea şi cu momentele forţelor exterioare se calculează, în sfîrşit, reacţiunile în articulaţii.

Observaţii. Calculul se poate face şi astfel:

a) se determină în primul rînd pentru mişcarea de bază: $-M_{red\,b}$, care face echilibru atît momentelor forţelor de inerţie cît şi momentului rezistent total M_r;

b) se alege apoi o acceleraţie unghiulară, de exemplu $\varepsilon'=1$, şi cu aceasta se construieşte planul acceleraţiilor, determinîndu-se după aceea, forţele de inerţie care se aduc în echilibru cu un $-M'_{red\,a}$, tot cu ajutorul metodei pîrghiei lui N. E. Jukovski.

Pentru a se obţine M_{red} care, conform formulei (II.182), este egal cu

$$M_{red}=M_{red\,b}+M_{red\,a},$$

trebuie să se înmulţească $M'_{red\,a}$ cu un coeficient λ, astfel încît să existe egalitatea:

$$M_{red}=M_{red\,b}+\lambda M'_{red\,a}.$$

De λ ori ε' dă acceleraţia $\varepsilon=\dfrac{d\omega}{dt}$ din ecuaţia (II.179).

§ 14. STABILIREA ECUAŢIEI DE MIŞCARE A MAŞINII PENTRU UN MECANISM BIELĂ-MANIVELĂ (MOTOR DIESEL SAU CU EXPLOZIE)

14.1. Ecuaţia generală de mişcare a motorului

În practică mişcarea maşinii se aplică la mecanismul bielă-manivelă, astăzi universal utilizat în toate instalaţiile industriale. Este deci de foarte mare importanţă ca studiul general al mişcării maşinii să fie aplicat la un astfel de mecanism.

Dezvoltarea mecanizării agriculturii, unde utilizarea motoarelor cu ardere internă s-a generalizat, actuala orientare a transporturilor feroviare spre tracţiunea cu locomotive Diesel, fără a mai accentua faptul că transporturile rutiere se fac astăzi exclusiv cu mijloace mecanizate acţionate de motoare Diesel sau cu explozie, justifică suficient adîncirea studiului dinamic al acestor motoare.

Se va da mai jos acest studiu aplicat la un mecanism bielă-manivelă la care direcţia de deplasare a pistonului trece prin centrul de rotaţie al manivelei (un astfel de mecanism se numeşte şi simetric).

Momentul redus la manivelă al tuturor forţelor care acţionează asupra motorului (cu excepţia momentului rezistenţei tehnologice şi evident şi al reacţiunilor din articulaţii) rezultă din ecuaţia de mai jos:

$$Fv_B-M^D_{red}\,\omega_1-P_f=\frac{d}{dt}(E+E_p). \qquad \text{(II.185)}$$

în care:

v_B este viteza pistonului;

$\mathfrak{Q}_3=F$ — forţa de destindere a gazelor pe suprafaţa pistonului (la § 18.6 din partea I a fost notată cu $\mathfrak{Q}_3$ pistonul fiind elementul *3*);

P_f — puterea consumată de forţele de frecare;

M^D_{red} — momentul redus la manivelă preluat de aceasta şi destinat să învingă momentul rezistenţei tehnologice;

ω_1 — viteza unghiulară a manivelei (elementul de reducere);

E — energia cinetică a maşinii;

E_p — energia potenţială a maşinii;

$F\cdot\dfrac{v_B}{\omega_1}=M_M$ — momentul motor raportat la elementul de reducere (manivela motorului);

$\dfrac{dE}{d\varphi}=M_E$ — momentul redus la manivelă, al tuturor forţelor de inerţie dezvoltate de elementele motorului, datorită mişcării variate a acestora;

$\dfrac{dE_p}{d\varphi}=M_{E_p}$ — momentul redus la acelaşi element al forţelor ce derivă din energia potenţială a motorului;

$\dfrac{P_f}{\omega_1}=M_f$ — momentul redus la acelaşi element al tuturor forţelor de frecare din cuplele cinematice ale motorului.

De aici rezultă că momentul redus la manivelă este:

$$M^D_{red}=F\frac{v_B}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_1}\left(\frac{dE}{dt}+\frac{dE_p}{dt}+P_f\right) \qquad \text{(II.186)}$$

şi deoarece $\omega\,dt=d\varphi$, ecuaţia devine:

$$M^D_{red}=F\frac{v_B}{\omega_1}-\left(\frac{dE}{d\varphi}+\frac{dE_p}{d\varphi}+\frac{P_f}{\omega_1}\right) \qquad \text{(II.186')}$$

sau

$$M^D_{red}=M_M-(M_E+M_{E_p}+M_f). \qquad \text{(II.187)}$$

La motoarele cu viteze unghiulare mici paranteza din membrul al doilea al ecuaţiei de mai sus este neglijabilă. În acest caz se realizează situaţia echilibrului static dintre forţa motoare şi cea rezistentă, care rezultă din formula (II.31). Motoarele cu viteze unghiulare mici au dispărut însă astăzi şi în locul lor avem motoare cu 3 000 rot/min, unde variaţia energiei cinetice — în special — şi a energiei potenţiale sau a forţelor de frecare nu mai pot fi neglijate.

14.2. Calculul momentului motor redus la butonul de manivelă

Primul termen din membrul al doilea al ecuaţiei de mişcare a motorului reprezintă momentul motor redus la butonul de manivelă. Acest lucru rezultă imediat din formula (II.33) în care se neglijează toţi termenii, în afară de forţa de destindere a gazelor.

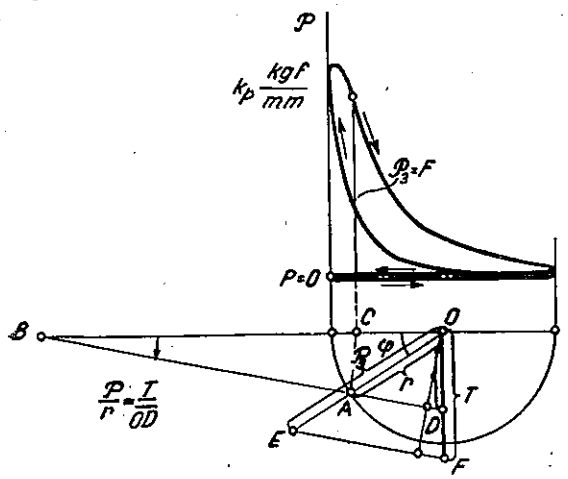


Fig. II.45. Determinarea forţei tangenţiale T la butonul de manivelă, cu ajutorul diagramei indicate.

Se poate scrie deci:

$$M_M = F\frac{v_B}{\omega_1} = T. \quad \text{(II.188)}$$

$\mathfrak{P}_3 = F$ este în general obţinut cu ajutorul unui indicator. In fig. II.45 se arată modul de determinare a forţei tangenţiale T la butonul de manivelă din diagrama indicată.

Pe cursa pistonului ca diametru se duce un semicerc.

Din poziţia B a pistonului, corespunzătoare unghiului φ al manivelei motoare, se determină punctul A prin intersecţia semicercului cu cercul de rază $l=AB$ şi centrul în B. Din C se duce perpendiculara pe cursa pistonului.

Forţa F care rezultă din diagrama indicată se plasează la scara k_F în $\overline{OE}$, astfel că

$$\overline{OE} = F = k_F(\overline{OE}).$$

Din E se duce paralela la BA şi la intersecţia cu perpendiculara din O la cursa pistonului rezultă punctul F.

Se demonstrează uşor că:

$$T = k_F \cdot (\overline{OF}).$$

Pentru valorile lui $\pi < \varphi < 2\pi$, F este de semn contrar lui $\overline{OF}$.

Diagramele se construiesc diferit pentru ciclul motoarelor în doi şi patru timpi.

In fig. II.46 sînt date ca exemplu diagramele forţelor

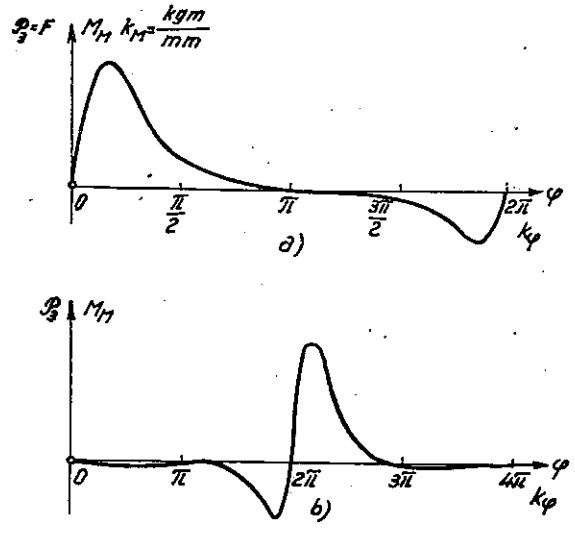


Fig. II.46. Diagrama momentului motor M_M datorit forţei tangenţiale T la motorul cu un cilindru în doi timpi (fig. II.46, *a*) şi în patru timpi (fig. II.46, *b*).

tangenţiale pentru motoarele în doi timpi (fig. II.46, *a*) şi în patru timpi (fig. II.46, *b*)

La motoarele cu dublu efect construcţia se face separat pentru ambele feţe ale pistonului, după care se compun cele două diagrame într-una singură (fig. II.47), aşa cum s-a procedat şi în fig. I.1 din partea întîi.

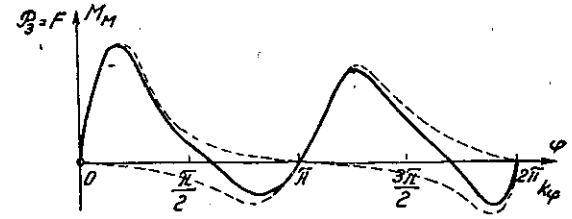


Fig. II.47. Diagrama de variaţie a momentului motor M_M datorit forţei tangenţiale la un motor în doi timpi cu dublu efect.

O analiză mai adîncă a diagramelor forţelor tangenţiale poate să ducă studiul la descompunerea curbelor de variaţie a lui M_M în serie Fourier.

Pentru studiul general al mişcării maşinii problema sub acest aspect nu prezintă însă importanţă.

14.3. Energia cinetică a maşinii (motorului)

Această energie este dată de formula (II.7) $E = \frac{1}{2}\omega_1^2 I_{red}$.

Cu ajutorul acestei expresii, termenul al doilea din ecuaţia (II.187) se poate scrie:

$$M_E = \frac{dE}{d\varphi} = \frac{\omega_1^2}{2}\frac{dI_{red}}{d\varphi} + I_{red}\,\omega_1\frac{d\omega_1}{d\varphi}$$

sau

$$M_E = \frac{dE}{d\varphi} = \frac{\omega_1^2}{2}\frac{dI_{red}}{d\varphi} + I_{red}\frac{d\omega_1}{dt}. \quad \text{(II.189)}$$

Valoarea lui $\frac{dI_{red}}{d\varphi}$ se determină, fie grafic, după cum se vede în fig. II.3 sau II.43, fie analitic, cu ajutorul formulelor (II.26) şi (II.27).

Dacă se utilizează expresia aproximativă dată de formula (II.18), M_E devine:

$$M_E = \frac{\omega_1^2}{2} I_1' \sin 2\varphi + \varepsilon_1\left[I_1 + \frac{1}{2}I_1'(1-\cos 2\varphi)\right]. \quad \text{(II.190)}$$

In sfîrşit, cea mai simplă expresie a momentului redus M_E corespunzător energiei cinetice a maşinii se obţine dacă se admite ε_1 foarte mic în raport cu primul termen din membrul al doilea.

In acest caz rezultă:

$$M_E = \frac{dE}{d\varphi} = \frac{\omega_1^2}{2}\frac{dI_{red}'}{d\varphi} = \frac{\omega_1^2}{2} I_1' \sin 2\varphi, \quad \text{(II.191)}$$

adică tocmai „$-M_{lb}$" din mişcarea de bază a maşinii [dat de formula (II.180)]

Ţinînd seamă de valoarea lui I_1' dată de formula (II.15), expresia lui M_E din formula (II.191) devine:

$$M_E = -M_{ib} = \frac{\omega_1^2}{2}\left(m_3 + m_2\frac{s_2}{l}\right) r^2 \sin 2\varphi, \qquad \text{(II.191')}$$

în care:

m_3 este masa pistonului şi a bulonului de articulaţie, iar
m_2 — masa bielei.

14.4. Energia potenţială datorită greutăţii proprii a elementelor maşinii

Determinarea expresiei analitice a energiei potenţiale se poate face în cazul general cînd direcţia de deplasare x a pistonului face un unghi δ cu verticala (fig. II.48, *a*) şi considerînd $E_p=0$ în poziţia AO_0B_0.

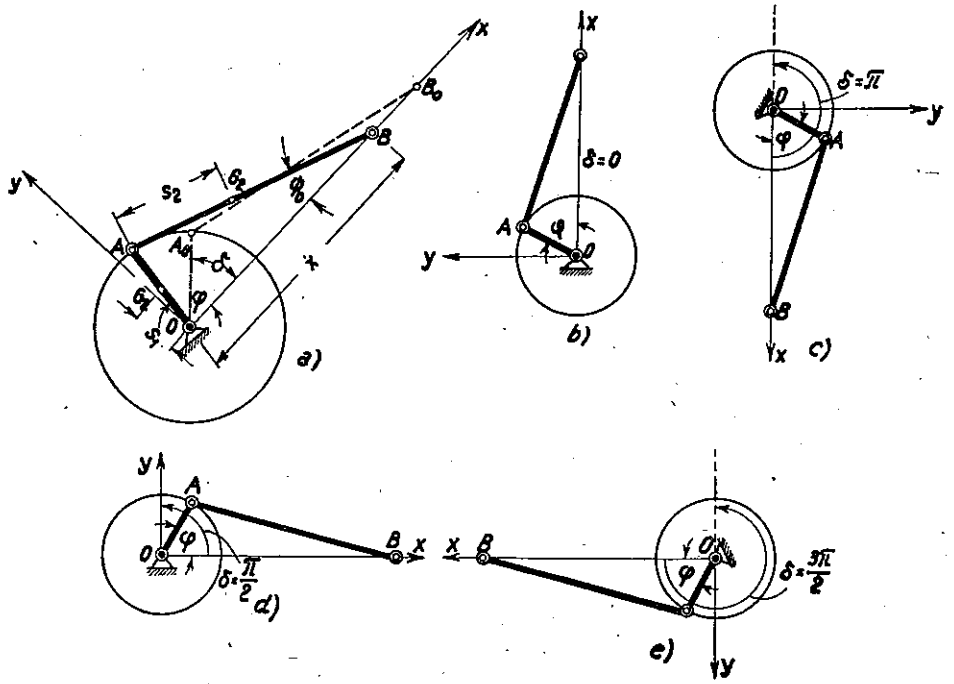


Fig. II.48. Cele 5 poziţii relative posibile faţă de verticală ale motorului cu un cilindru.

Dacă G_1, G_2 şi G_3 sînt greutăţile: manivelei, bielei şi, respectiv, a pistonului cu bulonul de articulaţie şi dacă masa bielei se repartizează în A şi B, şi anume, în A masa m_A de greutate $\left(1-\frac{s_2}{l}\right)G_2$ şi în B masa m_B de greutate $\frac{s_2}{l}G_2$, atunci energia potenţială a motorului pentru o poziţie oarecare φ inferioară lui δ este compusă din două părţi:

— a manivelei şi greutăţii G_A repartizată în butonul de manivelă A:

$$E_{p_1} = -\left[s_1 G_1 + r\left(1-\frac{s_2}{l}\right)G_2\right][1-\cos(\varphi-\delta)]; \qquad \text{(II.192)}$$

— a pistonului şi a bulonului de articulaţie (sau a capului de cruce, a tijei pistonului şi a pistonului) de greutate $G_3=gm_3$, şi a masei m_B de greutate G_B concentrată în bulonul de articulaţie B:

$$E_{p_2} = -\left[\frac{s_2}{l}G_2 + G_3\right](r\cos\delta + l\cos\psi_0 - x)\cos\delta, \qquad \text{(II.193)}$$

unde $x=OB$.

Energia potenţială totală este:

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2}.$$

Dacă se notează:

$$E_{p_0} = r\left(1-\frac{s_2}{l}\right)G_2;$$

$$E_{p_{10}} = s_1 G_1 + r\left(1-\frac{s_2}{l}\right)G_2; \qquad \text{(II.194)}$$

$$E_{p_{20}} = \left(\frac{s_2}{l}G_2 + G_3\right)r$$

şi se ţine seamă că:

$$\frac{x}{r} = A_0 + \cos\varphi + \frac{1}{4}A_2\cos 2\varphi - \frac{1}{16}A_4\cos 4\varphi + \frac{1}{36}A_6\cos 6\varphi - + \ldots$$

în care A_2, A_4, A_6 sînt date în tabela II.1, atunci momentul redus datorit energiei potenţiale se scrie:

$$M_{E_p} = \frac{dE_p}{d\varphi} = -[(E_{p_{10}} + E_{p_{20}})\sin\varphi + E_{p_{20}}(B_2\sin 2\varphi - B_4\sin 4\varphi + \ldots)]\cos\delta + E_{p_{10}}\cos\varphi\sin\delta. \qquad \text{(II.195)}$$

Expresia de mai sus se poate pune sub o formă mai sugestivă dacă se va exprima în funcţie de componentele F_{ix} şi F_{iy} ale forţei de inerţie rezultante F_i a motorului, în cazul cînd viteza unghiulară ω_1 este considerată constantă.

Se ştie că aceste componente, cu notaţiile de la § 3.1.1, sînt:

$$F_{ix} = m_1 s_1 \omega_1^2\cos\varphi + m_A r\omega_1^2\cos\varphi - (m_b+m_3)\ddot{x};$$

$$F_{iy} = m_1 s_1 \omega_1^2\sin\varphi + m_A r\omega_1^2\sin\varphi.$$

Ţinînd seamă de notaţiile (II.194) şi de expresia lui $\frac{x}{r}$ derivată de două ori, formulele de mai sus devin:

$$F_{ix} = \frac{\omega_1^2}{g}[(E_{p_{10}} + E_{p_{20}})\cos\varphi + E_{p_{20}}(A_2\cos 2\varphi - A_4\cos 4\varphi + A_6\cos 6\varphi - + \ldots)];$$

$$F_{iy} = \frac{\omega_1^2}{g}E_{p_{10}}\sin\varphi. \qquad \text{(II.196)}$$

Momentul redus la manivelă datorit energiei potenţiale se poate scrie atunci:

$$M_{E_p}=-\frac{g}{\omega_1^2}(\cos\delta\int_0^{\varphi}F_{ix}\,d\varphi+\sin\delta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}F_{iy}\,d\varphi). \tag{II.197}$$

În fig. II.48, *b—e* sînt redate cele 4 cazuri speciale ale unui motor pentru care M_{E_p} dat de (II.197) capătă forme particulare.

Astfel:

— Pentru motorul vertical (fig. II.48, *b*) şi pistonul deasupra arborelui motor ($\delta=0$):

$$M_{E_p}=-(E_{p_{10}}+E_{p_{20}})\sin\varphi-E_{p_{20}}(B_2\sin 2\varphi-B_4\sin 4\varphi+-\ldots)=$$

$$=-\frac{g}{\omega_1^2}\int_0^{\varphi}F_{ix}\,d\varphi. \tag{II.198}$$

— Pentru motorul vertical cu pistonul sub arborele motor (fig. II.48, *c*), unde $\delta=\pi$:

$$M_{E_p}=(E_{p_{10}}+E_{p_{20}})\sin\varphi+E_{p_{20}}(B_2\sin 2\varphi-B_4\sin 4\varphi+-\ldots)=$$

$$=\frac{g}{\omega_1^2}\int_0^{\varphi}F_{ix}\,d\varphi. \tag{II.199}$$

— Pentru motorul orizontal (fig. II.48, *d*), unde $\delta=\frac{\pi}{2}$:

$$M_{E_p}=E_{p_{10}}\cos\varphi=-\frac{g}{\omega_1^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}F_{iy}\,d\varphi. \tag{II.200}$$

— Pentru motorul orizontal (fig. II.48, *e*), unde $\delta=\frac{3\pi}{2}$:

$$M_{E_p}=-E_{p_{10}}\cos\varphi=\frac{g}{\omega_1^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}F_{iy}\,d\varphi. \tag{II.201}$$

La motoarele verticale, unde $F_{ix}=0$, deci se realizează echilibrarea forţelor de inerţie din mişcarea de translaţie, momentul M_{E_p} este zero.

La cele orizontale, $M_{E_p}=0$ cînd $F_{iy}=0$, deci cînd s-a realizat echilibrarea forţelor centrifuge.

Deoarece, după cum se va vedea la cap. V, toate motoarele se echilibrează în ambele plane, în studiul general al mişcării maşinii cu ajutorul ecuaţiei lui Lagrange se neglijează forţele sau momentele forţelor datorite energiei potenţiale. (Acest lucru s-a şi făcut).

De altfel, expresia momentului M_{E_p} se poate stabili în cazul general astfel [1]:

[1] Biezeno and Grammel: Engineering dinamics, vol. IV, p. 92, Blackie & Son, London, 1954.

Fie

$$E_p=g\sum_{j=1}^{n}m_jh_j. \tag{II.202}$$

energia potenţială a unui sistem de mase m_j, ale căror centre de greutate se află la înălţimea h_j faţă de un sistem de referinţe.

Dacă φ este coordonata generalizată cu ajutorul căreia se poate exprima configuraţia sistemului, atunci forţa lagrangiană (generalizată) corespunzătoare deplasării $d\varphi$ este

$$M_{E_p}=\frac{dE_p}{d\varphi}.$$

Se defineşte ca „staţionară" orice mişcare a sistemului în care $\dot\varphi=\omega_1=\text{const}$, astfel că din (II.202) se obţine:

$$\frac{dM_{E_p}}{d\varphi}=\frac{d^2E_p}{d\varphi^2}=g\sum m_j\frac{d^2h_j}{d\varphi^2}=\frac{g}{\omega_1^2}\sum m_j\ddot h_j,$$

dar

$$-\sum m_j\ddot h_j=F_{i_h}$$

este componenta după verticală a forţelor de inerţie F_i pentru $\omega_1=\text{const}$.

Astfel:

$$\frac{dM_{E_p}}{d\varphi}=-\frac{g}{\omega_1^2}F_{i_h},$$

de unde

$$M_{E_p}=M_{E_{p_0}}-\frac{g}{\omega_1^2}\int_0^{\varphi}F_{ih}\,d\varphi, \tag{II.203}$$

în care: $M_{E_{p_0}}$ este valoarea lui M_{E_p} pentru $\varphi=0$.

Ecuaţia (II.203) dă relaţia generală între forţa generalizată M_{E_p} corespunzătoare coordonatei generalizate φ, datorită energiei potenţiale a sistemului, şi forţele de inerţie ale sistemului pentru $\varphi=\omega=\text{const}$ şi cu un grad de libertate.

Pentru cazul motorului din fig. II.48, *a*:

$$F_{i_h}=F_{ix}\cdot\cos\delta+F_{iy}\cdot\sin\delta,$$

iar din (II.195)

$$M_{E_{p_0}}=E_{p_{10}}\sin\delta=-\frac{g}{\omega_1^2}\sin\delta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}F_{iy}\,d\varphi.$$

14.5. Forţele interioare şi pierderile prin frecările în articulaţii

Se vor determina în prealabil puterile consumate de forţele de frecare din articulaţii, care, împărţite apoi la ω_1, vor da suma momentelor reduse la manivela *1* datorită acestor pierderi, adică:

$$M_f=\frac{P_f}{\omega_1}.$$

Pierderile prin frecare se vor exprima în funcţie de reacţiunile din articulaţii determinate în partea I, § 18.6.

Astfel:

1) *Pierderea datorită forţei $\mathfrak{Q}'_{43}$ dintre segmenţi şi cilindru.*

Puterea corespunzătoare acestei pierderi este:

$$P_{f_1}=\mathfrak{Q}'_{43}\cdot v_B\ ^{1}).$$

Dacă se înlocuieşte $v_B=r\omega_1\left(\sin\varphi+\frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right)$ şi se împarte cu ω_1, se obţine momentul redus la manivelă al pierderii datorită lui $\mathfrak{Q}'_{43}$:

$$M_{f_1}=r\mathfrak{Q}'_{43}\left(\sin\varphi+\frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right). \tag{II.204}$$

2) *Pierderea datorită reacţiunii $\mathfrak{Q}''_{43}$ (dată de formula* (I.220)*)*:

Se poate scrie direct expresia momentului redus la manivelă corespunzător acestei pierderi:

$$M_{f_2}=\frac{\mu_3\mathfrak{Q}''_{43}v_B}{\omega_1}=r\mu_3\mathfrak{Q}''_{43}\left(\sin\varphi+\frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right),$$

sau, înlocuind valoarea lui $\mathfrak{Q}''_{43}$ din (I.220) şi făcînd calculele, se obţine:

$$M_{f_2}=\frac{r\lambda\mu_3}{2}\left[\mathfrak{Q}_3(1-\cos 2\varphi)+\left(\frac{s_2}{l}G_2+G_3\right)\left\{1-\cos 2\varphi-\frac{r\omega_1^2}{2g}(\cos\varphi-\cos 3\varphi)\right\}\right]. \tag{II.205}$$

3) *Pierderea datorită momentului de frecare M_{F_B} din articulaţia bulonului B.*

Expresia momentului redus la manivelă, cu notaţiile din partea I, § 18.6 şi fig. I.106, este

$$M_{f_3}=\frac{M_{F_B}\omega_2}{\omega_1}=\frac{\mu_2 r_2\mathfrak{Q}_{23}\lambda\omega_1\cos\varphi}{\omega_1},$$

deci:

$$M_{f_3}=\mu_2 r_2\mathfrak{Q}_{23}\lambda\,|\cos\varphi|, \tag{II.206}$$

unde

$$\mathfrak{Q}_{23}=\sqrt{\mathfrak{Q}_{23}^{r^2}+\mathfrak{Q}_{23}^{v^2}},$$

iar $\mathfrak{Q}^v_{23}$ şi $\mathfrak{Q}^r_{23}$ sînt date de formulele (I.218) şi (I.219). S-a pus $|\cos\varphi|$ pentru a se lua valoarea absolută a lui $\cos\varphi$.

4) *Pierderea datorită momentului de frecare M_{F_A} din articulaţia butonului de manivelă A.*

---

[1]) Vezi observaţia de la § 15, partea I, privind notaţiile forţelor în cazul cinetostaticii cu luarea în consideraţie a frecării.

Expresia momentului de frecare redus la manivelă este

$$M_{f_4}=\frac{M_{F_A}\omega_{23}}{\omega_1}=\frac{\mu_1 r_1\mathfrak{Q}_{23}|\omega_1+\omega_2|}{\omega_1}.$$

Înlocuind pe $\omega_2=\lambda\omega_1\cos\varphi$, rezultă:

$$M_{f_4}=\mu_1 r_1\mathfrak{Q}_{12}(1+\lambda\cos\varphi). \tag{II.207}$$

5) *Pierderea datorită momentului de frecare M_{f_5} din lagărul batiului O.*

Se obţine imediat momentul de frecare redus:

$$M_{f_5}=M_{F_A}=\mu r\mathfrak{Q}_{41}, \tag{II.208}$$

unde

$$\mathfrak{Q}_{41}=\sqrt{\mathfrak{Q}_{41}^{r^2}+\mathfrak{Q}_{41}^{v^2}},$$

iar $\mathfrak{Q}^v_{41}$ şi $\mathfrak{Q}^r_{41}$ sînt date de formulele (I.224), (I.225) şi (I.222), (I.223).

6) *Momentul redus la manivela 1: M_f a tuturor pierderilor datorite frecărilor din articulaţiile motorului.*

Valoarea totală a acestuia este suma valorilor date de formulele (II.204)—(II.208), adică:

$$M_f=\frac{P_f}{\omega_1}=M_{f_1}+M_{f_2}+M_{f_3}+M_{f_4}+M_{f_5}. \tag{II.209}$$

Determinarea lui M_f pentru diferitele poziţii ale manivelei motorului constituie un calcul foarte laborios, aşa cum de fapt s-a arătat şi mai înainte.

E suficient să se menţioneze expresiile analitice ale componentelor lui $\mathfrak{Q}''_{43}$; $\mathfrak{Q}_{23}$; $\mathfrak{Q}_{12}$ şi $\mathfrak{Q}_{41}$ chiar sub forma simplificată dată de formulele (I.216′)—(I.225′), ca să se vadă că determinarea frecării în maşinile cu cuple cinematice inferioare constituie o problemă care comportă un calcul foarte lung.

De aceea, avînd în vedere valorile mici ale coeficienţilor de frecare μ, μ_1, μ_2, μ_3, deci valoarea mică a momentelor de frecare, calculul exact al lui M_f dat de formula (II.209) nu aduce nici un avantaj faţă de calculele aproximative.

Calculul se continuă în consecinţă prin neglijarea tuturor termenilor care conţin greutatea pieselor motorului, precum şi termenii care conţin pe λ, cu excepţia acelora în care λ înmulţeşte pe $\mathfrak{Q}_3=F$ sau pe $\frac{r\omega_1^2}{g}$.

Din formulele (II.204)—(II.206) rezultă:

$$M'_{f_1}=r\mathfrak{Q}'_{43}\sin\varphi; \tag{II.204′}$$

$$M'_{f_2}=\mu_3\lambda r\left[\mathfrak{Q}_3-E_{P_{23}}\frac{r\omega_1^2}{g}\cos\varphi\right]\sin^2\varphi; \tag{II.205′}$$

$$M'_{f_3}=0; \tag{II.206′}$$

$$M'_{f_4}=\mu_1 r_1\mathfrak{Q}'_{21}; \tag{II.207′}$$

$$M'_{f_5}=\mu r\mathfrak{Q}'_{41}, \tag{II.208′}$$

în care $\mathfrak{R}'_{21}$ şi $\mathfrak{R}'_{41}$ rezultă din compunerea componentelor date de formulele (I.222′)—(I.225′).

Astfel:

$$\mathfrak{R}'_{21}=\sqrt{\mathfrak{R}'^{2}_{12}+\mathfrak{R}'^{2}_{12}}.$$

Făcînd calculele, simplificările, precum şi reducerile tuturor termenilor în λ şi λ^2, se obţine:

$$\mathfrak{R}'^{2}_{21}=\left(\mathfrak{R}_3-E_{p_{20}}\frac{\omega_1^2}{g}\cos\varphi\right)^2+\left(E_{p_0}\frac{\omega_1^2}{g}\right)^2-2\left(\mathfrak{R}_3-E_{p_{20}}\frac{\omega_1^2}{g}\cos\varphi\right)E_{p_0}\frac{\omega_1^2}{g}\cos\varphi.$$

unde E_{p_0} şi $E_{p_{20}}$ cu semnificaţiile date de formulele (II.104).

Dacă se notează cu

$$Q_1=\mathfrak{R}_3-E_{p_{20}}\frac{\omega_1^2}{g}\cos\varphi, \qquad \text{(II.210)}$$

componenta după direcţia x a reacţiunii $\mathfrak{R}'_{12}$ a butonului de manivelă; cu

$$Q_2=E_{p_0}\frac{\omega_1^2}{g} \qquad \text{(II.211)}$$

componenta după direcţia axei manivelei a aceleiaşi reacţiuni, atunci:

$$\bar{\mathfrak{R}}'_{21}=\bar{Q}_1+\bar{Q}_2 \quad \text{şi scalar:}$$

$$\mathfrak{R}'_{21}=\sqrt{Q_1^2+Q_2^2-2Q_1Q_2\cos\varphi}. \qquad \text{(II.212)}$$

Analog se găseşte că

$$\mathfrak{R}'_{41}=\sqrt{Q_1^2+Q_3^2-2Q_1Q_3\cos\varphi}, \qquad \text{(II.213)}$$

unde s-a notat:

$$Q_3=E_{p_{10}}\frac{\omega_1^2}{g}. \qquad \text{(II.214)}$$

In felul acesta expresia analitică a momentului pierderilor prin frecare redus la manivelă devine:

$$M'_f=\sum_{j=1}^{5}M'_{f_j}, \qquad \text{(II.209′)}$$

unde M'_{f_j} sînt date de (II.204′)—(II.208′), iar

$\mathfrak{R}'_{21}$ şi $\mathfrak{R}'_{41}$ — de (II.212) şi (II.213.)

14.6. Determinarea grafică a pierderilor prin frecare

1) *Variaţia grafică a lui* M'_{f_1} este o sinusoidă, după cum uşor rezultă din formula (II.204′).

In fig. II.49 se arată această variaţie.

2) *Determinarea grafică a lui* M'_{f_2} se face cu ajutorul (fig. II.50).

Din formulele (II.205′) şi (II.210) rezultă că

$$M'_{f_2}=\mu_3\lambda r Q_1\sin^2\varphi. \qquad \text{(II.205″)}$$

Determinarea grafică a lui Q_1 permite ca prin înmulţirea lui cu $\mu_3\lambda r\sin^2\varphi$ să se obţine M'_{f_2}.

Din diagrama indicată a motorului, raportată la scara k_F în ordonată, rezultă forţa $\mathfrak{R}_3=F$.

Pe cursa pistonului se trasează la scara k_F (aceeaşi la care este reprezentată şi diagrama indicată) două semicercuri:

— unul cu raza $Q_2=E_{p_0}\frac{\omega_1^2}{g}$;

— al doilea cu raza $E_{p_{20}}\frac{\omega_1^2}{g}$.

Dacă se neglijează termenii în λ, atunci pentru un unghi oarecare φ al manivelei, forţa $F=\mathfrak{R}_3$ se obţine prin ridicarea perpendicularei din A pe cursa pistonului:

$$F=\mathfrak{R}_3=k_F(\overline{BD}).$$

Scăzînd din aceasta cantitatea

$$\frac{E_{p_{20}}}{g}\omega_1^2\cos\varphi=k_F(\overline{BC}),$$

se obţine

$$Q_1=k_F(\overline{CD})=\mathfrak{R}_3-\frac{E_{p_{20}}}{g}\omega_1^2\cos\varphi,$$

care, introdusă în (II.205″), dă valoarea momentului de frecare din bulonul de articulaţie B redus la manivela I.

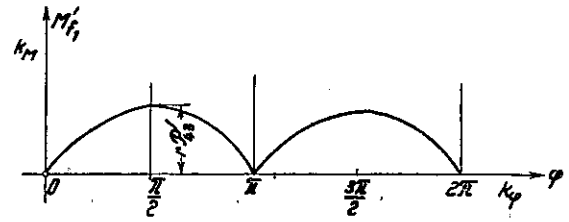


Fig. II.49. Variaţia grafică a momentului M'_{f_1} redus la manivelă a pierderii datorită frecării dintre segmenţi şi pereţii cilindrului.

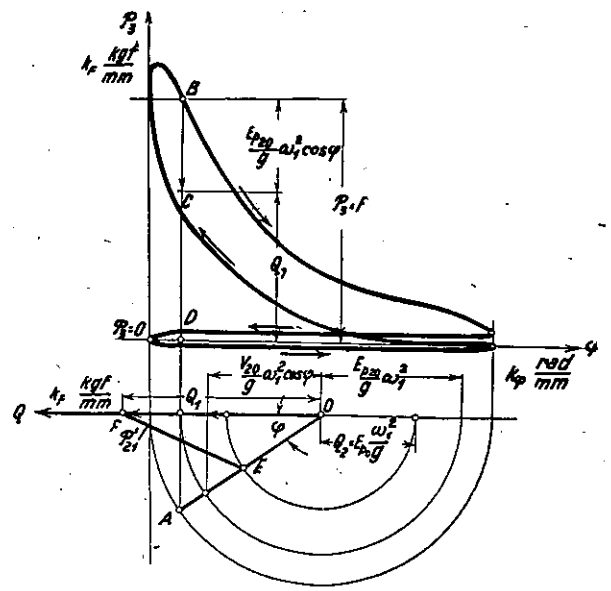


Fig. II.50. Determinarea grafică a reacţiunii $\mathfrak{R}'_{21}$ dintre bielă şi manivelă în cazul particular cînd $\lambda=0$.

3) *Determinarea momentului de frecare* M'_{f_1}. Corespunzător unghiului φ, se obţine valoarea reacţiunii $\mathfrak{R}'_{21}$ dacă pe direcţia O spre stînga se pune la scara k_F

$$Q_1=k_F(\overline{OF}).$$

Unind E (punctul de intersecţie a cercului de rază $Q_2=\frac{E_{p_0}}{g}\omega_1^2$ cu dreapta OA) cu punctul F, rezultă imediat:

$$\mathfrak{Q}'_{21}=k\,(\overline{EF})=\sqrt{\overline{OF}^2+\overline{OE}^2-2\overline{OF}\cdot\overline{OE}\cos\varphi}.$$

Introducînd această valoare în formula (II.207'), se obţine mărimea lui M'_{f_4}.

4. *Determinarea momentului de frecare* M'_{f_5}. Valoarea lui $\mathfrak{Q}'_{41}$ din (II.208') se obţine printr-o metodă asemănătoare celei de mai sus.

Este important de precizat că, dacă manivela are centrul de greutate în centrul de rotaţie, atunci $s_1=0$ şi

$$E_{p_0}=E_{p_{10}},$$

de unde rezultă $\mathfrak{Q}'_{21}=\mathfrak{Q}'_{41}$ şi construcţia făcută la litera c) de mai sus rămîne valabilă şi pentru momentul de frecare M'_{f_5}.

Dacă se realizează o echilibrare statică a motorului (după cum se va vedea la cap. V), atunci evident că

$$\frac{s_1}{r}G_1+\left(1-\frac{s_2}{l}\right)G_2=0$$

şi deci

$$E_{p_{10}}=0.$$

In acest caz:

$$\mathfrak{Q}'_{41}=Q_1,$$

astfel că şi aici poate servi determinarea grafică de la litera c).

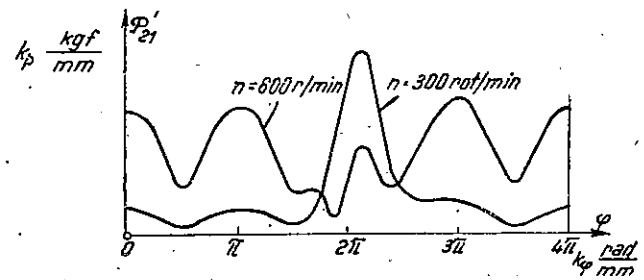


Fig. II.51. Variaţia grafică a reacţiunii $\mathfrak{Q}'_{21}$ dintre bielă şi manivela unui motor Diesel vertical în patru timpi pentru $n=300$ rot/min şi $n=600$ rot/min.

In fig. II.51 este redată variaţia grafică a lui $\mathfrak{Q}'_{21}(\varphi)$ pentru un motor Diesel vertical în patru timpi cu un cilindru pentru $n=600$ rot/min, respectiv $n=300$ rot/min.

Valorile s-au dedus din formula (II.212) combinată cu formulele (II.210), (II.211) şi (II.194).

Se observă că, la turaţii mici, variaţia reacţiunii $\mathfrak{Q}'_{21}$ are aproape aceeaşi formă ca şi a forţei $\mathfrak{Q}_3=F$ cu maximul în timpul arderii.

La motoarele cu turaţii mari, reacţiunea $\mathfrak{Q}'_{21}$ este mult mai mică în timpul cursei active a pistonului decît în timpul celorlalte trei curse.

14.7. Ecuaţia de mişcare a motorului

Inainte de a stabili această ecuaţie se va face o legătură între expresiile care intervin în ecuaţiile de mişcare generale sub forma Lagrange stabilite la (II.154), (II.155) şi expresiile din ecuaţiile stabilite în acest paragraf.

In ecuaţia (II.187) s-a notat cu M^D_{red} — după cum s-a arătat — valoarea momentului redus la manivela motorului (elementul de reducere) al tuturor forţelor exterioare care acţionează în mecanism, exclusiv momentul rezistenţei tehnologice (M_{rt}).

In ecuaţia (II.154) s-a notat cu M_{red} momentul tuturor forţelor exterioare raportate la elementul de reducere, inclusiv deci şi M_{rt}, însă exclusiv cele datorite variaţiilor energiei cinetice şi potenţiale cuprinse în membrul I al ecuaţiei Lagrange.

In consecinţă, dacă se notează cu: $M=M^D_{red}-M_{rt}$ — momentul total redus la manivelă inclusiv deci şi M_{rt}, atunci, conform ecuaţiei (II.187), se poate scrie:

$$M=(M_M-M_E-M_{E_p}-M_f)-M_{rt}.$$

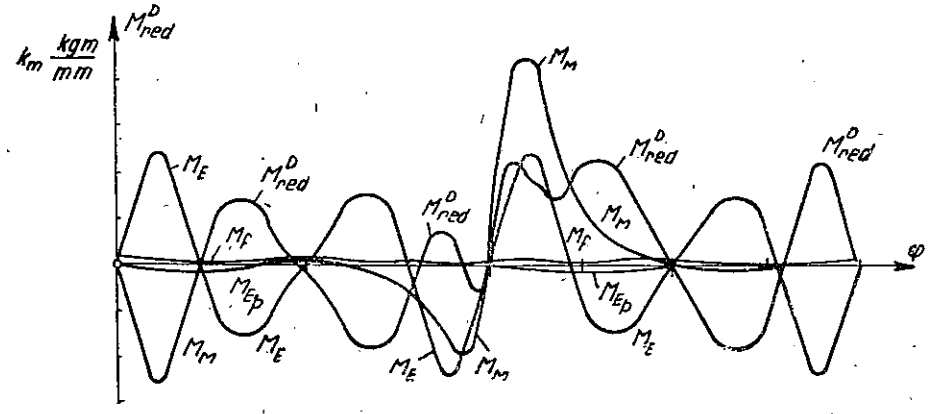


Fig. II.52. Diagramele de variaţie ale lui M_M; M_E; M_{E_p}; M_f şi M^D_{red} pentru un motor Diesel în patru timpi cu $n=600$ rot/min.

Ţinînd seamă de (II.191) şi (II.191'), care neglijează pe $\frac{d\omega}{dt}$, formula de mai sus devine:

$$M=M^D_{red}-M_{rt}=(M_M-M_{rt}-M_f-M_{E_p})+M_{ib}. \qquad \text{(II.215)}$$

Paranteza din membrul al doilea este în acest caz tocmai M_{red} din ecuaţia lui Lagrange (dacă se consideră $M_{E_p}=0$, cazul motoarelor echilibrate şi cu turaţii mari), adică:

$$M_{red}=M_M-(M_{rt}+M_f)=M_M-M_r, \qquad \text{(II.216)}$$

deci

$$M=M^D_{red}-M_{rt}=M_{red}+M_{ib}. \qquad \text{(II.217)}$$

De aici:

$$M_{red}+M_{ib}-M=0, \tag{II.218}$$

de unde rezultă imediat că

$$M^D_{red}-M_{rt}=M=-M_{ia}, \tag{II.219}$$

adică tocmai momentul redus al forţelor de inerţie din mişcarea adiţională a maşinii dat de ecuaţia (II.181).

In fig. II.52 sînt redate curbele de variaţie ale lui M_M; M_E; M_{E_p}; M_f şi curba rezultantă a acestora M^D_{red} pentru un motor Diesel în patru timpi cu $n=600$ rot/min cu razele cercurilor de frecare ale articulaţiilor $\mu r=5$ mm şi coeficientul de frecare dintre cilindru şi piston astfel, încît $\mu'' r=20$ mm.

Ţinînd seamă de (II.181), ecuaţia (II.219) devine

$$M=M^D_{red}-M_{rt}=I_{red}\frac{d\omega_1}{dt}=\frac{1}{2}I_{red}\frac{d}{d\varphi}(\omega_1^2), \tag{II.220}$$

care constituie ecuaţia de mişcare a motorului.

Ecuaţia (II.220) trebuie completată în mişcarea de regim cu ecuaţia care arată că în timpul unui ciclu energetic Φ_E (2π pentru motoarele în doi timpi, 4π pentru cele în patru timpi) variaţia energiei cinetice este zero, adică:

$$\int_0^{\Phi_E}(M^D_{red}-M_{rt})\,d\varphi=0. \tag{II.221}$$

Dacă se introduce noţiunea de $M^D_{red_{med}}$ dat de expresia

$$M^D_{red_{med}}=\frac{1}{\Phi_E}\int_0^{\varphi}M^D_{red}\,d\varphi, \tag{II.222}$$

atunci din (II.221) va rezulta

$$M^D_{red_{med}}=M_{rt_{med}}, \tag{II.223}$$

formulă importantă pentru studiul volantului (cap. III).

Pentru motoarele în doi timpi, (II.222) devine

$$M^D_{red_{med}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M^D_{red}\,d\varphi, \tag{II.222'}$$

iar pentru cele în patru timpi:

$$M^D_{red_{med}}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}M^D_{red}\,d\varphi. \tag{II.222''}$$

Studiul mişcării maşinii în cazul cînd aceasta este un motor cu ardere internă se va relua la cap. III, după ce se va determina masa volantului I_V şi valoarea totală a lui I_{red} (inclusiv a volantului).

CAPITOLUL III

NEREGULARITATEA MIŞCĂRII MAŞINII. VOLANTUL

§ 15. VITEZA MEDIE A MAŞINII ŞI GRADUL DE NEREGULARITATE AL MERSULUI MAŞINII

15.1. Introducere

La § 4, unde s-au analizat fazele mişcării maşinii, s-a văzut că viteza elementului iniţial variază în timpul mişcării de regim, ciclul energetic Φ_E fiind determinat de ciclul de variaţie al forţelor exterioare şi de ciclul de variaţie al momentului de inerţie redus I_{red} al maşinii sau agregatului, raportat la elementul iniţial (în cazul de faţă: element de reducere).

Periodicitatea lui I_{red} şi M_{red} determină şi periodicitatea lui ω.

In timpul mişcării de regim viteza unghiulară a elementului iniţial are astfel oscilaţii periodice.

Este evident că vitezele tuturor celorlalte elemente ale maşinii vor avea acelaşi ciclu de variaţie ca şi elementul iniţial.

De aceea, în timpul mişcării de regim este de dorit ca amplitudinea $\Delta\omega$ a oscilaţiilor vitezei elementului iniţial să fie cît mai mică, astfel încît presiunile dinamice suplimentare în articulaţiile maşinii să fie cît mai mici, prin aceasta mărind randamentul şi siguranţa de funcţionare.

Problema care urmează să se rezolve în cadrul acestui capitol este găsirea celei mai judicioase relaţii între forţele, masele şi parametrii de mişcare ai maşinii, astfel încît amplitudinea $\Delta\omega$ a oscilaţiilor vitezei unghiulare a elementului iniţial să se încadreze în limitele prescrise de condiţiile de funcţionare ale maşinii.

Găsirea acestor relaţii va rezolva o a doua problemă: determinarea mărimii momentului de inerţie redus I_{red} al maşinii, astfel încît amplitudinile oscilaţiilor vitezei unghiulare a elementului iniţial să nu depăşească anumite limite prescrise de practică.

Cum oscilaţiile lui ω sînt datorite periodicităţii lui M_{red}, rezultă că I_{red} al maşinii trebuie să fie ales astfel, încît să absoarbă excesul de energie cinetică în intervalul cînd $M_{red}>0$ şi să-l cedeze atunci cînd $M_{red}<0$. Această absorbire sau acumulare de energie cinetică în timpul cînd $M_{red}>0$, adică atunci cînd lucrul mecanic W_M al forţelor motoare este mai mare decît al forţelor rezistente W_r, împiedică creşterea vitezei unghiulare ω a elementului iniţial.

De asemenea, cedarea (restituirea) energiei cinetice în timpul cînd $M_{red}<0$ (adică $W_M<W_r$) împiedică scăderea vitezei unghiulare ω.

Cu cît I_{red} este mai mare, cu atît (la aceeaşi viteză unghiulară) energia cinetică a maşinii la începutul fazei de regim va fi mai mare (v. fig. II.41) şi deci amplitudinea oscilaţiilor lui ω va fi mai mică.

Gradul de neregularitate (de neuniformitate) al mersului maşinii este o caracteristică ce depinde de mărimea oscilaţiilor lui ω.

Realizarea unui grad de neregularitate cît mai mic se face în practică prin adăugarea unor mase suplimentare care au în tot timpul mersului maşinii un

moment de inerţie constant. Aceste mase se plasează de cele mai multe ori pe axa de rotaţie a elementului iniţial (manivela) şi se numeşte volant.

Volantul realizează astfel condiţia impusă ca I_{red} al maşinii să fie cît mai mare şi să aibă variaţii mici în funcţie de poziţia elementului conducător sau iniţial în timpul ciclului energetic, adică $\frac{\Delta I_{red}}{I_{red}}$ (v. fig. II.38) să fie cît mai mic.

Mişcarea maşinii în faza de regim va avea loc în acest caz cu o viteză unghiulară ω cît mai aproape de viteza medie ω_{med}. Cele de mai sus rezultă şi din formula (II.183), scrisă sub forma

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_{red} + M_{ib}}{I_{red}}.$$

Cu cît I_{red} este mai mare, cu atît ε va fi mai mic şi deci diferenţa $(\omega_{max} - \omega_{min})$ e mai mică.

15.2. Viteza medie

In calculele dinamice ale maşinii sau agregatului se utilizează mai multe feluri de viteze medii:

a) Se numeşte *viteza unghiulară medie reală* viteza unghiulară a unei mişcări uniforme în care elementul descrie unghiul Φ egal cu perioada, în acelaşi interval de timp care este necesar şi mişcării reale neuniforme.

Conform acestei definiţii, se poate scrie:

$$\omega_{med\,r} = \frac{\Phi}{T}, \tag{II.224}$$

unde

$$\Phi = \int_0^T \omega dt \tag{II.225}$$

este suprafaţa cuprinsă între curba $\omega(t)$ (v. fig. II.33, *a*) şi axa absciselor, corespunzătoare unei perioade Φ sau T, adică tocmai perioada ciclului energetic (2π pentru motoarele în doi timpi şi 4π pentru cele în patru timpi).

Perioada T se exprimă de preferinţă în funcţie de viteza unghiulară instantanee ω.

Astfel, ştiind că

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega},$$

se poate scrie

$$T = \int_0^T dt = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\omega}.$$

Inlocuind această valoare în (II.224), se obţine:

$$\omega_{med\,r} = \frac{\Phi}{\int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\omega}}; \tag{II.226}$$

$\Phi = \int_0^T \omega dt$ se poate obţine la maşinile în funcţiune prin planimetrarea curbei de variaţie a lui ω, care se înregistrează cu ajutorul unor aparate speciale numite tahografe (atunci cînd nu se cunoaşte ciclul energetic anticipat).

Astfel, pentru un motor în doi timpi (Diesel, maşină cu abur etc.), expresia vitezei unghiulare medii reale este:

$$\omega_{med\,r} = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\omega}} \tag{II.226'}$$

iar pentru motoarele în patru timpi:

$$\omega_{med\,r} = \frac{4\pi}{\int_0^{4\pi} \frac{d\varphi}{\omega}}. \tag{II.226''}$$

Pentru uşurinţa notaţiei se va conveni ca $\omega_{med\,r}$ să se scrie ω_m, urmînd ca pentru viteza unghiulară medie aritmetică să rămînă notaţia ω_{med}; astfel, formulele de mai sus se scriu:

$$\omega_m = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\omega}}; \tag{II.226'}$$

$$\omega_m = \frac{4\pi}{\int_0^{4\pi} \frac{d\varphi}{\omega}}. \tag{II.226''}$$

$T = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\omega}$ se obţine prin integrarea grafică după ce în prealabil s-a construit curba $\frac{1}{\omega}(\varphi)$ după aceeaşi metodă indicată în fig. II.34.

b) Se numeşte *viteza unghiulară medie aritmetică* valoarea

$$\omega_{med} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}. \tag{II.227}$$

In ecuaţia de mai sus ω_{max} şi ω_{min} sînt vitezele unghiulare maximă şi minimă în mişcarea de regim (v. fig. II.10 şi II.40).

Această viteză se foloseşte totdeauna cînd nu se poate cunoaşte viteza medie iniţială şi deci nu este posibilă determinarea lui ω_m.

La majoritatea maşinilor există o foarte mică diferenţă între $\omega_{m\,r}$ şi ω_{med}.

In calcule se recomandă utilizarea lui ω_m dat de formula (II.226) la maşinile cu un grad de neregularitate mare şi a lui ω_{med} — dat de formula (II.227) — la maşinile cu un grad de neregularitate mic.

15.3. Gradul de neregularitate al maşinii

Prin definiţie raportul

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{med}}. \tag{II.228}$$

se numeşte grad de neregularitate al maşinii.

In formula de mai sus s-a introdus ω_{med} dat de formula (II.227) din cauză că ω_m se determină mai greu în aplicaţiile practice, mai ales că această înlocuire este admisă la maşinile cu δ mic [v. formula (II.233')].

Din analiza formulei se vede că, cu cît $\Delta\omega=\omega_{max}-\omega_{min}$ (amplitudinea oscilaţiilor) este mai mică, cu atît maşina are un grad de neregularitate mai mic.

Importanţa gradului de neregularitate δ al maşinii este foarte mare în tehnică.

La unele agregate gradul de neregularitate mare are influenţă dăunătoare asupra proceselor tehnologice (la maşinile de lucru) sau asupra persoanelor. Astfel, dacă un turboalternator are un δ mare, curentul electric produs va avea tensiune variabilă în reţea, ceea ce produce variaţia intensităţii luminii în filamentul incandescent al becului, care se traduce prin acele „pîlpîiri" ale luminii atît de incomode şi dăunătoare pentru ochi.

Tabela II.3. Valorile lui δ pentru diferite tipuri de maşini

Nr. crt.	Denumirea maşinii	Gradul de neregularitate δ
1	Maşini cu abur pentru pompe	$\frac{1}{5}-\frac{1}{30}$
2	Maşini pentru acţionarea maşinilor-unelte	$\frac{1}{30}-\frac{1}{40}$
3	Maşini pentru acţionarea maşinilor de ţesut şi fabricat hîrtie	$\frac{1}{40}-\frac{1}{50}$
4	Maşini pentru acţionarea maşinilor de filat bumbac	$\frac{1}{60}-\frac{1}{100}$
5	Pentru generatoare electrice de curent continuu	$\frac{1}{100}-\frac{1}{200}$
6	Pentru generatoare de curent alternativ	$\frac{1}{200}-\frac{1}{300}$
7	Motoare de aviaţie	$\delta<\frac{1}{200}$

Alegerea gradului de neregularitate permite determinarea lui ω_{max} şi ω_{min} dacă se cunoaşte ω_{med} sau ω_m.

In adevăr, din formulele (II.227) şi (II.228) se deduce imediat:

$$\omega_{max}=\omega_{med}\left(1+\frac{\delta}{2}\right); \qquad \text{(II.229)}$$

$$\omega_{min}=\omega_{med}\left(1-\frac{\delta}{2}\right); \qquad \text{(II.230)}$$

ω_{med} se determină cu ajutorul tahometrului sau al vitezei nominale indicate în cartea maşinii.

δ este stabilit experimental. In tabela II.3 se dau cîteva valori ale lui δ pentru maşinile mai importante.

15.4. Relaţia dintre vitezele medii reale ω_m şi aritmetice ω_{med} şi gradul de neregularitate δ al maşinii

In mişcarea de regim expresia vitezei unghiulare ω a elementului de reducere se poate scrie sub forma

$$\omega=\omega_{med}\left[1+\frac{1}{2}\delta\upsilon(\varphi)\right], \qquad \text{(II.231)}$$

unde $\upsilon(\varphi)$ este o funcţie periodică de φ, care variază continuu între $+1$ şi -1, astfel că pentru aceste valori extreme se obţin ω_{max} şi ω_{min} date de formulele (II.229) şi (II.230).

Din formula de mai sus şi din (II.226) rezultă:

$$\frac{\omega_{med}}{\omega_m}=\frac{1}{\Phi}\int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{1+\frac{1}{2}\delta\upsilon(\varphi)}=\frac{1}{\Phi}\int_0^{\Phi}\left[1-\frac{1}{2}\delta\upsilon(\varphi)+\frac{1}{4}\delta^2\upsilon^2(\varphi)-+\ldots\right]d\varphi.$$

Cum δ este mult mai mic decît 1, după cum s-a văzut în tabela II.3, rezultă că se poate scrie:

$$\frac{\omega_{med}}{\omega_m}=1-\frac{1}{2}\delta\upsilon_m,$$

unde:

$$\upsilon_m=\frac{1}{\Phi}\int_0^{\Phi}\upsilon d\varphi. \qquad \text{(II.232)}$$

De aici rezultă că

$$\frac{\omega_m-\omega_{med}}{\omega_m}=\frac{1}{2}\delta\upsilon_m. \qquad \text{(II.233)}$$

Valoarea medie υ_m a funcţiei $\upsilon(\varphi)$ este foarte mică (fără a fi neapărat zero), mai ales cînd variaţia funcţiei $\omega(\varphi)$ este uniformă în timpul unui ciclu energetic.

In acest caz (II.233) se poate scrie:

$$\frac{\omega_m-\omega_{med}}{\omega_m}\ll\delta. \qquad \text{(II.233')}$$

Din acest motiv, în expresia gradului de neregularitate al maşinii se poate înlocui la numitor ω_m prin ω_{med}.

Tot cu ajutorul funcţiei (II.231) se poate demonstra matematic de ce în calculele aproximative ale dinamicii maşinii şi în calculele cinetostatice se poate neglija $\dot{\omega}=\frac{d\omega}{dt}$ faţă de ω^2.

In adevăr, derivînd pe (II.231), se obţine:

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}=\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{d\varphi}=\frac{\frac{1}{2}\delta\frac{d\upsilon}{d\varphi}}{1+\frac{1}{2}\delta\upsilon}\cong\frac{1}{2}\delta\frac{d\upsilon}{d\varphi}\left(1-\frac{1}{2}\delta\upsilon\right)\cong\frac{1}{2}\delta\frac{d\upsilon}{d\varphi}$$

[s-a ajuns la acest rezultat prin dezvoltarea lui $\left(1+\frac{1}{2}\delta\upsilon\right)^{-1}$ şi neglijînd apoi toţi termenii de la δ^2 în sus inclusiv].

Deoarece $\frac{d\upsilon}{d\varphi}$ este de acelaşi ordin de mărime ca şi υ, putînd deci varia continuu între limitele $+1$ şi -1, expresia de mai sus devine

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}=\frac{\varepsilon}{\omega^2}\cong\frac{1}{2}\delta. \qquad \text{(II.234)}$$

Deci, cu cît mașina are un grad de neregularitate mai mic, cu atît eroarea ce se obține prin neglijarea lui ε față de ω^2 este mai mică.

Astfel, pentru un motor care are un $\delta=\frac{1}{200}$, eroarea este de

$$\frac{\varepsilon}{\omega^2}\times 100=\frac{1}{400}\times 100=0{,}25\%.$$

15.5. Relația dintre pătratul vitezei reale $(\omega_m)^2$ și viteza pătratică medie $(\omega^2)_m$

Expresia vitezei pătratice medii este evident:

$$(\omega^2)_m=\frac{1}{\Phi}\int_0^{\Phi}\omega^2 d\varphi. \tag{II.235}$$

Introducînd mai sus valoarea lui ω^2 dedusă din (II.231), se obține:

$$(\omega^2)_m=\frac{\omega_{med}^2}{\Phi}\int_0^{\Phi}\left[1+\frac{1}{2}\delta v(\varphi)\right]^2 d\varphi\cong\frac{\omega_{med}^2}{\Phi}\int_0^{\Phi}[1+\delta v(\varphi)]\,d\varphi,$$

de unde, integrînd:

$$(\omega^2)_m=\omega_{med}^2(1+\delta v_m).$$

Dar din (II.233) se deduce imediat că

$$\omega_{med}^2=\omega_m^2(1-\delta v_m).$$

Introducînd această valoare mai sus, se obține:

$$(\omega^2)_m=\omega_m^2(1+\delta v_m)(1-\delta v_m)$$

și de aici

$$(\omega^2)_m=\omega_m^2. \tag{II.236}$$

Deci, pentru valori mici ale lui δ se poate înlocui fără nici o ezitare $(\omega^2)_m$ prin ω_m^2.

Ca exemplu, se vede că pentru un motor cu $\delta=\frac{1}{100}$ eroarea este

$$\frac{(\omega^2)_m}{\omega_m^2}=1-\delta^2=1-\frac{1}{10\,000}=\frac{9\,999}{10\,000},$$

adică de $0{,}01\%$.

15.6. Deviația unghiulară și deviația vitezei

La § 10 s-a arătat că deviația unghiulară este decalajul care se realizează, după un timp t de la începutul ciclului energetic din faza de regim, între elementul de reducere care se rotește cu viteza unghiulară reală ω și același element de reducere dacă s-ar roti cu viteza unghiulară medie ω_m, adică

$$\Delta\varphi=\varphi-\varphi_m=\varphi-\omega_m t. \tag{II.237}$$

Mai jos se va exprima deviația unghiulară $\Delta\varphi$ în funcție de expresia

$$\varkappa=\frac{\omega-\omega_m}{\omega_m}, \tag{II.238}$$

numită *deviația de viteză*.

Cu această notație

$$\varphi_m=\omega_m t=\omega_m\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\omega}=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{1+\varkappa}.$$

Deoarece (după cum ușor se poate demonstra) $\varkappa<\delta\ll 1$, integrala de mai sus se poate scrie:

$$\varphi_m=\int_0^{\varphi}(1-\varkappa)\,d\varphi=\varphi-\int_0^{\varphi}\varkappa d\varphi.$$

Introducînd valoarea lui φ_m în (II.237), rezultă:

$$\Delta\varphi=\varkappa d\varphi. \tag{II.239}$$

Formula de mai sus arată posibilitatea de a calcula analitic valorile lui $\Delta\varphi$ pentru orice valoare a lui ω.

Dacă se dă însă curba $\omega(\varphi)$, atunci determinarea lui $\Delta\varphi$ este mai recomandabilă pe cale grafică, așa cum s-a făcut la § 10.

15.7. Determinarea gradului de neregularitate δ al mașinii cu ajutorul diagramei $E(I_{red})$

a) Dacă diagrama $E(I_{red})$ a mașinii pentru mișcarea de regim este dată (v. fig. II.41), atunci folosind formulele (II.174) și (II.175) se poate ușor determina valoarea lui δ.

In adevăr, din (II.174) și (II.175) se obține:

$$\omega_{max}^2=2\frac{k_E}{k_I}\operatorname{tg}\psi_{max}; \tag{II.240}$$

$$\omega_{min}^2=2\frac{k_E}{k_I}\operatorname{tg}\psi_{min}; \tag{II.241}$$

ψ_{max} și ψ_{min} sînt — după cum s-a arătat la § 11.5 — unghiurile făcute de tangentele OM și ON duse din originea O la curba $E(I_{red})$.

Dacă formula (II.228) se înmulțește și se împarte cu $(\omega_{max}+\omega_{min})$, se obține:

$$\delta=\frac{\omega_{max}-\omega_{min}}{\omega_{med}}=\frac{(\omega_{max}-\omega_{min})(\omega_{max}+\omega_{min})}{\omega_{med}(\omega_{max}+\omega_{min})},$$

de unde

$$\delta=\frac{\omega_{max}^2-\omega_{min}^2}{2\omega_{med}^2}. \tag{II.242}$$

Substituind în (II.242) valorile lui ω^2_{max} şi ω^2_{min} din (II.240) şi (II.241), rezultă:

$$\delta = \frac{k_E}{k_I} \frac{\operatorname{tg}\psi_{max} - \operatorname{tg}\psi_{min}}{\omega^2_{med}}. \tag{II.243}$$

Valorile lui $\operatorname{tg}\psi_{max}$ şi $\operatorname{tg}\psi_{min}$ se calculează direct de pe diagramă, iar ω_{med} se determină cu formula (II.226), pentru maşinile cu gradul de neregularitate mare.

Pentru maşinile cu δ mic, ω_{med} se determină cu formula (II.227).

In acest din urmă caz se poate scrie:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{med}} = 2\frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{max} + \omega_{min}},$$

de unde, înlocuind valorile lui ω_{max} şi ω_{min} din formulele (II.174) şi (II.175), se obţine:

$$\delta = 2\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\psi_{max}} - \sqrt{\operatorname{tg}\psi_{min}}}{\sqrt{\operatorname{tg}\psi_{max}} + \sqrt{\operatorname{tg}\psi_{min}}}. \tag{II.244}$$

b) Dacă, după ce s-a construit diagrama $E(I_{red})$ şi cu ajutorul metodei cunoscute se trasează şi diagrama $\omega(\varphi)$, redată în fig. II.40, atunci se deduc din aceasta valorile lui ω_{max} şi ω_{min}, care se introduc apoi în formula (II.228).

§ 16. INFLUENŢA MASEI VOLANTULUI ASUPRA MIŞCĂRII MAŞINII ÎN FAZA DE REGIM

In cazul de faţă este dată curba $E(I_{red})$, reprezentată în fig. II.53.

Pentru a găsi valoarea momentului de inerţie redus I_{red} corespunzător unor valori ale lui ω_{med} şi δ date, trebuie în prealabil să se găsească valorile lui ω_{max} şi ω_{min}.

In diagrama $E(I_{red})$ aceste mărimi sînt proporţionale cu $\sqrt{\operatorname{tg}\psi_{max}}$ şi $\sqrt{\operatorname{tg}\psi_{min}}$.

Mărimea acestora se determină cu formulele (II.229) şi (II.230).

Ridicîndu-le la pătrat, se obţine:

$$\omega^2_{max} = \omega^2_{med}\left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \cong \omega^2_{med}(1+\delta); \tag{II.245}$$

$$\omega^2_{min} = \omega^2_{med}\left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \cong \omega^2_{med}(1-\delta). \tag{II.246}$$

Mai sus s-a neglijat termenul $\frac{\delta^2}{4}$, deoarece are valori mici pentru majoritatea maşinilor utilizate în tehnică $\left(\frac{1}{200^2} = \frac{1}{4}10^{-4}\right)$.

Dacă se ţine seamă de valorile lui ω_{max} şi ω_{min} date de formulele (II.174) şi (II.175), expresii'e (II.245) şi (II.246) devin:

$$2\frac{k_E}{k_I}\operatorname{tg}\psi_{max} = \omega^2_{med}(1+\delta);$$

$$2\frac{k_E}{k_I}\operatorname{tg}\psi_{min} = \omega^2_{med}(1-\delta).$$

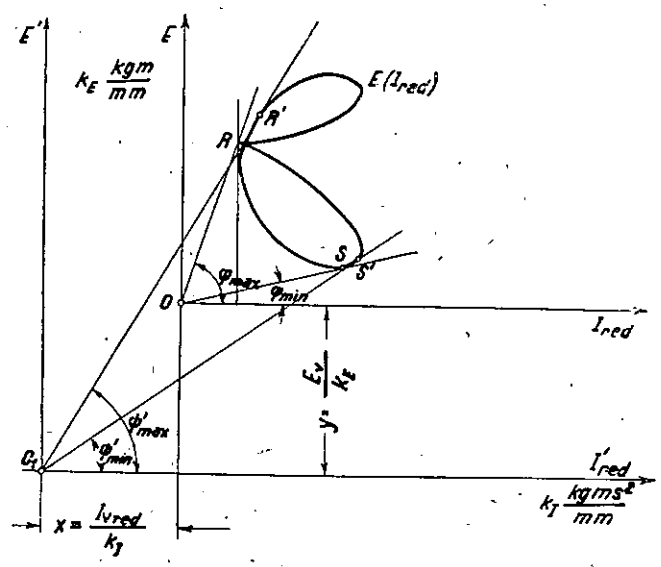


Fig. II.53. Influenţa masei volantului asupra gradului de neregularitate δ al maşinii.

De aici se deduc valorile lui $\operatorname{tg}\psi_{max}$ şi $\operatorname{tg}\psi_{min}$:

$$\operatorname{tg}\psi_{max} = \frac{1}{2}\frac{k_I}{k_E}\omega^2_{med}(1+\delta); \tag{II.247}$$

$$\operatorname{tg}\psi_{min} = \frac{1}{2}\frac{k_I}{k_E}\omega^2_{med}(1-\delta). \tag{II.248}$$

Relaţiile (II.247) şi (II.248) dau posibilitatea găsirii înclinărilor maximă (ψ_{max}) şi minimă (ψ_{min}) pe care le au tangentele duse din originea O a axelor de coordonate (E, I_{red}) ale diagramei $E(I_{red})$.

Dacă deci se duc cele două tangente la curbă prin punctele R, respectiv S, astfel încît înclinările lor faţă de orizontală să fie egale cu ψ_{max}, respectiv ψ_{min}, atunci intersecţia lor va determina punctul O, centrul axelor de coordonate (E, I_{red}). O dată găsită originea O, atunci pentru orice moment t al mişcării maşinii se poate cunoaşte valoarea lui I_{red}.

Dacă la aceeaşi maşină se impune un alt grad de neregularitate $\delta' < \delta$, păstrîndu-se valoarea vitezei unghiulare medii ω_{med}, atunci din relaţiile (II.247) şi (II.248) se vor determina unghiurile

$$\psi'_{max} < \psi_{max} \quad \text{şi} \quad \psi'_{min} > \psi_{min}.$$

Tangentele la curba $E(I_{red})$ se intersectează în punctul O_1, care corespunde noii origini a axelor de coordonate (E', I'_{red}).

Se vede uşor că la un nou grad de neregularitate δ', mai mic decît cel anterior δ, cresc atît energia cinetică a maşinii E', cît şi momentul de inerţie redus I'_{red}.

In concluzie, dacă la o maşină dată, cu o viteză medie ω_{med} şi un grad de neregularitate δ, impunem ca gradul de neregularitate să devină $\delta' < \delta$, atunci trebuie să se mărească momentul de inerţie redus I_{red} cu o cantitate $I_{v\,red}$ dată de expresia (fig. II.53)

$$I_{v\,red} = k_I x. \tag{II.249}$$

Energia cinetică a maşinii creşte în acest caz cu cantitatea

$$E_v = k_E \cdot y. \tag{II.250}$$

Cu cît δ' va fi mai mic decît δ, cu atît momentul de inerţie I_{red} al maşinii va creşte.

De aici se trage concluzia că, cu cît maşina are un grad de neregularitate mai mic, cu atît masa maşinii (deci şi I_{red}) este mai mare.

$I'_{red} = I_v$ se atribuie în general volantului, atunci cînd ΔI_{red} este momentul de inerţie redus al maşinii fără volant (v. formula II.30).

Se poate uşor vedea că, dacă punctul O_1 este aruncat la infinit, cele două tangente în R' şi S' devin paralele, adică $\psi'_{max} = \psi_{min}$ şi deci $\omega'_{max} = \omega'_{min} = \omega_{med}$.

Numai în cazul cînd $I_{red} = \infty$, viteza unghiulară a maşinii este constantă în tot timpul fazei de regim.

Astfel de cazuri sînt însă imposibile din punct de vedere practic, astfel că totdeauna maşinile vor avea un grad de neregularitate $\delta > 0$.

In adevăr, $\delta' = 0$ ar impune construcţia unei maşini cu mase foarte mari, din care cea mai mare parte să aibă momentul de inerţie constant.

Soluţia comportă construirea unui volant pe axul motor al maşinii de dimensiuni foarte mari, ceea ce ar mări foarte mult preţul de cost şi ar avea dificultăţi serioase în faza de pornire.

De aceea practica a stabilit valorile lui δ pentru fiecare maşină mai importantă (tabela II.3).

§ 17. CALCULUL APROXIMATIV AL MOMENTULUI DE INERŢIE AL VOLANTULUI (I_v)

17.1. Prima metodă

Determinarea masei volantului impune, după cum se vede, cunoaşterea forţelor reduse sau a momentelor reduse ale forţelor motoare, cum şi a celor rezistente.

Dacă nu este cunoscută energia cinetică a maşinii la începutul mişcării de regim, adică mărimea $E = k_E(\overline{12\,12'})$ din fig. II.39, atunci nu este posibilă construirea diagramei $E(I_{red})$ în timpul acestei mişcări.

In adevăr, cunoaşterea energiei cinetice a întregii mişcări depinde de cunoaşterea masei volantului al cărui moment de inerţie este cuprins în mărimea lui I_{red} al maşinii.

Problema se poate rezolva dacă se fac următoarele precizări:

Se consideră energia cinetică E a maşinii compusă din două părţi:

$$E = E_{ct} + \Delta E, \tag{II.251}$$

în care:

E_{ct} este energia cinetică minimă, constantă în tot timpul ciclului energetic al maşinii, energie necunoscută;

ΔE — energia cinetică corespunzătoare variaţiei momentului de inerţie ΔI_{red} al maşinii şi a vitezei unghiulare, variabile în timpul ciclului energetic.

Mărimea ΔE se poate calcula — dacă se dau diagramele $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$ — prin metoda redată în fig. II.35 şi II.37.

In fig. II.54, *b* este trasată diagrama energiilor cinetice ale celor două energii, şi anume:

ΔE — energia cinetică variabilă corespunzătoare variaţiei lui ΔI_{red} şi ω. Ea este egală cu zero în punctele a'', respectiv *1*, *2*, *3* şi f'', minimă în b' şi maximă în c'';

E_{ct} — energia cinetică minimă constantă în tot timpul ciclului energetic Φ_E.

Evident că valoarea lui ΔE în punctul a (începutul unui ciclu) este aceeaşi cu cea din punctul f (sfîrşitul ciclului), deoarece lucrul mecanic al forţelor motoare este egal cu al celor rezistente pe durata unui ciclu energetic Φ_E.

In fig. II.54, *a* acest lucru este verificat prin egalitatea dintre suma ariilor notate cu + şi cele notate cu —, iar în fig. II.54, *b*, prin egalitatea celor două segmente:

$$\overline{a'a''} = \overline{f'f''}.$$

Deoarece E_{ct} este necunoscută, se studiază numai variaţia lui ΔE, care se raportează, pentru uşurinţa construcţiei, la axa $a'f'$.

Momentul de inerţie redus I_{red} al maşinii este format din trei părţi:

$$I_{red} = I_v + I_0 + I_{mv}, \tag{II.252}$$

după cum s-a arătat la § 3.1.1, formula (II.30).

In fig. II.55 este arătată curba de variaţie a lui I_{red} în timpul aceluiaşi ciclu Φ_E.

Dacă acum se scrie ecuaţia energiei cinetice a maşinii între $\varphi_{(min)}$ şi $\varphi_{(max)}$, se obţine:

$$W_{max} = W_M - W_r = \frac{1}{2} I_{red\,(max)}\, \omega^2_{max} - \frac{1}{2} I_{red\,(min)}\, \omega^2_{min}, \tag{II.253}$$

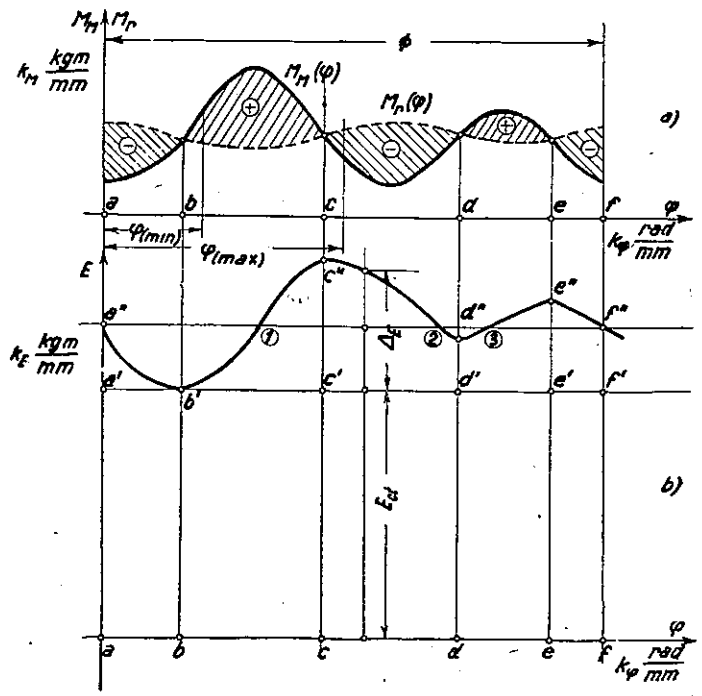


Fig. II.54. Părţile din care este compusă energia cinetică a maşinii $E=E_{ct}+\Delta E$.

în care:

$$W_M=\int_{\varphi\,(min)}^{\varphi\,(max)} M_M\,d\varphi \quad \text{şi} \quad W_r=\int_{\varphi\,(min)}^{\varphi\,(max)} M_r\,d\varphi,$$

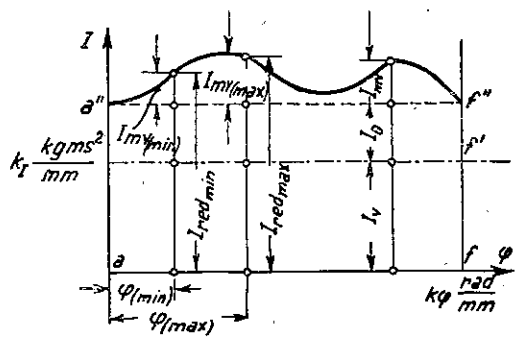


Fig. II.55. Momentul de inerţie redus imaginat descompus în $I_v+I_0+I_{mv}$.

iar:

$\varphi_{(max)}$ — poziţia elementului de reducere corespunzătoare vitezei unghiulare maxime: ω_{max};

$\varphi_{(min)}$ — poziţia elementului de reducere corespunzătoare lui ω_{min}.

In cazul fig. II.54 valoarea lui W_{max} este diferenţa dintre suprafeţele curbelor $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$ în intervalul $(\varphi_{max}-\varphi_{min})$ din fig. II.54, *a*.

Dacă se notează această arie cu A_{max}, se obţine

$$W_{max}=k_\varphi\,k_M\,A_{max}.$$

Dacă în (II.253) se introduc valorile lui ω^2_{max} şi ω^2_{min} din (II.245) şi (II.246), şi valoarea lui I_{red} din (II.252), se obţine:

$$W_{max}=\frac{1}{2}\omega^2_{med}(1+\delta)(I_v+I_0+I_{mv\,(max)})-\frac{1}{2}\omega^2_{med}(1-\delta)(I_v+I_0+I_{mv\,(min)}). \tag{II.254}$$

Din (II.254) rezultă valoarea lui I_v:

$$I_v=\frac{W_{max}}{\delta\omega^2_{med}}-I_0-\frac{(1+\delta)\,I_{mv\,(max)}-(1-\delta)\,I_{mv\,(min)}}{2\cdot\delta}. \tag{II.255}$$

Formula (II.255) permite calculul momentului de inerţie al volantului, dacă se dau: ω_{med}, δ şi I_0, precum şi unghiurile $\varphi_{(max)}$ şi $\varphi_{(min)}$, pentru care elementul de reducere are vitezele unghiulare ω_{max} şi ω_{min}.

In adevăr, cu ajutorul lui $\varphi_{(max)}$ şi $\varphi_{(min)}$ se determină din fig. II.55 valorile lui $I_{mv\,(max)}$ şi $I_{mv\,(min)}$, care se introduc apoi în formula (II.255).

Dacă variaţia lui I_{mv} este mică, se poate considera:

$$I_{mv\,(max)}\cong I_{mv\,(min)}\cong I_{mv}=\text{const.},$$

şi formula (II.255) devine:

$$I_v=\frac{W_{max}}{\delta\omega^2_{med}}-(I_0+I_{mv}) \tag{II.256}$$

In multe calcule practice suma (I_0+I_{mv}) se neglijează în raport cu mărimea lui I_v şi atunci formula (II.256) se transformă în formula cunoscută în tehnică pentru aflarea mărimii aproximative a masei volantului:

$$I_v=\frac{W_{max}}{\delta\omega^2_{med}}. \tag{II.257}$$

Această formulă dă valori acoperitoare şi prezintă o mare uşurinţă şi în calculele lui W_{max}.

In adevăr, dacă I_{mv} este constant, se realizează concordanţă între maximele şi minimele energiilor cinetice şi ale vitezelor unghiulare; cu alte cuvinte $\varphi_{(min)}$ va corespunde punctului *b* (fig. II.54, *a*) şi $\varphi_{(max)}$ punctului *c*.

Valoarea lui W_{max} care trebuie introdusă în formula (II.257) este aceea care corespunde celei mai mari ordonate a curbei energiei cinetice (ΔE) din fig. II.54, *b*, adică:

$$W_{max}=k_E(\overline{c'c''}). \tag{II.258}$$

Dacă nu s-a construit diagrama energiei cinetice (ΔE), atunci W_{max} se alege — la scară — cea mai mare dintre suprafeţele haşurate.

In cazul fig. II.54 *a*, rezultă:

$$W_{max}=\int_{\varphi_b}^{\varphi_c} M_M d\varphi=\int_{\varphi_b}^{\varphi_c} M_r d\varphi=k_M k_\varphi (A_{bc}),$$

în care A_{bc} este aria suprafeţei haşurate + cuprinsă între ordonatele *b* şi *c*, care, în cazul figurii, devine egală cu (A_{max}).

Viteza unghiulară minimă corespunde punctului *d* dacă $(A_{bc})<(A_{cd})$, şi punctului *b* dacă $(A_{bc})>(A_{cd})$. Pentru cazul figurii II.54, *b*, viteza unghiulară ω_{min} corespunde punctului *b*. De asemenea, ω_{max} corespunde punctului *c* dacă $A_{cd}>A_{de}$, şi punctului *e* dacă $A_{cd}<A_{de}$.

Dacă I_{mv} este variabil şi nu poate fi neglijat în calculele de dimensionare a volantului, se utilizează formula (II.255) cu toate menţiunile făcute mai sus privitoare la modul de aplicare a ei. Utilizarea ei este însă mai grea, deoarece impune determinarea în prealabil a lui $\varphi_{(max)}$ şi $\varphi_{(min)}$. De aceea metoda cea mai potrivită pentru dimensionarea volantului este aceea care foloseşte diagrama $E(I_{red})$ a maşinii.

17.2. A doua metodă: determinarea masei volantului la un motor cu ardere internă cu ajutorul ecuaţiei de mişcare (II.220)

S-a văzut că ecuaţia de mişcare a motorului în faza de regim este

$$\frac{1}{2} I_{red} \frac{d}{d\varphi}(\omega^2)=M^D_{red}-M_{rt}=M. \qquad \text{(II.220)}$$

Dacă (avînd în vedere mărimea momentului de inerţie I_v al volantului în raport cu al restului maselor în mişcare ale motorului) se neglijează acestea din urmă (adică ΔI_{red}), ecuaţia de mai sus se poate scrie:

$$\frac{1}{2} I_v \frac{d}{d\varphi}(\omega^2)=M. \qquad \text{(II.259)}$$

In acest caz, ω va fi maxim sau minim pentru toate poziţiile φ ale manivelei motoare unde $M=0$.

Dacă se trasează într-o diagramă curbele de variaţie ale lui M^D_{red} şi M_{rt} (fig. II.56), atunci toate valorile lui $\varphi(\varphi_1,\ldots,\varphi_9)$ corespunzătoare punctelor de intersecţie ale acestor două curbe vor satisface condiţia de mai sus.

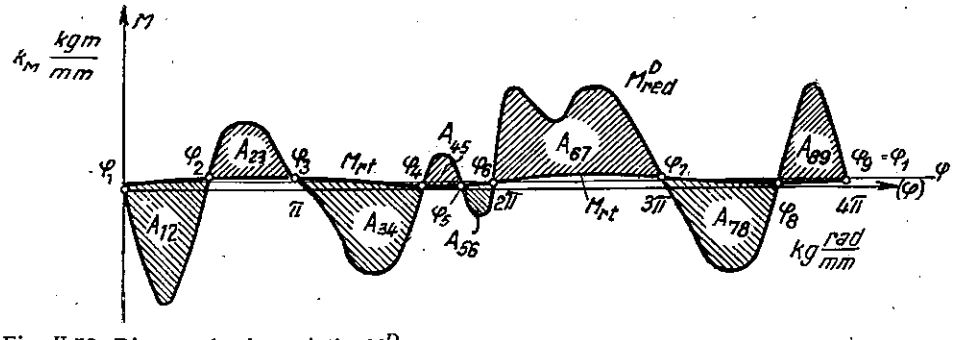


Fig. II.56. Diagramele de variaţie M^D_{red} şi M_{rt} şi suprafeţele $W_{91}\ldots W_{89}$ cuprinse între ele, care servesc la determinarea masei volantului.

Dacă acum se scrie expresia analitică a unei suprafeţe haşurate din fig. II.56, se obţine, ţinînd seamă de scări şi de formula (II.259):

$$k_M k_\varphi A_{j,j+1}=\int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} M d\varphi=\frac{1}{2} I_v(\omega^2_{j+1}-\omega^2_j). \qquad \text{(II.260)}$$

Ţinînd seamă că se poate pune:

$$\omega_{med}=\frac{1}{2}(\omega_{j+1}+\omega_j),$$

expresia de mai sus devine

$$k_M k_\varphi A_{j,j+1}=I_v \omega_{med}(\omega_{j+1}-\omega_j). \qquad \text{(II.261)}$$

Se procedează apoi la planimetrarea suprafeţelor haşurate şi se formează următorul şir de valori:

$$A_{12};\quad A_{13}=A_{12}+A_{23};\quad A_{14}=A_{13}+A_{34};\quad A_{15}=A_{14}+A_{45};\ldots$$
$$\ldots;\ A_{19}=A_{18}+A_{89}. \qquad \text{(II.262)}$$

Evident că în perioada de regim trebuie să existe:

$$A_{1,9}=0,$$

deoarece în timpul unui ciclu energetic lucrul mecanic al momentului M^D_{red} este egal cu al lui M_{rt} [a se vedea şi formula (II.223)].

Din şirul de mai sus se aleg cea mai mică şi cea mai mare (în valoare algebrică) dintre suprafeţele astfel calculate (adică $A_{1k}=A_{1\,max}$ şi $A_{1r}=A_{1\,min}$).

Introducînd aceste valori în (II.261), se obţine:

$$k_M k_\varphi A_{1\,max}=I_v \omega_{med}(\omega_{max}-\omega_1);$$
$$k_M k_\varphi A_{1\,min}=I_v \omega_{med}(\omega_{min}-\omega_1).$$

Scăzînd aceste două expresii şi ţinînd seamă de formula care dă pe δ, se obţine:

$$I_v=\frac{k_M k_\varphi (A_{1\,max}-A_{1\,min})}{\delta \omega^2_{med}}. \qquad \text{(II.263)}$$

Să presupunem că $A_{1\,min}$ precede pe $A_{1\,max}$ în ciclul energetic.

In acest caz, se poate scrie:

$$A_{1\,max}=A_{1k}=A_{1r}+A_{rk};$$
$$A_{1\,min}=A_{1r};$$

scăzîndu-le, rezultă:

$$A_{1\,max}-A_{1\,min}=A_{rk}=A_{max}$$

şi deci

$$k_M k_\varphi (A_{1\,max}-A_{1\,min})=k_M k_\varphi A_{max}=W_{max}.$$

Metoda formării şirului de suprafeţe (II.262) permite să se identifice imediat valorile lui φ corespunzătoare lui ω_{max} şi ω_{min}, fără a mai fi nevoie de raţionamentul arătat în paragraful anterior.

In cazul cînd se dorește o precizie mai mare în calcularea masei volantului, calculul se continuă mai departe după cum urmează:

Ecuația de mișcare exactă a mașinii este

$$\frac{1}{2}(I_v+I_0+I_{mv})\frac{d}{d\varphi}(\omega^2)=M$$

sau

$$\frac{1}{2}I_v\frac{d}{d\varphi}(\omega^2)=M-\frac{1}{2}(I_0+I_{mv})\frac{d}{d\varphi}(\omega^2).$$

Valoarea lui $\frac{d}{d\varphi}(\omega^2)$ din membrul al doilea se înlocuiește cu expresia

$$\frac{d}{d\varphi}(\omega^2)=\frac{2M}{I_{v_0}},$$

unde I_{v_0} este valoarea rezultată din calculul inițial făcut cu ajutorul formulei (II.263).

Se obține astfel:

$$\frac{1}{2}I_v\frac{d}{d\varphi}(\omega^2)=M\left(1-\frac{I_0+I_{mv}}{I_{v_0}}\right)=M'. \tag{II.264}$$

Se construiește o nouă curbă $M'(\varphi)$ prin înmulțirea curbei $M^D_{red}-M_{rt}=M(\varphi)$ cu factorul $\left(1-\frac{I_0+I_{mv}}{I_{v_0}}\right)$, după care se fac exact aceleași operații ca în calculul inițial.

Se obține în final formula:

$$I_v=\frac{k_M k_\varphi (A'_{1\,max}-A'_{1\,min})}{\delta\omega^2_{med}}, \tag{II.265}$$

care reprezintă valoarea momentului de inerție al volantului cu o mare exactitate.

Intr-un exemplu pentru un motor cu $n=600$ rot/min, $\delta=\frac{1}{100}$, s-a calculat I_v cu formulele (II.263), (II.256) și (II.265) și s-au găsit următoarele valori:

$I_{v1}=110$ kgms^2; $I_{v2}=108$ kgms^2 și $I_{v3}=106{,}5$ kgms^2 (corespunzător unui volant de 3000 kg greutate și rază de girație 0,6 m).

Se vede de aici că formulele (II.257) sau (II.263) sînt foarte bune de utilizat în calculele de proiectare.

§ 18. CONSTRUCȚIA CURBELOR DE DEVIAȚIE A VITEZEI $\varkappa$ ȘI A DEVIAȚIEI UNGHIULARE $\Delta\varphi$

18.1. Construcția curbei de deviație a vitezei $\varkappa(\varphi)$

Cu ajutorul curbei $M(\varphi)=M^D_{red}-M_{rt}$, obținută din curba $M^D_{red}(\varphi)$ prin deplasarea axei (φ) cu cantitatea M_{rt} (pe care o putem considera constantă în tot timpul ciclului energetic), se poate construi curba integrală și de aici curbele $\varkappa(\varphi)$ și $\Delta\varphi(\varphi)$.

Pentru aceasta se va nota

$$z=\frac{\omega^2}{\omega^2_m}. \tag{II.266}$$

Ecuația de mișcare (II.259) devine astfel:

$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{2M}{I_v\omega^2_m}. \tag{II.267}$$

Integrînd-o între starea inițială și φ, se obține:

$$z=z_0+\frac{2}{I_v\omega^2_m}\int_0^\varphi M d\varphi, \tag{II.268}$$

unde s-a notat $z_0=\frac{\omega^2_0}{\omega^2_m}$, pentru $\varphi=0$.

Integrala din membrul al doilea se efectuează pe cale grafică după metoda cunoscută, în care ca axă a absciselor se ia — după cum s-a precizat mai înainte — axa φ deplasată față de axa (φ) din fig. II.56 cu cantitatea M (considerată constantă).

In fig. II.57 această axă este axa φ, astfel că ordonatele lui $M(\varphi)$ față de această axă dau tot timpul pe $M(\varphi)=M^D_{red}-M_{rt}$.

Aceeași axă φ se va lua ca axă a absciselor și pentru $z-z_0$, astfel încît curba integrală ne va da diferența $z_1=z-z_0$ (v. fig. II.57).

Pentru un punct oarecare b de pe curba integrală se obține:

$$z_1=z-z_0=\frac{2}{I_v\omega^2_m}k_z(\overline{ab}), \tag{II.269}$$

unde

$$k_z=k_M k_\varphi(H_M). \tag{II.269'}$$

Dacă distanța polară (H_M) se alege în așa fel, încît

$$(H_M)=\frac{I_v\omega^2_m}{2k_M}, \tag{II.270}$$

atunci din (II.269') și (II.269) rezultă că

$$z_1=k_\varphi(\overline{ab}). \tag{II.271}$$

Se duce apoi axa medie φ_1 a curbei $z_1(\varphi)$, astfel încît suma suprafețelor de deasupra axei φ_1 să fie egale cu a celor de sub curbă. Pentru toate punctele de intersecție a acestei axe φ_1 cu curba $z_1(\varphi)$ va exista relația $z=1=z_m$ sau din (II.266) $\omega=\omega_m$. Aceasta echivalează cu înlocuirea lui $(\omega^2)_m$ prin ω^2_m, lucru ce este admisibil, după cum rezultă din (II.236).

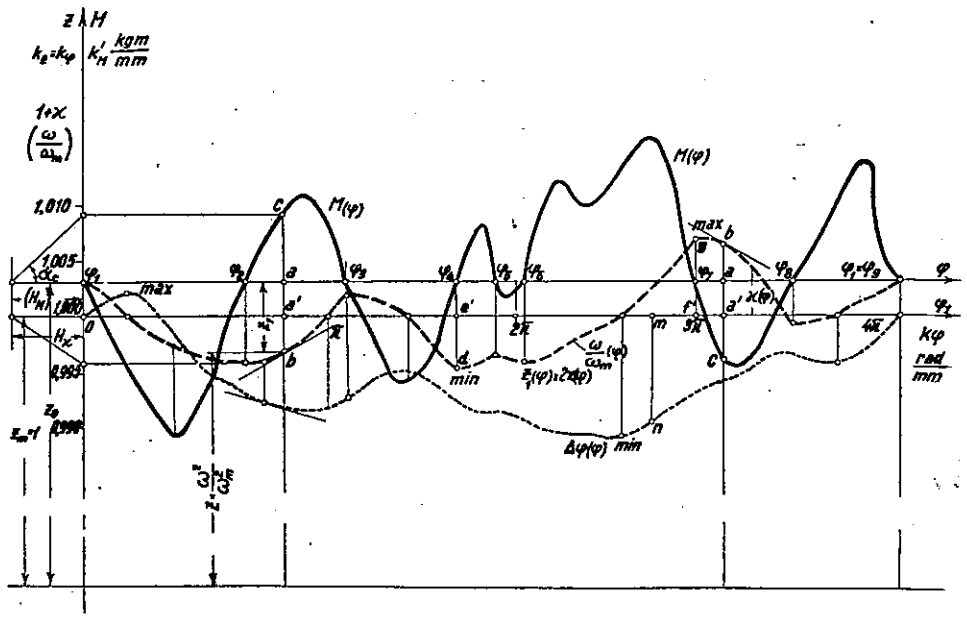


Fig. II.57. Construcţia curbelor de deviaţie a vitezei $\varkappa(\varphi)$ şi de deviaţie unghiulară $\Delta\varphi(\varphi)$.

Dacă se admite acum axa φ_1 cu noua axă de unde se măsoară valoarea ordonatelor curbei $z_1(\varphi)$, aceasta echivalează cu a considera în ecuaţia (II.269) în loc de z_0 pe $z_m=1$ şi deci, în acest caz, (II.271) devine:

$$z-1=k_\varphi(\overline{a'b})$$

sau

$$\frac{\omega^2}{\omega_m^2}-1=k_\varphi(\overline{a'b}),$$

de unde rezultă:

$$\omega=\omega_m\sqrt{1+k_\varphi(\overline{a'b})}, \qquad \text{(II.272)}$$

sau, dezvoltînd radicalul în serie

$$\omega=\omega_m\left[1+\frac{1}{2}k_\varphi(\overline{a'b})\right]. \qquad \text{(II.272')}$$

Acest rezultat se poate obţine şi pe altă cale.

Astfel, din (II.238) avem:

$$\varkappa=\frac{\omega-\omega_m}{\omega_m},$$

de unde

$$\frac{\omega}{\omega_m}=1+\varkappa. \qquad \text{(II.273)}$$

Cum $\varkappa\ll\delta$, se poate scrie imediat:

$$\frac{\omega^2}{\omega_m^2}=1+2\varkappa,$$

deci $2\varkappa=k_\varphi(\overline{a'b})$, astfel că:

$$\varkappa=\frac{k_\varphi}{2}(\overline{a'b})=k_\varkappa(\overline{a'b}), \quad \text{unde} \quad k_\varkappa=\frac{k_\varphi}{2}. \qquad \text{(II.274)}$$

Formula (II.274) arată că $\varkappa$ se obţine prin citirea directă pe curba $z_1(\varphi)$ a ordonatelor raportate la axa φ_1 şi înmulţite cu $\frac{k_\varphi}{2}$.

In concluzie, curba $z_1(\varphi)$ nu este la altă scară decît $\varkappa(\varphi)$.

Din (II.273) se poate deduce imediat formula (II.272') găsită anterior, pe care o putem scrie şi

$$\frac{\omega}{\omega_m}=1+\frac{k_\varphi}{2}(\overline{a'b}). \qquad \text{(II.272'')}$$

In concluzie, curba de variaţie $\varkappa(\varphi)$ permite găsirea, cu ajutorul formulei (II.272') şi a vitezei unghiulare, a elementului de reducere.

Deoarece s-a considerat $I_{red}=I_v=\text{const.}$, maximele lui ω coincid cu ale energiei cinetice.

Cu ajutorul formulei (II.272'') şi cu scara care a rezultat se poate găsi şi gradul de neregularitate δ al maşinii respective.

Astfel, pe curba $\varkappa(\varphi)$ se găsesc imediat valorile *max* şi *min* ale lui $\varkappa(\varphi)$.

Din expresia lui δ şi ţinînd seamă de (II.272''), se obţine:

$$\frac{\omega_{max}}{\omega_m}=1+\frac{k_\varphi}{2}(\overline{f'g});$$
$$\frac{\omega_{min}}{\omega_m}=1+\frac{k_\varphi}{2}(\overline{e'd}),$$

de unde, scăzîndu-le şi ţinînd seamă de semnul segmentelor, rezultă:

$$\delta=\frac{\omega_{max}-\omega_{min}}{\omega_m}=\frac{k_\varphi}{2}\left|(\overline{de'})+(\overline{f'g})\right|. \qquad \text{(II.275)}$$

18.2. Construcţia curbei deviaţiei unghiulare $\Delta(\varphi)$

Sa văzut la § 14.6 că deviaţia unghiulară $\Delta\varphi$ este dată de expresia

$$\Delta\varphi=\int_0^\varphi \varkappa\, d\varphi. \qquad \text{(II.239)}$$

Deviaţia unghiulară se poate obţine deci prin integrarea grafică a curbei $\varkappa(\varphi)=\frac{1}{2}z_1(\varphi)$.

În fig. II.57 este trasată această curbă integrală, din care se obţine pentru un punct curent de pe ea:

$$\Delta\varphi = k_\Delta (\overline{mn}), \tag{II.276}$$

unde

$$k_\Delta = k_x k_\varphi (H_x)$$

sau, ţinînd seamă de (II.274):

$$k_\Delta = \frac{1}{2} k_\varphi^2 (H_x). \tag{II.277}$$

Dacă se alege distanţa polară

$$(H_x) = \frac{1}{k_\varphi},$$

atunci:

$$k_\Delta = \frac{1}{2} k_\varphi = k_x.$$

Deci segmentele se vor măsura în aceeaşi scară k_x cu a curbei $\varkappa(\varphi)$.

Curbele de variaţie $\varkappa(\varphi)$ şi $\Delta\varphi(\varphi)$ sînt foarte importante pentru studiul mişcării motorului.

18.3. Construcţia mai exactă a curbelor $\varkappa(\varphi)$ şi $\Delta\varphi(\varphi)$

Ecuaţia de mişcare a motorului scrisă sub forma (II,259) nu conţinea decît momentul de inerţie al volantului I_v.

Dacă se ia în consideraţie însă I_{red}, atunci ecuaţia devine:

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{2M}{(I_v + \Delta I_{red})\,\omega_m^2}. \tag{II.278}$$

Cu o aproximaţie foarte bună se poate înlocui ΔI_{red} din ecuaţia de mai sus prin valoarea medie

$$\Delta I_{red\,m} = \frac{1}{\Phi}\int_0^\Phi \Delta I_{red} d\varphi, \tag{II.279}$$

şi dacă se notează:

$$I_{red\,m} = I_v + \Delta I_{red}, \tag{II.280}$$

atunci (II.278) devine:

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{2M}{I_{red\,m}\omega_m^2}. \tag{II.278'}$$

Calculele se continuă exact ca la § 17.1 şi § 17.2, unde în loc de I_v se înlocuieşte valoarea $I_{red\,m}$.

Calculele se pot face şi mai precis dacă se procedează ca şi la calculul volantului (§ 17.2) după cum urmează:

Ecuaţia (II.220) se poate scrie dacă se ţine seamă de (II.226):

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{2M}{I_v\omega_m^2}\frac{1}{1+\frac{\Delta I_{red}}{I_v}},$$

sau, deoarece $\Delta I_{red} = I_0 + I_{mv}$ este foarte mic faţă de I_v, se poate scrie:

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{2}{I_v\omega_m^2} M\left(1 - \frac{I_0 + I_{mv}}{I_v}\right) = \frac{2M'}{I_v\omega_m^2}. \tag{II.281}$$

Se procedează apoi la construirea noii curbe:

$$M' = \left(1 - \frac{I_0 + I_{mv}}{I_v}\right) M$$

şi de aici calculul se continuă ca şi la §§ 17.1 şi 17.2.

La motoarele cu δ mic $\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{200}\right)$, calculele cu ajutorul ecuaţiei (II.267) şi curbele $\varkappa(\varphi)$ şi $\Delta\varphi(\varphi)$ sînt suficient de exacte şi nu mai este necesar să se continue calculele aşa cum s-a arătat în acest paragraf.

§ 19. DETERMINAREA MOMENTULUI DE INERŢIE AL VOLANTULUI CU AJUTORUL DIAGRAMEI $E(I_{red})$

19.1. Gazul general

Sînt date pentru aceasta: δ; ω_{med}; $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$ şi $I_0 + I_{mv}$ în funcţie de φ.

Pentru determinarea momentului de inerţie al volantului cu ajutorul diagramei $E(I_{red})$, se procedează după cum urmează:

a) Se construieşte diagrama ΔE în funcţie de unghiul φ, adică diagrama din fig. II.54, *b* raportată la axele $(E, a'f')$. Această diagramă dă variaţia energiei cinetice a maşinii sub acţiunea lui $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$ din fig. II.54, *a*.

b) Se construieşte diagrama $(I_0 + I_{mv})$ în funcţie de unghiul de rotaţie al elementului de reducere, adică diagrama din fig. II.55 raportată la axele $(I, a'f')$.

c) Se aranjează aceste două diagrame ca în fig. II.37 şi se construieşte cu metoda arătată la § 11.3 diagrama ΔE în funcţie de $I_0 + I_{mv}$.

Dacă se notează cu

$$\Delta I_{red} = I_0 + I_{mv},$$

atunci în fig. II.58, *a* este construită diagrama $\Delta E(\Delta I_{red})$.

d) Cu ajutorul formulelor (II.247) şi (II.248) — în care se introduc valorile date ale lui ω_{med} şi δ — se determină valorile lui ψ_{max} şi ψ_{min}:

$$\operatorname{tg}\psi_{max} = \frac{1}{2}\frac{k_I}{k_E}\omega_{med}^2(1+\delta);$$

$$\operatorname{tg}\psi_{min} = \frac{1}{2}\frac{k_I}{k_E}\omega_{med}^2(1-\delta).$$

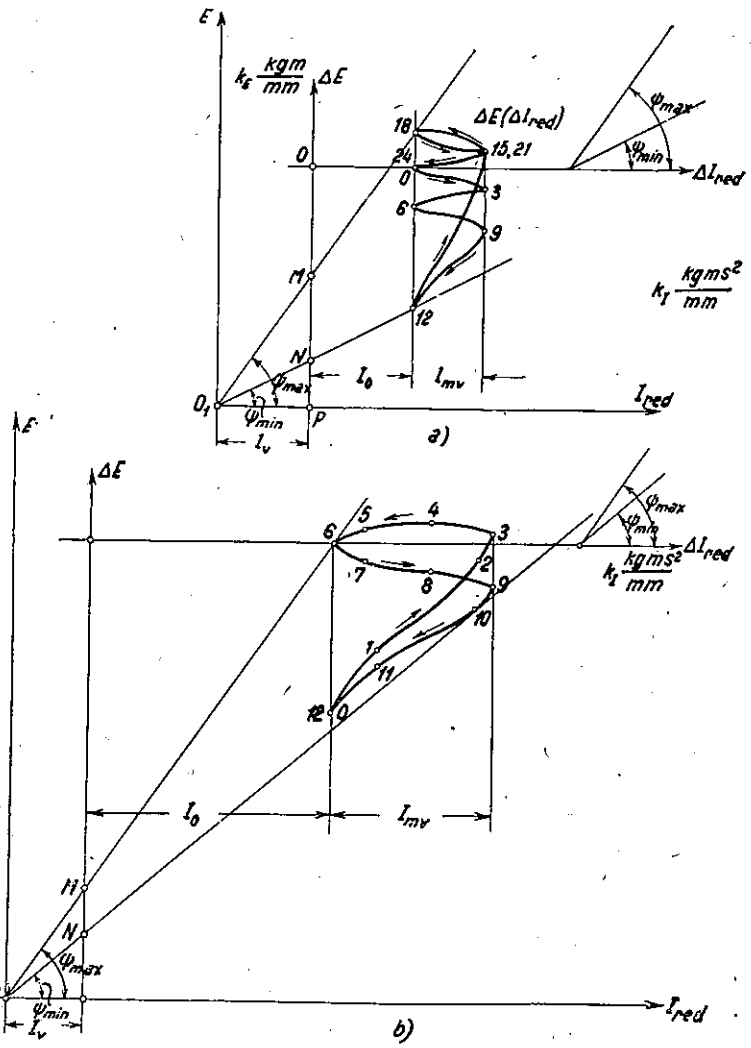


Fig. II.58. Determinarea lui I_v cu ajutorul diagramei $\Delta E(I_{red})$, cînd punctul de intersecţie O_1 al tangentelor la curbă se află în planul desenului.

e) Se duc tangentele la curba $\Delta E(\Delta I_{red})$ care să facă cu axa ΔI_{red} unghiurile ψ_{max}, respectiv ψ_{min}.

Acestea se intersectează în punctul O_1.

f) Rezultă imediat că

$$I_v = k_I(\overline{O_1P});$$
$$E_v = k_E(\overline{PO}),$$

ceea ce reiese şi din formulele (II.249) şi (II.250).

19.2. Cazul cînd cele două tangente se intersectează în afara planului hîrtiei

Acest caz este foarte des; deoarece în general δ fiind mic, diferenţa dintre ψ_{max} şi ψ_{min} este de asemenea foarte mică.

Pentru a găsi, în această situaţie, valoarea lui I_v se procedează după cum urmează:

In fig. II.58, *a*, unde este trasată diagrama $\Delta E(\Delta I_{red})$ a unui motor Diesel cu un cilindru în patru timpi, se notează cu M, respectiv N, intersecţiile celor două tangente (ψ_{max}, respectiv ψ_{min}) cu axa ΔE.

Cu aceste notaţii se poate scrie

$$\operatorname{tg}\psi_{max} = \frac{\overline{PM}}{\overline{O_1P}} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\psi_{min} = \frac{\overline{PN}}{\overline{O_1P}};$$

de aici rezultă:

$$\operatorname{tg}\psi_{max} - \operatorname{tg}\psi_{min} = \frac{\overline{PM} - \overline{PN}}{\overline{O_1P}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{O_1P}}$$

sau

$$\overline{O_1P} = \frac{\overline{MN}}{\operatorname{tg}\psi_{max} - \operatorname{tg}\psi_{min}}. \qquad (a)$$

Din (II.243) se scoate valoarea

$$\operatorname{tg}\psi_{max} - \operatorname{tg}\psi_{min} = \frac{k_I}{k_E}\omega_{med}^2\,\delta. \qquad (b)$$

Substituind valoarea lui $(\operatorname{tg}\psi_{max} - \operatorname{tg}\psi_{min})$ din (b) în (a), se obţine valoarea momentului de inerţie al volantului:

$$I_v = k_1(\overline{O_1P}) = \frac{k_E(\overline{MN})}{\omega_{med}^2\,\delta}. \qquad (II.282)$$

Valoarea segmentului $(\overline{MN})$ este deci o mărime proporţională cu momentul de inerţie al volantului. In fig. II.58, *b* s-a determinat I_v în cazul unui motor Diesel cu doi cilindri în patru timpi. Este evident că, la acelaşi grad de neregularitate δ impus pentru ambele motoare, volantul motorului cu doi cilindri este mai mic.

19.3. Observaţie importantă

Trebuie să se facă o distincţie clară între metoda de determinare a lui I_v cu ajutorul ecuaţiei de mişcare de la § 17.2 şi cea de la § 19.1 cu ajutorul diagramei $\Delta E(\Delta I_{red})$.

Astfel, în prima ecuaţie de mişcare intră momentul redus al tuturor forţelor exterioare inclusiv al celor de inerţie, conform ecuaţiei (II.259), din care a rezultat curba reprezentată în fig. II.52 şi suprafeţele planimetrate (haşurate) din fig. II.56.

In cazul metodei expuse la § 19.1, diagrama $\Delta E(\Delta I_{red})$ a fost trasată cu diagrama $\Delta E(\varphi)$ dedusă din integrarea grafică a ecuaţiei:

$$M_{red}=M_M-(M_{rt}+M_{E_p}+M_f)$$

sau

$$M_{red}=M_M-M_r.$$

In fig. II.59 sînt redate pentru motorul din fig. II.2 curbele $M_M(\varphi)$, $M_r(\varphi)$, diferenţa lor $M_{red}(\varphi)$ şi curba integrală $\int M_{red}(\varphi)$ notată cu $\Delta E(\varphi)$.

Se constată marea diferenţă dintre curba $M(\varphi)=M^D_{red}-M_{rt}$ din fig. II.52 şi curba $M_{red}(\varphi)$ din fig. II.59.

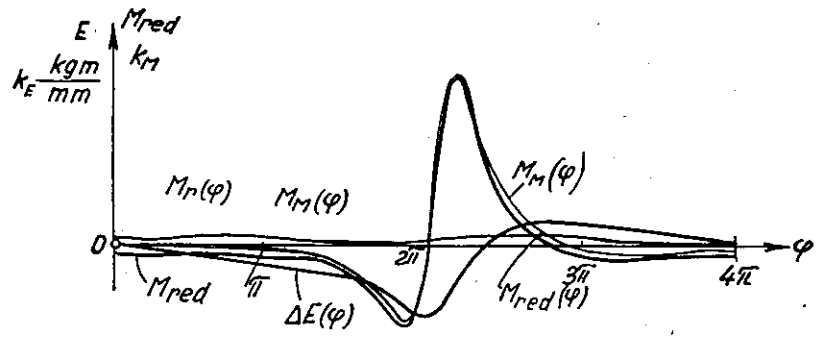


Fig. II.59. Determinarea lui M_{red} la un motor Diesel în patru timpi cu simplu efect.

De asemenea, această diferenţă apare şi între $z_1(\varphi)$ din fig. II.57 (care la altă scară poate fi considerată tot o diagramă $\Delta E(\varphi)$ şi curba $\Delta E(\varphi)$ din fig. II.59.

In sfîrşit, aceeaşi diferenţă apare şi între suprafeţele haşurate, care dau pe W_{max} din metodele de la § 17.1 şi § 17.2. La prima (§ 17.1) apare (M_M-M_r), în timp ce la doua apare $(M^D_{red}-M_{rt})=M$ la fel ca şi la § 20, formula II.288.

19.4. Diagramele $\Delta E(\Delta I_{red})$ pentru motoarele cu mai mulţi cilindri

In tehnică sînt din ce în ce mai des utilizate astăzi motoarele cu ardere internă cu mai mulţi cilindri.

După cum s-a arătat la § 14.1, utilizarea foarte răspîndită a acestora a dus la cerinţe tot mai accentuate de motoare de puteri mari. Acest lucru s-a realizat prin construirea de motoare cu mai mulţi cilindri, care prezintă mari avantaje, atît din punctul de vedere al uniformităţii vitezei unghiulare a arborelui motor, cît şi din punctul de vedere al echilibrării forţelor de inerţie (cap. V, § 36).

Uniformitatea mişcării motorului se datoreşte variaţiilor mici ale momentului motor M_M şi ale momentului de inerţie redus ΔI_{red} al motorului.

Se va arăta mai jos prin exemple cum se modifică M^D_{red}, ΔI_{red} şi $\Delta E(\Delta I_{red})$ la motoarele Diesel în doi şi patru timpi.

1. *Construcţia curbei $M^D_{red}(\varphi)$ la motoarele cu mai mulţi cilindri* se face uşor dacă toate mecanismele motoare ale cilindrilor sînt identice.

Astfel, curba $M^D_{red}(\varphi)$ a unui motor Diesel în doi timpi cu doi cilindri se construieşte după cum se arată în fig. II.60.

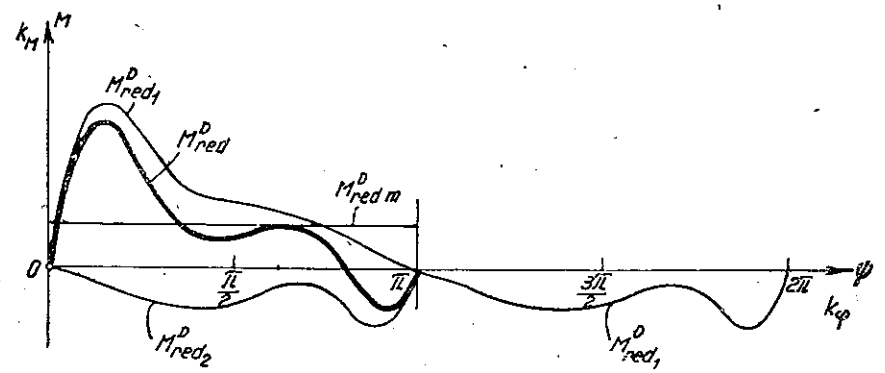


Fig. II.60. Determinarea curbei de variaţie a lui M^D_{red} la un motor Diesel în doi timpi cu 2 cilindri şi simplu efect.

Se trasează întîi curba $M^D_{red_1}(\varphi)=M_{M_1}-(M_{E_1}+M_{E_{p_1}}+M_{f_1})$ pentru primul cilindru al cărui ciclu energetic este 2π.

In acelaşi timp, în cilindrul al doilea procesul termic — deci şi $M^D_{red_2}$ — este decalat cu unghiul π.

Se deplasează, în consecinţă, curba $M^D_{red_1}$ cu π şi se face apoi suma lor algebrică.

Se obţine astfel curba $M^D_{red}(\varphi)$, (trasată cu linie groasă), a cărei perioadă de variaţie este egală cu $\Phi_E=\pi$.

Pentru cazul cînd numărul cilindrilor este j, curba $M^D_{red_1}$ a primului cilindru se fracţionează în j părţi, care se suprapun pe o lungime $\Phi_j=\frac{2\pi}{j}$, care este ciclul energetic al motorului cu j cilindri. In felul acesta fiecare porţiune a fost decalată cu cantitatea de $k\frac{2\pi}{j}$, unde $k=0,\ldots,j-1$.

In fig. II.61, *a* şi *b* este arătat modul de construire a diagramelor $M^D_{red}(\varphi)$, cu linii groase, ale unui motor cu trei cilindri în doi timpi (fig. II.61, *a*) şi ale unui motor cu patru cilindri tot în doi timpi (fig. II.61, *b*).

In fig. II.62, *a*, *b*, şi *c* sînt reprezentate aceleaşi curbe pentru un motor Diesel în doi timpi cu 5 cilindri (fig. II.62, *a*), cu 6 cilindri (fig. II.62, *b*) şi cu 8 cilindri (fig. II.62, *c*).

Dreapta orizontală reprezintă $M^D_{red\,m}$, obţinut conform formulei (II.222').

Se vede clar din aceste diagrame că, cu cît numărul cilindrilor este mai mare, cu atît valoarea medie a momentului redus M^D_{red} este mai mare, ceea ce demonstrează cele afirmate mai sus.

La motoarele Diesel în patru timpi cu decalaj egal între manivelele motoare, construcţia lui $M^D_{red}(\varphi)$ se face asemănător.

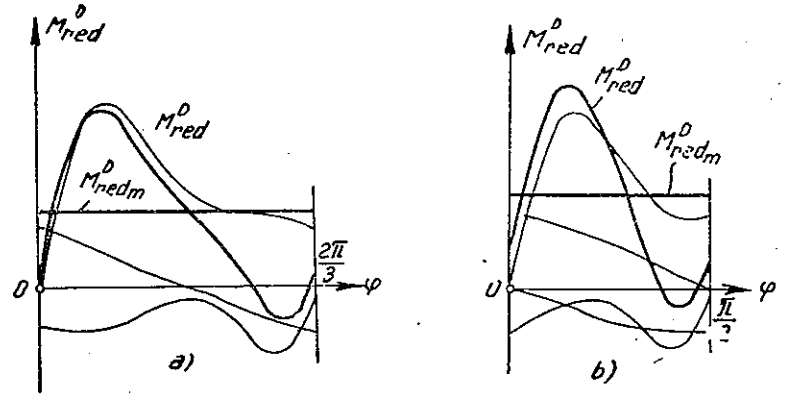


Fig. II.61. Determinarea lui M^D_{red} la un motor Diesel în doi timpi cu 3 cilindri (*a*) și 4 cilindri (*b*).

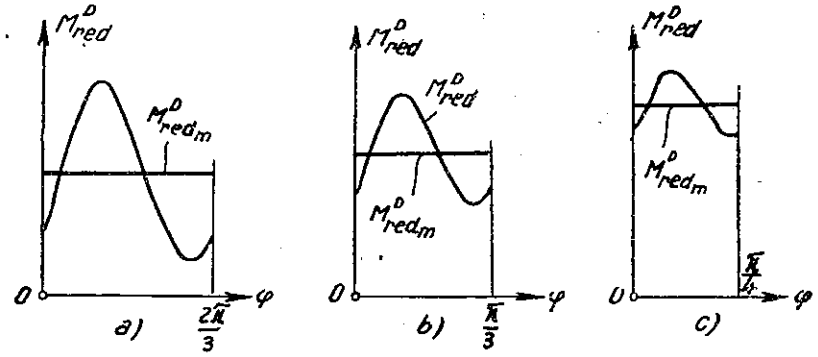


Fig. II.62. Determinarea lui M^D_{red} pentru 5 cilindri (*a*), 6 cilindri (*b*) și 8 cilindri (*c*).

Ciclul energetic al unui motor cu j cilindri în patru timpi va fi $\Phi_j = \frac{4\pi}{j}$, iar decalajul între cele j porțiuni din diagrama $M^D_{red_1}$ este

$$k \times \frac{4\pi}{j} \; (k = 0;\; 1;\; 2; \ldots;\; j-1).$$

În fig. II.63, *a*, *b* și *c* sînt arătate construcția curbei $M^D_{red}(\varphi)$ pentru motoarele în patru timpi cu 2 cilindri (fig. II.63, *a*), cu 3 cilindri (fig. II.63, *b*) și cu 4 cilindri (fig II.63, *c*).

În fig. II.64, *a*, *b* și *c* sînt redate curbele $M^D_{red}(\varphi)$ pentru un același tip de motor cu 5, 6 și respectiv 8 cilindri.

Se vede că la acest tip de motoare $M^D_{red\,m}$ nu mai atinge valorile de la motoarele de același număr de cilindri în doi timpi.

Se poate realiza o mărire a lui $M^D_{red\,m}$ prin adoptarea de decalaje diferite între cilindri.

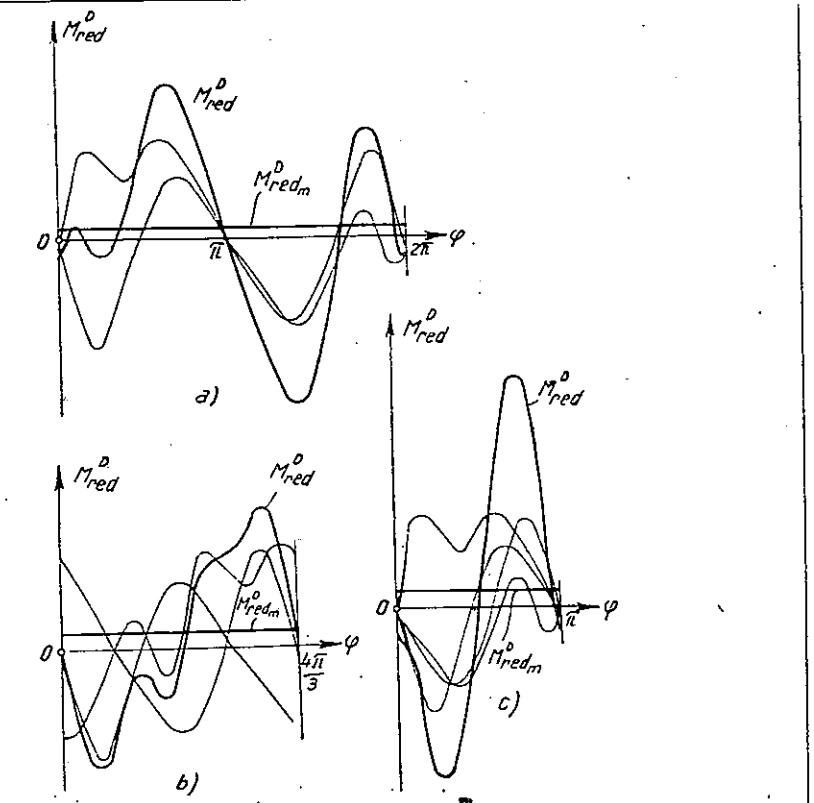


Fig. II.63. Determinarea lui M^D_{red} la un motor Diesel în patru timpi cu 2 cilindri (*a*), 3 cilindri (*b*) și 4 cilindri (*c*).

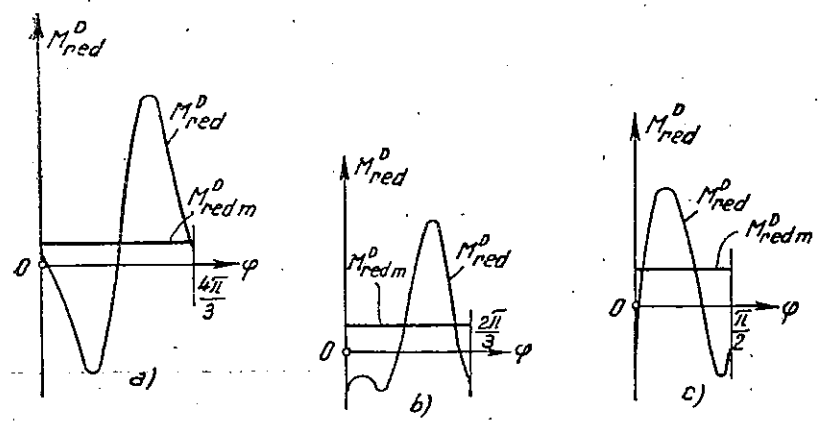


Fig. II.64. Determinarea lui M^D_{red} la un motor Diesel în patru timpi cu 5 cilindri (*a*), 6 cilindri (*b*) și 8 cilindri (*c*).

2. *Construcţia curbei* $\Delta I_{red}(\varphi)$ *la motoarele cu mai mulţi cilindri* se face la fel ca şi pentru curba $M_{red}^{D}(\varphi)$.

In fig. II.65, $a-f$ sînt trasate curbele $\Delta I_{red}(\varphi)$ pentru motoarele Diesel în doi timpi cu 2 cilindri (fig. II.65, *a*), 3 cilindri (fig. II.65, *b*) ... şi 8 cilindri (fig. II.65, *f*).

Evident că şi în acest caz ciclul de variaţie al lui $\Delta I_{red}(\varphi)$ este $\frac{2\pi}{j}$.

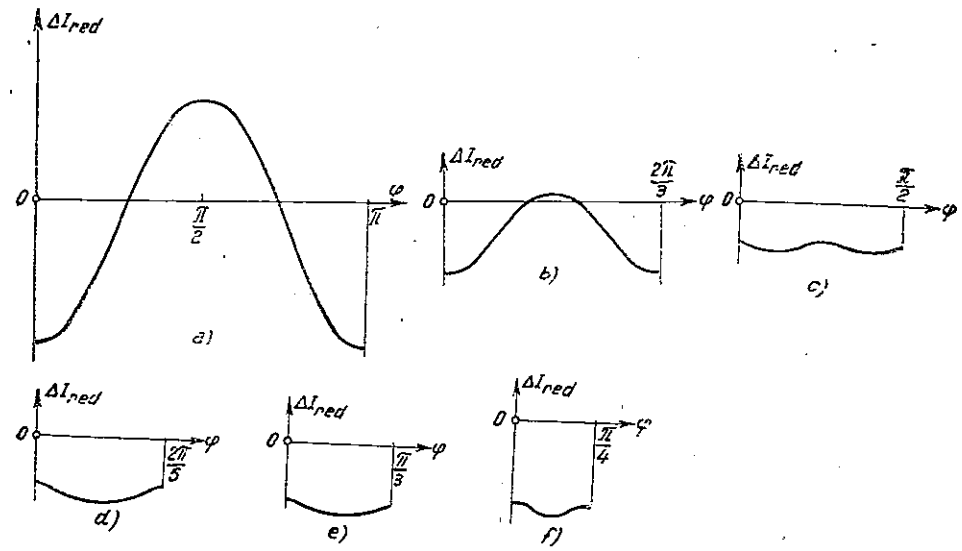


Fig. II.65. Curbele de variaţie ale lui $\Delta I_{red}(\varphi)$ pentru motorul Diesel în *doi timpi* cu 2 cilindri (*a*), 3 cilindri (*b*), 4 cilindri, (*c*), 5 cilindri (*d*), 6 cilindri (*e*) şi 8 cilindri (*f*).

Se constată că la motorul cu 6 cilindri, ΔI_{red} este aproape constant în timpul ciclului de variaţie (fig. II.65, *e*).

La motoarele în patru timpi (fig. II.66, $a-f$) se vede că variaţia lui ΔI_{red} este mică la motoarele cu un număr impar de cilindri (fig. II.66, *b* şi *d*) sau la cele cu mai mult decît 6 cilindri.

Acest lucru trebuie avut în vedere la proiectarea motorului.

O comparaţie între variaţia procentuală a lui ΔI_{red} în funcţie de numărul cilindrilor şi de numărul timpilor se vede în tabela II.4.

Tabela II.4. Variaţia lui ΔI_{red}

Număr de cilindri	Doi timpi %	Patru timpi %	Număr de cilindri	Doi timpi %	Patru timpi %
1	23	23	5	0,5	0,5
2	23	23	6	0,3	5
3	5	5	8	0,3	0,5
4	0,5	23			

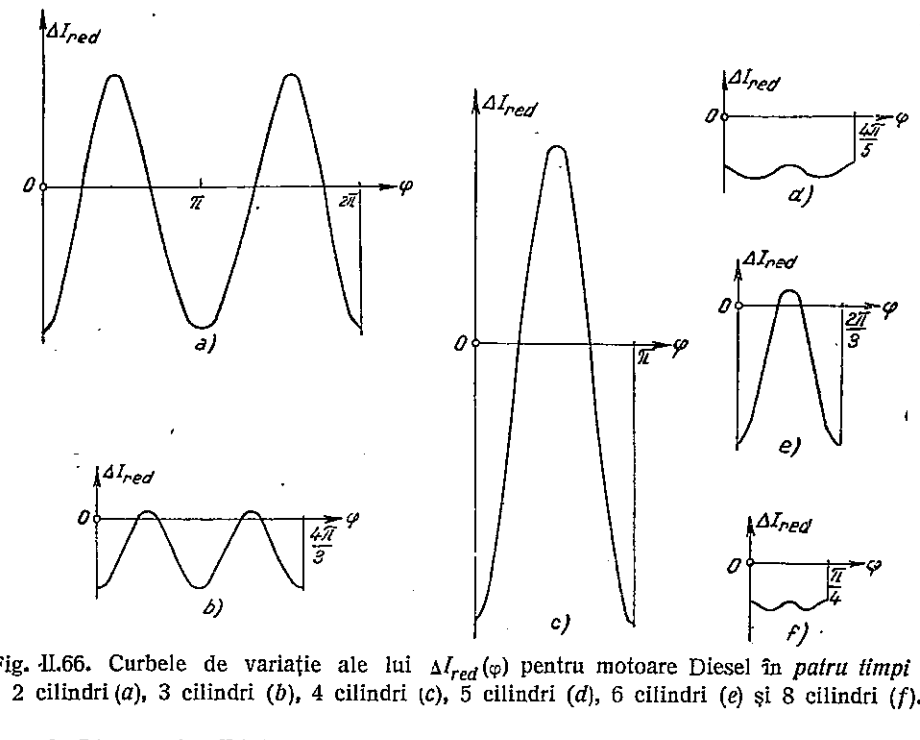


Fig. II.66. Curbele de variaţie ale lui $\Delta I_{red}(\varphi)$ pentru motoare Diesel în *patru timpi* cu 2 cilindri (*a*), 3 cilindri (*b*), 4 cilindri (*c*), 5 cilindri (*d*), 6 cilindri (*e*) şi 8 cilindri (*f*).

3. *Diagramele* $\Delta E(\Delta I_{red})$ *pentru motoarele cu mai mulţi cilindri* se construiesc la fel ca şi pentru un singur cilindru. După cum s-a arătat la § 18.3, la construcţia lui $\Delta E(\Delta I_{red})$ se va folosi curba $M_{red}(\varphi)$.

In fig. II.67, $a-f$ sînt redate curbele $\Delta E(\Delta I_{red})$ la motoarele Diesel în patru timpi cu 2, 3, 4, 5, 6 şi 8 cilindri.

Apare evident că la un acelaşi grad de neregularitate δ, impus atît unui motor cu opt cilindri cît şi unuia cu un singur cilindru, va rezulta la acesta din urmă un volant mult mai mare din cauza variaţiilor mari ale lui ΔI_{red} şi $\Delta E(\varphi)$.

Astfel, cu cît distanţa măsurată pe axa ΔE a punctelor de tangenţă la curba $\Delta E(\Delta I_{red})$ este mai mică, cu atît segmentul MN este mai mic şi originea O_1 mai apropiată.

De exemplu, la motorul cu opt cilindri segmentul MN va fi mult mai mic decît la motorul cu un singur cilindru (fig. II.58) şi deci valoarea lui I_v dată de formula (II.282) este pentru primul mult mai mică (la aceeaşi putere).

19.5. Aplicaţie

Să se calculeze masa volantului unui motor cu ardere internă în patru timpi pentru diferite grade de neregularitate δ.

Se dau următoarele date (fig. II.68):

Raza butonului de manivelă: $r=\overline{OA}=0{,}047$ m.

Biela motoare: $\overline{AB}=0{,}195$ m; $AG_2=0{,}051$ m;

$\overline{BG_2}=0{,}144$ m; $I_{G_2}=0{,}0003$ kgms^2;

$m_2=0{,}0378$ kgs^{2}m^{-1}; $G_2=0{,}371$ kg.

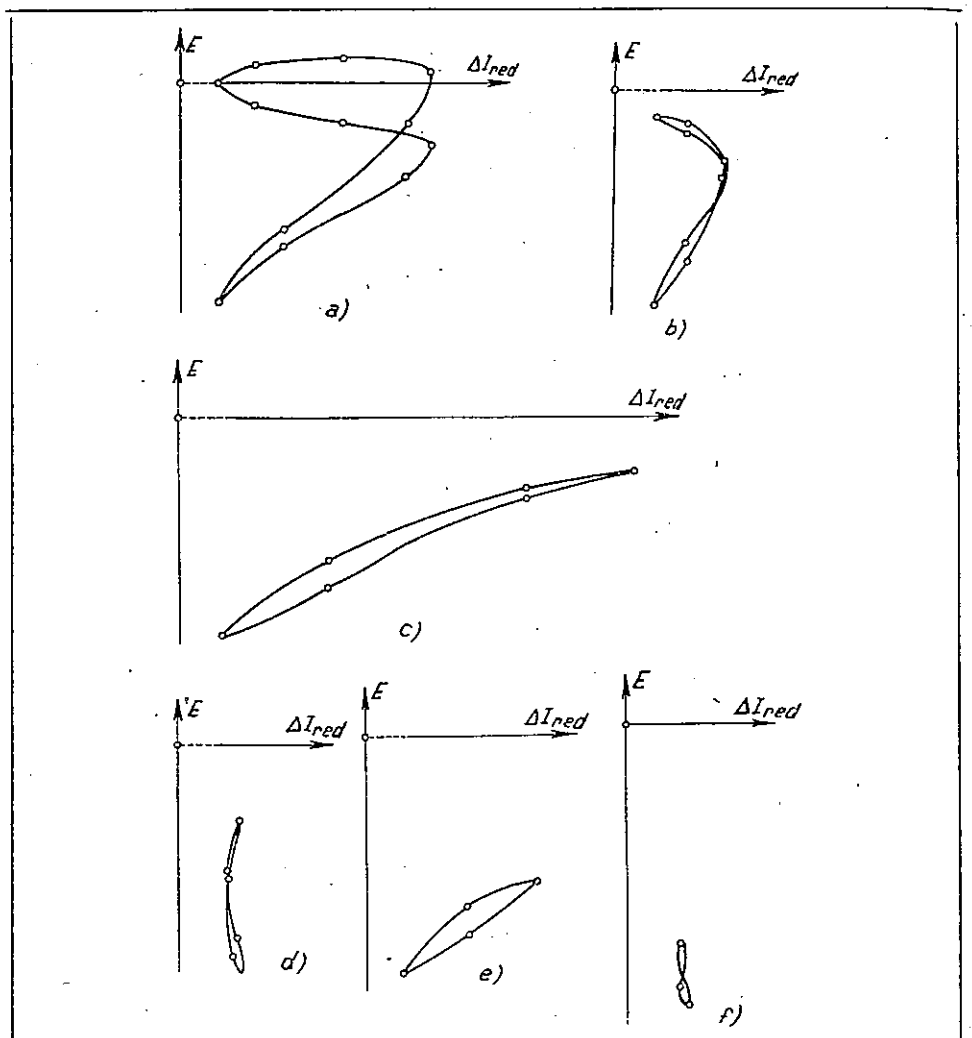


Fig. II.67. Diagramele $\Delta E(\Delta I_{red})$ la motoare Diesel în patru timpi cu 2 cilindri (*a*), 3 cilindri (*b*), 4 cilindri (*c*), 5 cilindri (*d*), 6 cilindri (*e*) și 8 cilindri (*f*).

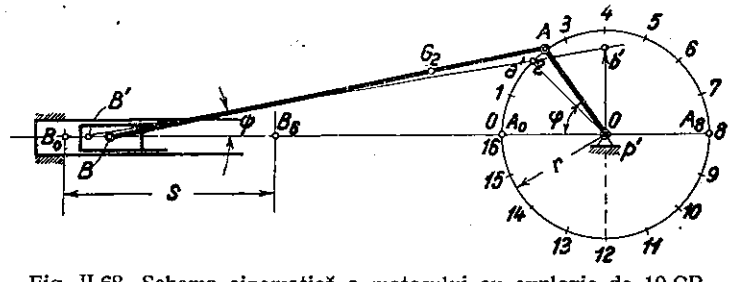


Fig. II.68. Schema cinematică a motorului cu explozie de 10 CP.

Pistonul și bulonul de articulație: $m_3 = 0{,}078$ kgs²m^{-1};
$G_3 = 0{,}7649$ kg.

Turația manivelei: $n_{max} = 4\,000$ rot/min.

Diametrul cilindrului: $D_3 = 0{,}082$ m.

Suprafața pistonului: $A_3 = 52{,}78$ cm².

Cilindreea (volumul descris de piston) $V_c = 493$ cm³.

Gradul de compresie: $\varepsilon = 4{,}2$.

Puterea maximă: $P_{max} = 10$ CP.

Soluție. 1. *Construirea curbelor* $W_{M_{red}}(\varphi)$, $W_{r_{red}}(\varphi)$ și $W(\varphi)$. Motorul fiind în patru timpi, rezultă că ciclul energetic în mișcarea de regim cuprinde două rotații complete ale manivelei OA. Deci, $\Phi_E = 4\pi$.

La sarcina maximă la care motorul dezvoltă puterea maximă de 10 CP și are viteza de rotație $n = 4\,000$ rot/min, se construiește diagrama teoretică a ciclului energetic (fig. II.69, *a*) pentru următoarele date:

— presiunea în timpul aspirației $p_0 = 0{,}9$ ata;

— presiunea la sfîrșitul destinderii gazelor de ardere (la 45° înaintea punctului mort interior) $p_1 = 3$ ata;

— presiunea în timpul emisiunii gazelor arse $p_2 = 1{,}1$ ata;

— presiunea medie indicată $p_m = 4{,}44$ ata;

— construcția curbei de compresie se face cu exponentul politropic $n = 1{,}2$;

— curba de destindere este o politropă cu $n = 1{,}36$;

— începutul exploziei amestecului are loc la 15° înaintea punctului mort exterior;

— în fig. II.69 *b* este dată curba de variație a presiunii în cilindru în funcție de drumul pistonului pentru două rotații complete ale manivelei, corespunzătoare celor patru „timpi" ai ciclului, și anume:

de la 0— 8 „timpul" de aspirație a amestecului combustibil;

de la 8—16 „timpul" de compresie a amestecului combustibil;

de la 16—24 „timpul" de destindere a gazelor arse;

de la 24—32 „timpul" de evacuare a gazelor arse.

Pentru fiecare poziție a butonului de manivelă A de la 0—32 se determină astfel valoarea presiunii absolute în cilindru. Aceste valori înmulțite cu suprafața pistonului vor da mărimea forței care acționează în interiorul cilindrului asupra pistonului.

La calculul forței efective trebuie să se țină seamă de presiunea atmosferică ce acționează asupra suprafeței exterioare a pistonului.

Astfel, pentru o poziție din timpul aspirației, forța care acționează asupra pistonului este

$$F_3 = A_3 p_0 - A_3 p_{at} = A_3 (p_0 - p_{at}),$$

în care $p_{at} = 1$ kgf/cm².

Făcînd înlocuirile, se obține:

$$F_3 = 52{,}78 \times (0{,}9 - 1) = -5{,}278 \text{ kgf}.$$

Valoarea forței este negativă, deci se opune mișcării pistonului.

Toate valorile forței F_3 obținute cum s-a arătat mai sus se reduc la butonul de manivelă, folosind, fie metoda pîrghiei lui N. E. Jukovski, fie formulele (II.32) și (II.33).

Astfel, pentru o poziție oarecare a manivelei, formula (II.32) devine

$$F_{M\,red} = F_3 \frac{v_3}{v_A} \cos \alpha,$$

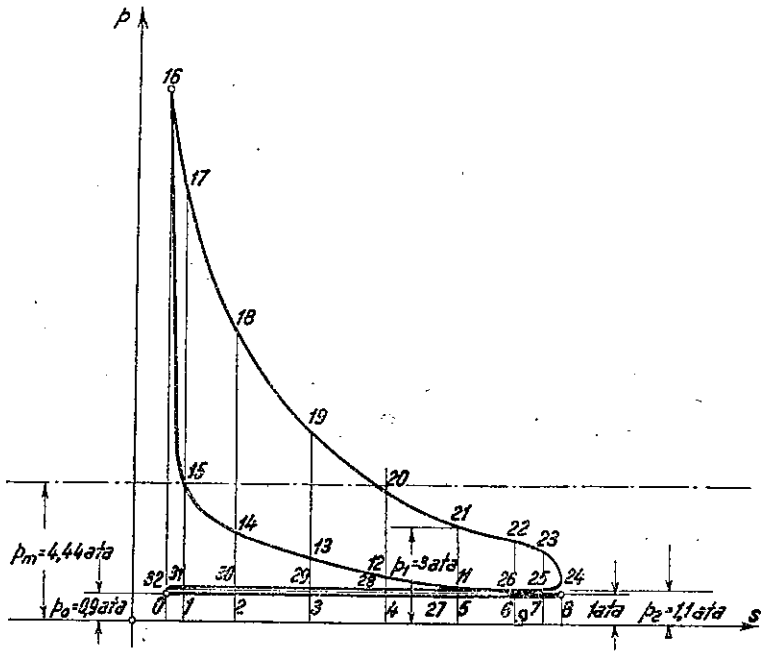


Fig. II.69, *a*. Diagrama indicată a motorului cu explozie de 10 CP.

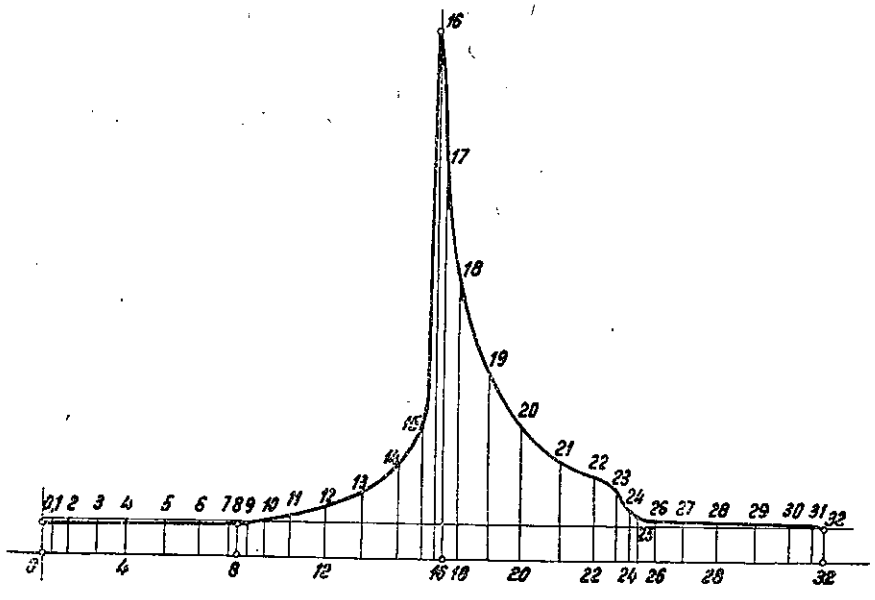


Fig. II.69, *b*. Variația forței reduse la butonul de manivelă (forța tangențială).

în care: α este unghiul dintre F_3 și v_3 (egal cu zero sau cu π);

v_A — viteza butonului de manivelă (punctul de reducere);

v_3 — viteza pistonului, care are expresia analitică dată de formula

$$v_3 = v_A \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}.$$

Deci,

$$F_{M\,red} = F_3 \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}. \qquad \text{(II.283)}$$

Cu formula (II.283) se calculează astfel toate forțele reduse la butonul de manivelă, putîndu-se construi o curbă numită „diagrama forțelor tangențiale".

Pîrghia lui N. E. Jukovski permite construirea grafică a acestei diagrame prin construcția planului vitezelor rotit cu 90° chiar pe planul mecanismului. Din triunghiul $p'a'b'$ (fig. II.68), dacă $p'a'$ este dat (egal cu F_3 la scara k_F), atunci $p'b'$ este tocmai valoarea forței reduse $F_{M\,red}$ (forța tangențială la butonul de manivelă).

Prin înmulțirea lui $F_{M\,red}$ cu spațiul parcurs, se obține lucrul mecanic al forței motoare $W_M(\varphi)$, care se va scrie pentru claritate $W_{M\,red}(\varphi)$.

In tabela II.5 sînt date în coloanele 2, 3 și 4 valorile forței motoare medie reduse $F_{M\,red}$ și ale momentului motor mediu redus $M_{M\,red}$ ($M_{M\,red} = rF_{M\,red}$), precum și lucrul mecanic efectuat de acestea, obținut prin însumarea lucrurilor mecanice parțiale efectuate de $F_{M\,red}$ (sau $M_{M\,red}$) în intervalul corespunzător unei $\frac{1}{16}$ din lungimea traiectoriei butonului de manivelă.

Tabela II.5. Calculul lucrului mecanic rezultant

Poziția butonului de la O (punctul mort exterior)	Forța motoare medie redusă $F_{M\,red}$ kgf	Momentul motor mediu redus $M_{M\,red}$ kgm	Lucrul mecanic motor redus $W_{M\,red}$ kgm	Forța rezistentă redusă $F_{r\,red}$ kgf	Lucrul mecanic rezistent redus $W_{r\,red}$ kgm	Lucrul mecanic rezultant W kgm
1	2	3	4	5	6	7
2	— 3,08	— 0,145	— 0,114	−38,1	— 1,406	— 1,520
4	— 7,378	— 0,347	— 0,387	−38,1	— 2,812	— 3,199
6	— 6,351	— 0,299	— 0,622	−38,1	— 4,218	— 4,840
8	— 2,081	— 0,097	— 0,699	−38,1	— 5,624	— 6,323
10	— 0,919	— 0,043	— 0,733	−38,1	— 7,030	— 7,763
12	— 6,23	— 0,293	— 0,963	−38,1	— 8,436	— 9,399
14	— 48,16	— 2,274	— 2,745	−38,1	— 9,842	−12,587
16	— 55,81	— 2,625	— 4,810	−38,1	−11,248	−16,058
18	+314,59	+14,85	+ 6,830	−38,1	−12,654	— 5,824
20	+277,83	+13,05	+17,110	−33,1	−14,060	+ 3,050
22	+140,27	+ 6,60	+22,300	−33,1	−15,466	+ 6,834
24	+ 24,32	+ 1,143	+23,200	−38,1	−16,872	+ 6,328
26	— 3,78	— 0,177	+23,060	−38,1	−18,278	+ 4,782
28	— 5,67	— 0,267	+22,850	−38,1	−19,684	+ 3,166
30	— 6,75	— 0,318	+22,600	−38,1	−21,090	+ 1,510
32	— 2,70	— 0,127	+22,500	− 38,1	−22,500	0,000

Acest drum este:

Pentru forța redusă: $\frac{2\pi r}{16} = 0{,}018447$ m.

Pentru momentul redus: $\frac{2\pi}{16} = 0{,}3924$ rad.

Astfel, lucrul mecanic consumat de forța motoare redusă la butonul de manivelă A, de la 0 pînă la punctul 4 $\left(\text{deci cînd manivela a descris un unghi } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, se obține prin adunarea la valoarea $-0{,}114$ kgm (lucrul mecanic consumat de $F_{M\,red}$ de la 0 pînă la 2) a lucrului mecanic consumat de la 2 pînă la 4, adică a cantității:

$$W_{M\,red_{2-4}} = -7{,}378 \times 0{,}018447 \times 2 = 0{,}273 \text{ kgm.}$$

Deci:

$$W_{M\,red_{0-4}} = -0{,}144 + (-0{,}273) = -0{,}387 \text{ kgm.}$$

(Semnul minus provine din faptul că unghiul dintre forță și deplasare este de 180°).

Momentele motoare reduse $M_{M\,red}(\varphi)$ din coloana 3 sînt obținute prin înmulțirea forțelor reduse din coloana 2 cu raza butonului de manivelă $r = 0{,}047$ m.

Cu ajutorul valorilor din coloana 4 se poate trasa curba $W_M(\varphi) = M_{M\,red}(\varphi)$ pentru faza de regim a motorului (fig. II.70, *a*).

Curba $W_r(\varphi)$ se construiește pentru puterea maximă absorbită $P_{max} = 10$ CP și $n = 4\,000$ rot/min, căreia îi corespunde o forță tangențială redusă la butonul de manivelă A dedusă din formula clasică:

$$P_{max} = \frac{F_r v}{75},$$

în care v este viteza tangențială a butonului de manivelă corespunzătoare lui $n = 4\,000$ rot/min

$$v = \frac{\pi r n}{30} = \frac{3{,}14 \times 0{,}047 \times 4\,000}{30} = 19{,}67 \text{ ms}^{-1}.$$

Înlocuind această valoare în expresia puterii, se obține:

$$F_r = \frac{75\,P_{max}}{v} = \frac{75 \times 10}{19{,}67} = 38{,}1 \text{ kgf.}$$

Valoarea acestei rezistențe tehnologice redusă la butonul de manivelă se consideră constantă în timpul fazei de regim.

Momentul $M_r(\varphi)$ al rezistenței tehnologice este deci și el constant și egal cu:

$$M_r = rF_r = 0{,}047 \times 38{,}1 = 1{,}7907 \text{ kgm.}$$

Lucrul mecanic $W_r(\varphi)$ al rezistenței tehnologice va varia liniar cu unghiul φ și se obține din produsul $F_r s$ sau din produsul $M_r \varphi$.

Pentru primul caz, rezultă:

$$W_{r_{0-2}} = -38{,}1 \times 0{,}0368 = -1{,}406 \text{ kgm;}$$

$$W_{r_{0-4}} = W_{r_{0-2}} + W_{r_{2-4}} = -1{,}406 + (-1{,}406) = -2{,}812 \text{ kgm}$$

etc.

In coloana 6 a tabelei II.5 sînt trecute valorile lucrului mecanic al rezistenței tehnologice pentru puterea maximă $P_{max} = 10$ CP și $n = 4\,000$ rot/min.

Cu ajutorul acestor valori se trasează dreapta $W_{r\,red}(\varphi)$ în fig. II.70, *a*.

Se constată că la sfîrșitul ciclului energetic Φ_E există relația evidentă:

$$W_{M_{0-32}} = W_{r_{0-32}} = 22{,}500 \text{ kgm.}$$

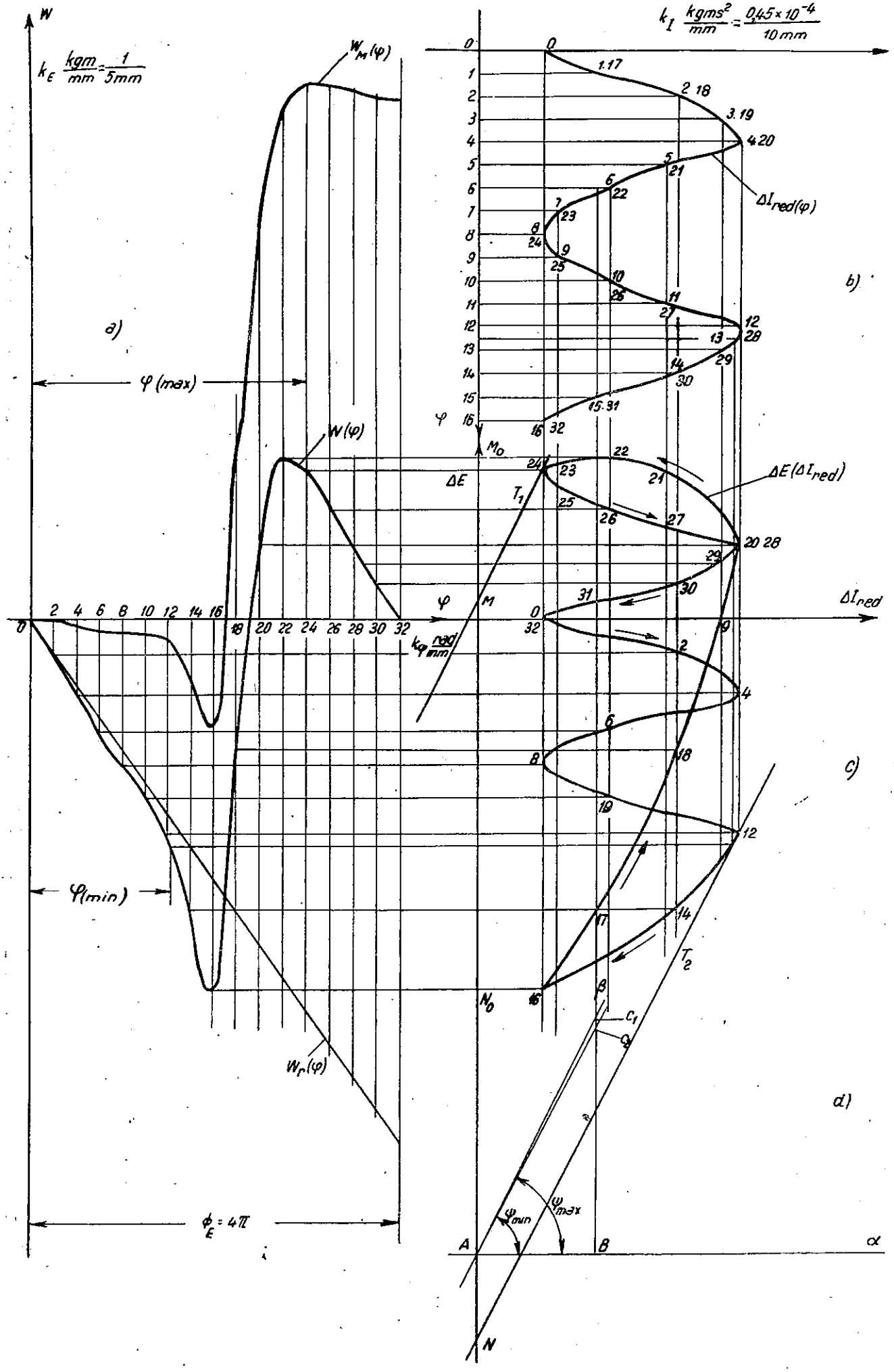


Fig. II.70. Construcția diagramei $\Delta E(\Delta I_{red})$ la motorul de 10 CP în patru timpi și determinarea segmentului (MN) care la scară dă mărimea lui I_v.

Din cele două curbe $W_M(\varphi)$ și $W_r(\varphi)$ se construiește curba $W(\varphi)$ ale cărei ordonate sînt date în coloana 7 a tabelei II.5, după care cu acele date s-a trasat curba din fig. II.70, *a*.

2. *Construirea curbei* $\Delta I_{red}(\varphi)$. Deoarece volantul motorului este pe axul motor, calculul momentului de inerție redus I_{red} sau al masei reduse m_{red} la butonul de manivelă A se va face fără luarea în considerație a masei manivelei motoare și a arborelui motor ale căror valori vor fi cuprinse în momentul de inerție redus al volantului.

Se consideră necunoscută în acest caz cantitatea (I_0+I_v) din fig. II.55, care urmează să fie calculată deci cu ajutorul diagramei $\Delta E(\Delta I_{red})$.

Se va construi, în consecință, numai curba de variație a momentului de inerție redus al pistonului, al bulonului de articulație a pistonului (boltului) și al bielei, în raport cu butonul de manivelă, adică $I_{mv}(\varphi)$.

Pentru calculul valorilor lui $\Delta I_{red}=I_{mv}(\varphi)$ se folosesc aceleași plane ale vitezelor, care au servit și la determinarea forței motoare reduse ($F_{M\,red}$).

Formula (II.10) aplicată la acest motor devine:

$$\Delta m_{red}=I_{G_1}\left(\frac{\omega_1}{v_A}\right)^2+m_1\left(\frac{v_{G_1}}{v_A}\right)^2+I_{G_2}\left(\frac{\omega_2}{v_A}\right)^2+m_2\left(\frac{v_{G_2}}{v_A}\right)^2+m_3\left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2.$$

Deoarece nu se iau în considerație decît biela și pistonul, primii doi termeni din membrul al doilea dispar și atunci expresia devine:

$$\Delta m_{red}=I_{G_2}\left(\frac{\omega_2}{v_A}\right)^2+m_2\left(\frac{v_{G_2}}{v_A}\right)^2+m_3\left(\frac{v_B}{v_A}\right)^2;$$

înlocuind mai sus $\omega_2=\dfrac{v_{BA}}{AB}$ și pe v_A, v_{BA}, v_B, v_{G_2}, cu mărimile corespunzătoare din planul vitezelor, se obține:

$$\Delta m_{red_0}=\frac{I_{G_2}}{\overline{AB}^2}\left(\frac{\overline{a'b'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+m_2\left(\frac{\overline{p'g_2'}}{\overline{p'a'}}\right)^2+m_3\left(\frac{\overline{p'b'}}{\overline{p'a'}}\right)^2.$$

Pentru exemplificare se vor determina Δm_{red} și ΔI_{red} cînd manivela se află în punctul mort exterior A_0 din fig. II.71.

Din figură rezultă că:

$$v_{BA}=v_{B_0A_0}=k_v\left(\overline{p'a_0'}\right),$$

deoarece

$$\overline{a'b'}=\overline{a_0'b_0'}=\overline{p'a'}=\overline{p'a_0'}.$$

De asemenea

$$\frac{\overline{a'b'}}{\overline{p'a'}}=\frac{\overline{a_0'b_0'}}{\overline{p'a_0'}}=1$$

și

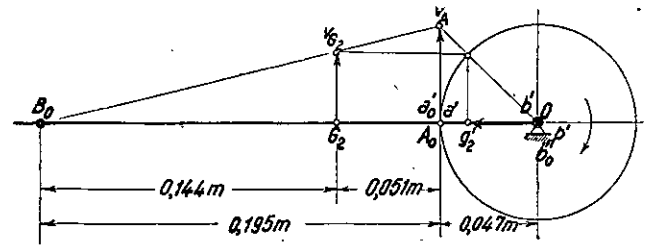


Fig. II.71. Determinarea lui ΔI_{red} al motorului cu explozie de 10 CP pentru punctul mort exterior.

$$\frac{\overline{p'g_2'}}{\overline{p'a_0'}}=\frac{\overline{B_0G_2}}{\overline{B_0A_0}}=\frac{0{,}144}{0{,}195}=0{,}738;$$

$$\overline{p'b'}=\overline{p'b_0'}=0.$$

Inlocuind aceste valori în formula de mai sus împreună cu mărimile din datele problemei, se obţine masa redusă în punctul A_0:

$$\Delta m_{red_0} = \frac{0{,}0003}{0{,}195^2} \times 1^2 + 0{,}0378 \times 0{,}738^2 = 0{,}0286 \text{ kgs}^2\text{m}^{-1}.$$

Momentul de inerţie redus la manivelă în poziţia 0 este deci:

$$\Delta I_{red_0} = r^2 m_{red_0} = 0{,}047^2 \times 0{,}0286 = 0{,}00006317 \text{ kgms}^2.$$

Rezultatele calculelor se înscriu în tabela II.6 pentru cele 16 poziţii ale butonului de manivelă.

Tabela II.6. Calculul lui ΔI_{red}

Poziţia butonului de manivelă	Masa redusă la punctul A Δm_{red} kgs²m⁻¹	Greutatea masei reduse în A ΔG_{red} kg	Momentul de inerţie redus la manivelă ΔI_{red} kgms²
1	2	3	4
0 şi 16	0,0286	0,281	0,00006317
1 şi 15	0,0461	0,452	0,00010183
2 şi 14	0,0890	0,873	0,00019660
3 şi 13	0,1090	1,070	0,00024078
4 şi 12	0,1159	1,138	0,00025602
5 şi 11	0,0837	0,821	0,00018469
6 şi 10	0,0582	0,571	0,00012856
7 şi 9	0,0361	0,354	0,00007974
8	0,0286	0,281	0,00006317

Cu ajutorul acestor date se construieşte apoi curba $\Delta I_{red} = I_{mv}(\varphi)$ din fig. II.70, *b*.

Calculele se pot face şi cu ajutorul formulelor (II.17), (II.23) şi (II.25) de la § 3.1.1, unde s-a calculat ca exemplificare ΔI_{red} pentru $\varphi = 0,\ \pi,\ 2\pi$.

3. *Construirea diagramei* $W(\Delta I_{red}) = \Delta E(\Delta I_{red})$.

Cu ajutorul metodei cunoscute (§ 11.2) se construieşte diagrama $\Delta E(\Delta I_{red})$, unde ΔE este eenergia cinetică a masei reduse Δm_{red}.

In fig. II.70, *c* este reprezentată diagrama cu ajutorul căreia urmează acum să se determine masa volantului, a manivelei şi a arborelui motor.

4. *Calculul masei volantului.* Scările la care s-a făcut construcţia diagramei $\Delta E(\Delta I_{red})$ sînt:

— scara energiei cinetice şi a lucrurilor mecanice

$$k_E \frac{\text{kgm}}{\text{mm}} = \frac{1 \text{ kgm}}{5 \text{ mm}} = \frac{1}{5};$$

— scara unghiurilor φ

$$k_\varphi \frac{\text{rad}}{\text{mm}} = \frac{0{,}7848 \text{ rad}}{5 \text{ mm}} = \frac{1 \text{ rad}}{6{,}37 \text{ mm}} = \frac{1}{6{,}37};$$

— scara momentelor de inerţie

$$k_I \frac{\text{kgms}^2}{\text{mm}} = \frac{0{,}45 \times 10^{-4} \text{ kgms}^2}{10 \text{ mm}} = \frac{1 \text{ kgms}^2}{2{,}22 \times 105 \text{ mm}}.$$

Dacă în loc de ΔI_{red} se pune în abscisă ΔG_{red}, scara va fi:

$$k_G = \left(\frac{\text{kgf}}{\text{mm}}\right) = \frac{1 \text{ kgf}}{100 \text{ mm}} = \frac{1}{100}.$$

Calculul masei volantului se face acum cu formulele (II.247), (II.248) şi (II.282).

Se determină în primul rînd valorile tangentelor trigonometrice maxime la curba $\Delta E(\Delta I_{red})$.

Se va lua un grad de neregularitate

$$\delta = \frac{1}{100}.$$

Din formula

$$\omega_{med} = \frac{\pi n}{30}$$ se obţine valoarea vitezei unghiulare medii:

$$\omega_{med} = \frac{3{,}14 \times 4\,000}{30} = 418 \text{ rad/s};$$

atunci

$$\text{tg } \psi_{max} = \frac{1}{2} \frac{k_I}{k_E} \omega_{med}^2 (1+\delta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2{,}22 \times 10^5}}{\frac{1}{5}} 418^2 (1+0{,}01) = \frac{5 \times 418^2 \times 1{,}01}{2 \times 2{,}22 \times 10^5} = 1{,}98729;$$

$$\text{tg } \psi_{min} = \frac{1}{2} \frac{k_I}{k_E} \omega_{med}^2 (1-\delta) = \frac{5 \times 418^2 \times 0{,}99}{2 \times 2{,}22 \times 10^5} = 1{,}94793.$$

In fig. II.70, *d* se ia pe $A\alpha$ segmentul $AB = 2{,}5$ cm. Din B se duce $B\beta \perp A\alpha$.
Pe dreapta $B\beta$ se iau segmentele:

$$\overline{BC_1} = \frac{19{,}8729 \text{ cm}}{4} = 4{,}968 \text{ cm} = 49{,}68 \text{ mm};$$

$$\overline{BC_2} = \frac{19{,}4793 \text{ cm}}{4} = 4{,}869 \text{ cm} = 48{,}69 \text{ mm}.$$

Unghiurile formate prin unirea lui A cu C_1 şi cu C_2 sînt tocmai ψ_{max}, respectiv ψ_{min}, deoarece:

$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}} = \frac{4{,}968}{2{,}5} = \frac{19{,}8729}{10} = 1{,}98729 = \text{tg } \psi_{max}$$

şi

$$\frac{\overline{BC_2}}{\overline{AB}} = \frac{4{,}869}{2{,}5} = \frac{19{,}4793}{10} = 1{,}94793 = \text{tg } \psi_{min}.$$

In fig. II.70, *c* se duc tangentele la curba $\Delta E(\Delta I_{red})$, paralele cu $\overline{AC_1}$, respectiv $\overline{AC_2}$.

Tangenta $T_1 \parallel AC_1$ intersectează axa ΔE în M, iar tangenta $T_2 \parallel AC_2$ o intersectează în N.

Segmentul $(\overline{MN})$ este proporţional cu momentul de inerţie al volantului, manivelei şi arborelui motor.

Măsurînd pe desen, se găseşte:

$$(\overline{MN}) = 158{,}5 \text{ mm}.$$

Inmulţind cu scara k_E, rezultă:

$$k_E(\overline{MN}) = \frac{1}{5} \times 158{,}5 = 31{,}7 \text{ kgm}.$$

Introducînd această valoare în formula (II.282), se obţine:

$$I_v = \frac{k_E(\overline{MN})}{\omega_{med}^2 \delta} = \frac{31{,}7}{418^2 \times \frac{1}{100}} = 0{,}01814 \text{ kgms}^2;$$

$$I_v = 0{,}01810 \text{ kgms}^2.$$

Greutatea volantului, a manivelei motoare şi a arborelui motor redusă la butonul de manivelă este dată de relaţia:

$$\frac{G_{red}}{g} = \frac{I_v}{r^2},$$

de unde

$$G_{red} = g\frac{I_v}{r^2} = 9{,}81 \times \frac{0{,}0181}{0{,}047^2};$$

$$G_{red} = 80{,}571 \text{ kg}.$$

Pentru a vedea influenţa gradului de neregularitate asupra greutăţii volantului se poate construi o diagramă în care pe abscisă se înscriu valorile lui $\frac{1}{\delta}$, iar pe ordonată — valorile lui I_v sau G_{red} corespunzătoare.

In tabela II.7 sînt date valorile segmentului $\overline{MN}$ în mm şi în kgm, şi valorile lui I_v şi G_{red} pentru $\delta = \frac{1}{10} \ldots \frac{1}{100}$.

Tabela II.7 Calculul greutăţii volantului pentru diferite valori ale lui δ

δ	Mărimea segmentului MN		I_v	G_{red}
	mm	kgm	kgms²	kg
1	2	3	4	5
1/10	151,0	30,2	0,00173	7,676
1/20	152,0	30,4	0,00348	15,453
1/30	153,0	30,6	0,00525	23,337
1/40	154,0	30,8	0,00705	31,313
1/50	155,0	31,0	0,00887	39,396
1/60	156,0	31,2	0,01071	47,580
1/70	157,0	31,4	0,01261	56,010
1/80	157,5	31,5	0,01442	64,056
1/90	158,0	31,6	0,01628	72,285
1/100	158,5	31,7	0,01814	80,571
1/150	162,0	32,4	0,02782	123,525
1/200	166,0	33,2	0,03800	168,767

5. *Observaţii.* a) Scăzînd din I_v partea corespunzătoare manivelei şi arborelui motor, rămîne partea care revine volantului propriu-zis.

Calculul din tabela II.6 se putea face incluzînd în ΔI_{red} şi momentele de inerţie constante ale arborelui motor şi manivelei (I_0 din fig. II.55). In acest caz, din formula (II.282) rezultă numai I_v al volantului propriu-zis.

Este important de menţionat că momentul de inerţie al arborelui motor este foarte mic în comparaţie cu celelalte momente de inerţie şi, în special, faţă de al volantului.

Este suficient să se compare valorile lui ΔI_{red} din coloana 4 a tabelei II.6 cu cele ale volantului date în coloana 4 a tabelei II.7. Astfel, pentru $\delta = \frac{1}{100}$ rezultă:

$$\frac{\Delta I_{red}}{I_v} = \frac{0{,}000256}{0{,}01814} = \frac{1}{70}.$$

Mai sus s-a luat pentru ΔI_{red} valoarea cea mai mare pe care o capătă în timpul ciclului energetic din mişcarea de regim.

De altfel, acest lucru se vede şi în fig. II.70, *c*, unde tangentele T_1 şi T_2 se intersectează cu mult în afară de planul desenului.

Neglijarea lui I_0, astfel încît valoarea lui I_v găsită cu ajutorul formulei (II.282) să fie atribuită exclusiv volantului, este deci acoperitoare.

b) Rezultatele obţinute din această aplicaţie se pot compara cu formula aproximativă II.257), care determină momentul de inerţie al volantului prin neglijarea lui ($I_0 + I_{mv}$), (adică $\Delta I_{red} = 0$.

W_{max} din formula (II.257) este mărimea măsurată în kgm a suprafeţei maxime cuprinse între curbele $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$.

Segmentul care dă mărimea acestei suprafeţe în diagrama $W(\varphi)$ din fig. II.70, *a* este $\overline{M_0N_0}$, adică distanţa dintre ordonata cea mai mică (în dreptul poziţiei *16* a butonului de manivelă) şi cea mai mare (în dreptul poziţiei *22*) a curbei.

Măsurînd, se găseşte:

$$W_{max} = k_E(\overline{M_0N_0}) = \frac{1}{5} \times 114{,}5 = 22{,}9 \text{ kgm}.$$

Dacă se introduce valoarea obţinută mai sus în (II.257), se obţine (pentru $\delta = \frac{1}{100}$ şi $\omega_{med} = 418$ rads^{-1}):

$$I_{v_0} = \frac{W_{max}}{\omega_{med}^2\,\delta} = \frac{22{,}9}{418^2 \times \frac{1}{100}} = 0{,}01310 \text{ kgms}^2.$$

Eroarea este de

$$\frac{I_v - I_{v_0}}{I_{v_0}} \times 100 = 27{,}8\%.$$

Eroarea este cu atît mai mare, cu cît gradul de neregularitate δ impus maşinii este mai mare.

c) Dacă într-o diagramă $I_v(\delta)$ se înscriu:

— pe abscisă valorile lui δ din coloana 1 a tabelei II.6 şi

— pe ordonată valorile corespunzătoare calculate în coloana 4 a aceleiaşi tabele, se obţine curba trasată în fig. II.72.

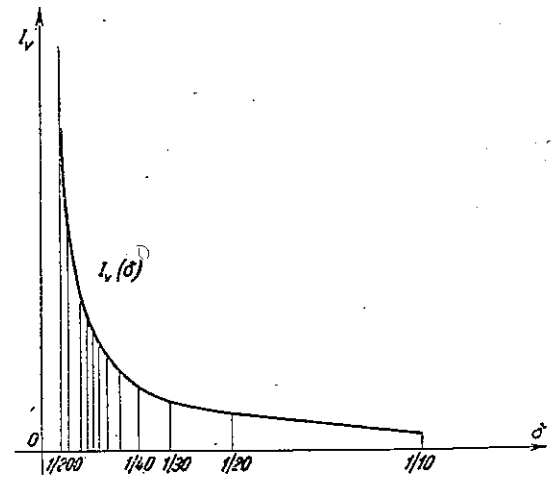


Fig. II.72. Curba de variaţie a greutăţii volantului G_v în funcţie de gradul de neregularitate δ al motorului.

Forma acestei curbe se apropie de a unei hiperbole echilatere şi se confundă cu aceasta atunci cînd în calcul se foloseşte formula (II.282).

In adevăr, deoarece pentru orice δ, $W_{max} = \text{const.}$, din formula (II.282) rezultă:

$$I_v\delta = \frac{W_{max}}{\omega_{max}^2} = \text{const.}$$

§ 20. DETERMINAREA APROXIMATIVĂ A MASEI VOLANTULUI LA MAȘINILE CU ABUR CU AJUTORUL ECUAȚIEI DE MIȘCARE A MAȘINII SUB FORMA ECUAȚIEI LUI LAGRANGE

Este clar, după cum s-a arătat la paragrafele anterioare, că în multe cazuri determinarea momentului de inerție al volantului se poate face în mod aproximativ, mai ales atunci cînd nu există date suficiente pentru calculul momentului de inerție redus (fără volant).

S-a văzut (§ 17.2) că metoda pentru determinarea lui I_v este în acest caz aceea a integrării ecuației de mișcare sub forma ecuației lui Lagrange, considerînd că:

— manivela (elementul de reducere) are o viteză unghiulară constantă și

— momentul de inerție redus I_{red} al întregului agregat (deci inclusiv volantul) este constant.

Se va trata acest caz pentru o mașină cu abur cu un piston cu dublu efect.

Din ecuația (II.183) rezultă imediat că:

$$I_{red}\frac{d\omega}{dt}=M_{red}+M_{ib}. \qquad \text{(II.284)}$$

Ecuația (II.284) se poate scrie pentru claritate, în faza de regim, ca mai jos:

$$I_{red}\frac{d\omega}{dt}=M_M+M_{ib}-M_r, \qquad \text{(II.284')}$$

în care valorile algebrice din membrul al doilea reprezintă:

M_M — după cum se știe — valoarea momentului motor redus, corespunzător poziției φ a elementului de reducere;

M_{ib} — momentul redus al forțelor de inerție ale mișcării de bază cu viteza unghiulară $\omega_{med}=\text{const.}$;

M_r — momentul redus al tuturor forțelor rezistente (tehnologice, de greutate, de frecare, adică $M_2=M_{rt}+M_{Ep}+M_f$).

Se va arăta mai jos cum poate fi determinată fiecare dintre mărimile din formula (II.284).

1. *Determinarea lui M_M.* M_M se determină, așa cum s-a arătat la aplicația de la § 19.5, pentru motoarele cu explozie sau Diesel în patru timpi.

In cazul mașinilor cu abur cu dublu efect (cînd aburul acționează pe ambele fețe ale pistonului), valoarea lui M_M redus la butonul de manivelă al mașinii se deduce prin calcularea în prealabil a diagramei eforturilor tangențiale.

Pentru aceasta se suprapun cele două diagrame indicate din fig. II.73 ale unei mașini cu un cilindru pe aceeași abscisă (fig. II.74), după care se face diferența, pentru obținerea presiunii efective pe suprafața pistonului. Acest lucru s-a arătat și în partea I (fig. II.1), cînd s-a dat un exemplu de forță motoare.

Astfel, în timp ce pe suprafața din stînga a pistonului la cursa de ducere variația presiunii aburului are loc după curba *abcd*, pe partea dreaptă variația are loc după curba $d'e'f'g'a'$ (săgeata *1*). La cursa de înapoiere pe partea

dreaptă variația presiunii are loc după curba $a'b'c'd'$, în timp ce pe partea stîngă are loc după curba *defga* (săgeata *2*).

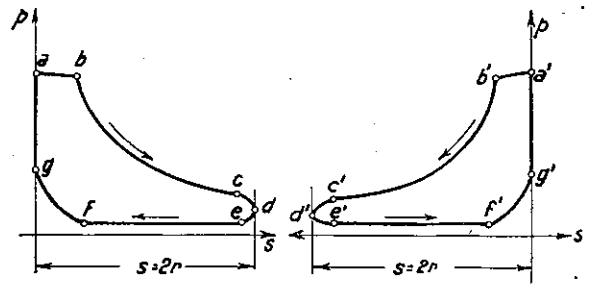


Fig. II.73. Diagramele de pe ambele fețe ale pistonului la o mașină cu abur.

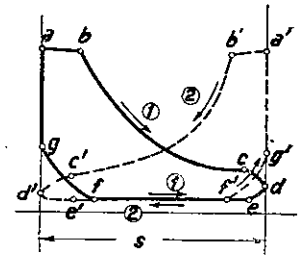


Fig. II.74. Diagramele suprapuse de pe cele două fețe ale pistonului.

Prin transpunerea presiunilor rezultante într-o diagramă (p, s) corespunzătoare unei rotații complete a manivelei (elementul de reducere), se obține curba reprezentată în fig. II.75, *a*, unde în regiunea suprafețelor notate cu + presiunile sînt pozitive, iar în regiunile notate cu — sînt negative.

Făcînd scăderea celor două curbe, se obține fig. II.75, *b*.

Curba *oabcda'b'c'd'o'* dă astfel valoarea presiunii exercitate pe suprafața pistonului, în timpul unui ciclu energetic al mașinii ($\Phi_E=2\pi$).

Forța care se exercită va fi

$$F_M=Ap, \qquad \text{(a)}$$

unde A este suprafața medie a celor două fețe ale pistonului.

Folosind formula (II.283), se obține valoarea forței tangențiale motoare redusă la butonul de manivelă

$$F_{M\,red}=F_M\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}$$

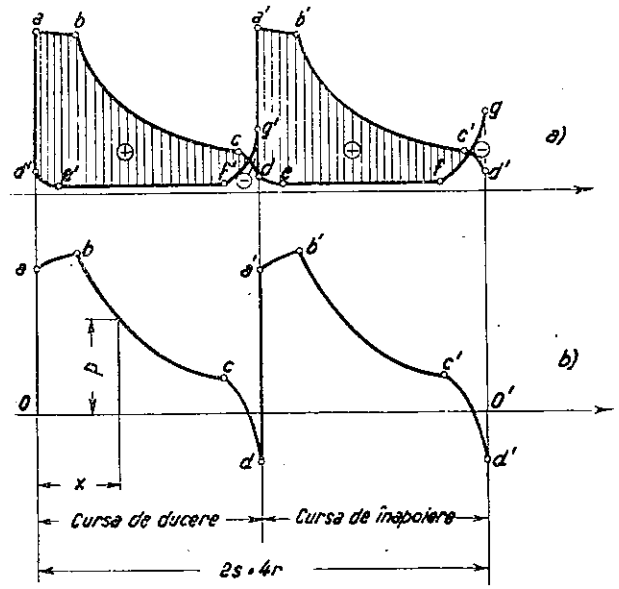


Fig. II.75. Diagrama presiunilor efective care se exercită asupra pistonului unei mașini cu abur cu dublu efect.

și de aici, prin înmulțirea cu raza r a manivelei:

$$M_M=M_{M\,red}=F_{M\,red}\cdot r.$$

Valoarea lui F_M se obţine din diagrama fig. II.75, *b*, unde se măsoară valoarea lui p pentru valoarea lui x corespunzătoare unghiului φ de rotaţie al manivelei.

2. *Calculul lui* M_{ib}. Calculul lui M_{ib} se face cu ajutorul metodei cunoscute, expusă la § 13.2.

In cazul maşinilor cu abur, cu explozie, Diesel sau semi-Diesel şi, în general, al maşinilor cu piston, valoarea lui M_{ib} se calculează după cum se arată mai jos.

Se face întîi repartizarea (concentrarea) statică a masei bielei în cele două articulaţii ale ei: butonul de manivelă şi bulonul capului de cruce sau al pistonului, după metoda cunoscută (§ 5, partea I).

In practică se consideră concentrată la bulonul capului de cruce 0,275 din masa bielei, restul ($0{,}725\, m_b$) se consideră concentrată la butonul de manivelă (s-a notat cu m_b masa bielei).

Forţa de inerţie F_i dezvoltată de masa în mişcare de translaţie (care se va nota cu m_B) şi compusă din piston, tija pistonului, capul de cruce, bulonul de articulaţie şi din $0{,}275\, m_b$, se compune cu forţa F_M.

Se ştie că acceleraţia capului de cruce (sau a pistonului) este dată de expresia generală:

$$a_B = r\omega_1^2 (A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi - A_4 \cos 4\varphi + - \ldots + A_{2k} \cos 2k\varphi - + \ldots),$$

unde $A_1, A_2, A_n, \ldots, A_{2k}$ sînt date de formulele (II.20). Atunci forţa de inerţie F_i va fi:

$$\overline{F}_i = -m_B \overline{a}_B. \qquad (b)$$

Pentru calculul forţei de inerţie se foloseşte viteza unghiulară medie ω_1 a maşinii.

Variaţia forţei de inerţie F_i raportată la suprafaţa pistonului se reprezintă grafic în diagrama (F_M, s) din fig. II.76 şi are forma cunoscută *hijh'i'j'*, fiind negativă în porţiunile *hi*, respectiv *h'i'*, cînd viteza pistonului creşte, şi pozitivă în porţiunile *ij*, respectiv *i'j'*, cînd viteza pistonului descreşte.

In consecinţă, forţa efectivă F_e care se exercită asupra pistonului maşinii este diferenţa dintre expresiile (a) şi (b), adică:

$$F_e = F_M - F_i. \qquad (c)$$

Inversînd deci curbele *hij* şi *h'i'j'*, se obţin în porţiunile haşurate din fig. II.76, *a* tocmai segmentele date de expresia (c) de mai sus, raportată la suprafaţa pistonului, adică $p_e = \frac{F_e}{A}$.

In fig. II.76, *b* este reprezentată curba de variaţie a presiunii p_e care acţionează asupra unui centimetru pătrat de piston în timpul unui ciclu energetic al maşinii cu abur.

Intr-o poziţie oarecare x a pistonului, măsurată de la punctul mort exterior, presiunea exercitată pe 1 cm² de suprafaţă a pistonului, datorită efectului combinat al forţei de destindere a aburului şi a forţei de inerţie F_i este p_e.

Forţa F_e se obţine deci imediat

$$F_e = p_e A. \qquad (d)$$

Dacă se face acum reducerea acestei forţe la butonul de manivelă (punctul de reducere) cu ajutorul formulei (II.283), se obţine valoarea forţei tangenţiale efective:

$$F_{e\,red} = F_e \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi}. \qquad (e)$$

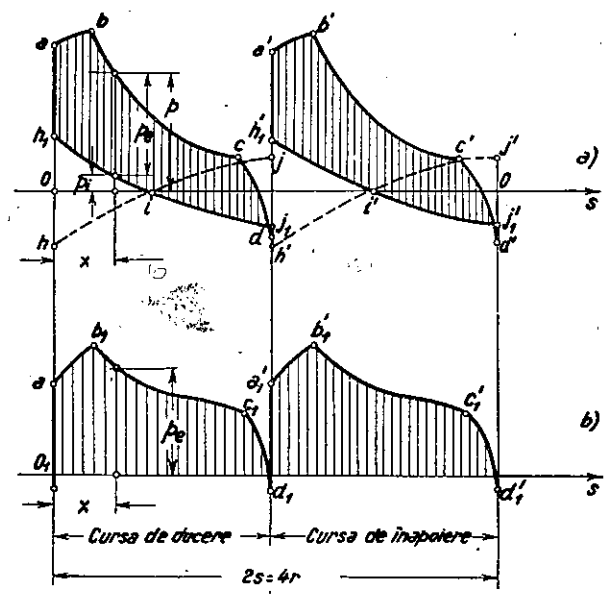


Fig. II.76. Diagrama presiunilor efective exercitate asupra pistonului unei maşini cu abur cu dublu efect, ţinîndu-se seamă şi de influenţa forţelor de inerţie.

Dacă valoarea lui $F_{e\,red}$ dată de expresia (e) se înmulţeşte cu r (raza manivelei), se obţine tocmai valoarea lui $M_M + M_{ib}$ din formula (II.284'), adică:

$$M_M + M_{ib} = F_{e\,red} \cdot r. \qquad (II.285)$$

3. *Variaţia grafică a acestui moment* ($M_M + M_{ib}$) se poate trasa într-o diagramă ($M_M + M_{ib}$, φ), aşa cum se arată în fig. II.77.

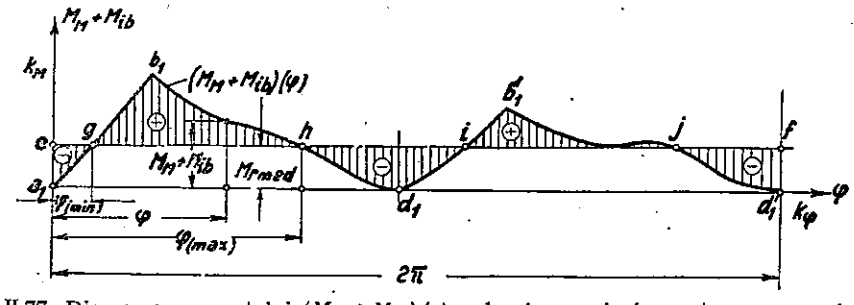


Fig. II.77. Diagrama momentului $(M_M + M_{ib})(\varphi)$ redus la manivela motoare a maşinii cu abur, în timpul unui ciclu energetic 2π.

La o altă scară, fig. II.77 poate reprezenta şi forţa tangenţială efectivă. In adevăr, în acest caz, pe abscisă se vor măsura spaţiile parcurse de centrul

butonului de manivelă, adică $r\varphi$ (lungimea ciclului fiind $2\pi r$), iar pe ordonate se vor măsura forţele tangenţiale:

$$T=\frac{M_M+M_{ib}}{r}.$$

Se revine acum la ecuaţia (II.284').

Dacă — după cum s-a precizat la început — I_{red}=const., atunci prin înmulţirea ambilor membri ai ecuaţiei (II.284') cu $d\varphi$ şi integrată între 0 şi φ (cărora le corespund vitezele ω_0 şi ω), se obţine:

$$\int_0^{\varphi} I_{red}\,\omega d\,\omega=\int_0^{\varphi}(M_M+M_{ib})\,d\varphi-\int_0^{\varphi}M_r\,d\varphi,$$

sau

$$\frac{1}{2}I_{red}(\omega^2-\omega_0^2)=\int_0^{\varphi}(M_M+M_{ib})\,d\varphi-M_{r\,med}\cdot\varphi. \qquad \text{(II.286)}$$

Valoarea lui $M_{r\,med}$ se alege astfel, încît în mişcarea de regim în timpul unui ciclu energetic să fie satisfăcută egalitatea dintre lucrurile mecanice motoare şi rezistente, adică:

$$\int_0^{2\pi}(M_M+M_{ib})\,d\varphi-M_{r\,med}\,2\pi=0$$

sau

$$M_{r\,med}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(M_M+M_{ib})\,d\varphi. \qquad \text{(II.287)}$$

Dacă în fig. II.77 se duce o paralelă ef la axa φ, la distanţa $M_{r\,med}$, a cărei valoare este dată de expresia (II.287), atunci evident că:

$$\text{suprafaţa } (a_1efd_1')=\text{suprafaţa } (a_1b_1d_1b_1'd_1').$$

In consecinţă, suprafeţele curbei $a_1b_1d_1b_1'd_1'$ aflate deasupra dreptei ef sînt egale cu cele aflate sub ea.

In punctele de intersecţie a dreptei ef ($M_{r\,med}$) cu curba $a_1b_1d_1b_1'd_1'$ (M_M+M_{ib}), adică în punctele g, h, i şi j, există egalitatea evidentă:

$$M_M+M_{ib}=M_r$$

sau

$$M_M+M_{ib}-M_r=0.$$

Din ecuaţia (II.284') rezultă că pentru aceste puncte

$$I_{red}\,\frac{d\omega}{dt}=0$$

sau

$$\frac{d\omega}{dt}=0,$$

adică viteza unghiulară a elementului de reducere este maximă sau minimă.

Diagrama din fig. II.77 poate fi privită acum ca raportată la o nouă axă a absciselor ef.

Se va putea spune deci că ori de cîte ori curba de variaţie a sumei momentelor motoare şi de inerţie (M_M+M_{ib}) reduse la butonul de manivelă intersectează axa absciselor, viteza unghiulară ω_1 a elementului de reducere este maximă sau minimă.

4. *Determinarea masei volantului.* Problema ce se pune este de a se determina care sînt valorile lui φ pentru care avem cea mai mare şi cea mai mică viteză unghiulară în timpul ciclului energetic 2π.

Pentru aceasta se planimetrează fiecare dintre suprafeţele aflate deasupra şi sub axa ef.

Cea mai mare dintre suprafeţele planimetrate va determina prin punctele de intersecţie a acesteia cu axa ef valorile lui φ pentru care există ω_{max} şi ω_{min}.

In cazul fig. II.77 suprafaţa minimă este gb_1h de deasupra axei ef.

In punctul g energia cinetică a maşinii are un minim, iar în h un maxim, deoarece suprafaţa de sub curba $(M_M+M_{ib})(\varphi)$, raportată la axa ef, în intervalul gh este maximă dacă şi suprafaţa hd_1i>suprafaţa ib_1j.

In consecinţă, pentru poziţiile manivelei, corespunzătoare lui $\varphi_{(min)}=k_\varphi(\overline{eg})$ şi $\varphi_{(max)}=k_\varphi(\overline{eh})$, există şi ω_{min}, respectiv ω_{max}.

Dacă din planimetrare ar fi rezultat că suprafeţele negative: suprafaţa jfd_1'+suprafaţa ea_1g=suprafaţa maximă, atunci evident că în punctul j ar fi fost ω_{max} şi în punctul g: ω_{min} dacă şi suprafaţa hd_1i<suprafaţa ib_1j.

O dată determinate $\varphi_{(min)}$ şi $\varphi_{(max)}$, se procedează la integrarea ecuaţiei (II.284') între aceste limite.

Se obţine astfel:

$$\frac{1}{2}I_{red}(\omega_{max}^2-\omega_{min}^2)=\int_{\varphi(min)}^{\varphi(max)}(M_M+M_{ib}-M_r)\,d\varphi=k_\varphi\,k_M\,(A_{gh}),$$

unde (A_{gh})=suprafaţa $gb_1gh=(A_{max})$.

Folosind formula (II.242), expresia de mai sus devine:

$$\frac{1}{2}\,I_{red}\,2\omega_{med}^2\,\delta=k_\varphi k_M\,(A_{max})=W'_{max};$$

de aici rezultă;

$$I_{red}=\frac{k_\varphi k_M\,(A_{max})}{\delta\omega_{med}^2}=\frac{W'_{max}}{\delta\omega_{med}^2}. \qquad \text{(II.288)}$$

Formula (II.288) dă valoarea momentului de inerţie al maselor reduse static la butonul de manivelă, deci inclusiv şi al volantului. Ea este în fond identică cu (I.263).

Deşi formulele (II.257) şi (II.288) sînt asemănătoare, totuşi între ele există o diferenţă esenţială [la fel ca şi între (II.257) şi (II.263)].

Astfel, W_{max} este — la scară — cea mai mare dintre suprafeţele cuprinse între curbele $M_M(\varphi)$ şi $M_r(\varphi)$, (v. fig. II.54), deci fără luarea în consideraţie a momentelor forţelor de inerţie M_{ib} din mişcarea de bază a maşinii, în timp ce în cazul fig. II.77, A_{max} este cea mai mare dintre suprafeţele cuprinse între curbele (M_M+M_{ib}) şi $M_{r\,med}$, în care a intrat în calcul şi M_{ib}.

În concluzie, metoda aproximativă de determinare a masei volantului sintetizată în formula (II.288) este mai aproape de realitate decît formula (II.257), care nu ţine seamă de influenţa forţelor de inerţie.

§ 21. DETERMINAREA DIMENSIUNILOR VOLANTULUI

a) Dacă volantul se execută ca un disc plin, cum este cazul la motorul din aplicaţia de la § 19.5, atunci diametrul D se calculează cu formula cunoscută:

$$I_v = 1\,000\,\frac{\gamma}{g}\,\frac{\pi D^4}{32}\,b \ [\text{kgms}^2], \tag{II.289}$$

în care:

D este diametrul volantului, în m;

b — lăţimea volantului, în m;

γ — greutatea specifică a materialului din care este confecţionat volantul, în kgfdm^{-3};

$g = 9{,}8065\ \text{ms}^{-2}$.

În calculele practice se obişnuieşte să se dea ca mărime caracteristică produsul dintre greutatea volantului şi pătratul diametrului său, adică GD^2, numit şi momentul volantului.

Expresia lui GD^2 se obţine după cum urmează:

Greutatea volantului este dată de

$$G = 1\,000\,\gamma V,$$

unde

$$V = \frac{\pi D^2}{4}\,b\ [\text{m}^3] \text{ — volumul volantului.}$$

Înlocuind, se obţine:

$$G = 1\,000\,\gamma\,\frac{\pi D^2}{4}\,b\ [\text{kg}].$$

Introducînd valoarea lui G în (II.289), rezultă:

$$I_v = 1\,000\,\gamma\,\frac{\pi D^2}{4}\,b\,\frac{D^2}{8 \cdot g} = \frac{GD^2}{8g}.$$

Pentru volanturile în formă de disc se obţine:

$$GD^2 = 8gI_v. \tag{II.290}$$

Formula de mai sus permite determinarea greutăţii volantului dacă se dă valoarea lui D, valoare care, în majoritatea cazurilor, este impusă de consideraţii constructive.

Dacă se dă raportul dintre lăţime şi diametrul discului volantului, care se va nota cu

$$\nu = \frac{b}{D}, \tag{II.291}$$

formula (II.290) devine:

$$I_v = 1\,000\,\frac{\gamma}{g}\,\frac{\pi D^5}{32}\,\nu,$$

de unde rezultă valoarea lui D:

$$D = \sqrt[5]{\frac{32\,gI_v}{1\,000\,\pi\gamma\nu}}. \tag{II.292}$$

b) Dacă volantul aparţine unor agregate de dimensiuni mari şi turaţii mijlocii (187 rot/min, 350 rot/min), turaţii obişnuite la maşinile cu abur sau cu ardere internă, volantul are dimensiuni mari.

Construcţia lui se realizează sub forma unei roţi cu spiţe b, în care caz se neglijează momentul de inerţie al acestora, cum şi al butucului (fig. II.78).

Se consideră astfel volantul format numai din obada a, al cărei moment de inerţie se poate scrie:

$$I_v = mR^2 = \frac{GD^2}{4g}, \tag{II.293}$$

în care D este diametrul cercului centrelor de greutate ale secţiunilor obezii.

Momentul volantului rezultă astfel imediat:

$$GD^2 = 4gI_v. \tag{II.294}$$

Prin alegerea lui D în funcţie de considerente constructive, se determină uşor greutatea volantului.

Dacă se scrie greutatea G a obezii sub forma:

$$G = 1\,000\,\gamma\pi Dbh,$$

în care:

b este lăţimea obezii, în m;

h — înălţimea, în m,

şi se notează:

$$\frac{b}{D} = \nu$$

şi

$$\frac{h}{D} = \xi, \tag{II.295}$$

se obţine:

$$G = 1\,000\,\pi D^3\nu\xi,$$

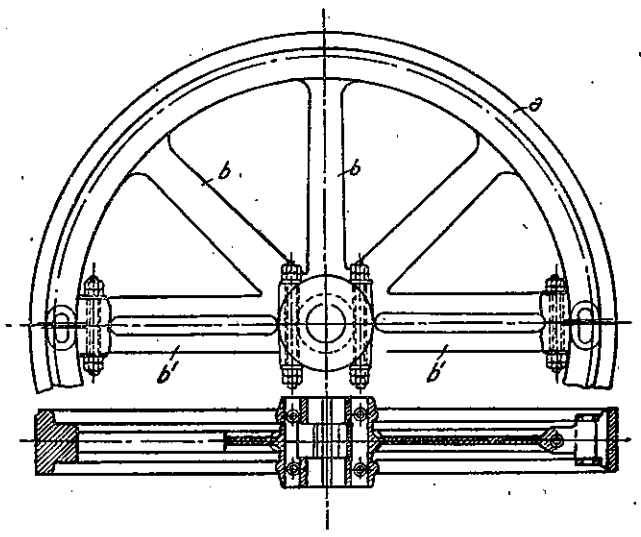


Fig. II.78. Forma constructivă a volantului unei maşini cu abur de turaţie mijlocie.

Înlocuind expresia de mai sus în (II.294) şi rezolvînd-o în funcţie de D, se obţine:

$$D = \sqrt[5]{\frac{4gI_v}{1\,000\,\pi\gamma\nu\xi}}. \tag{II.296}$$

c) Dacă din motive constructive, volantul trebuie montat pe un ax auxiliar, atunci în formulele (II.290), (II.292), (II.294) şi (II.296) se introduce valoarea lui I_v redusă la axul auxiliar, adică I'_v.

Valoarea lui I'_v se deduce din condiţia egalităţii energiilor cinetice, adică

$$I_v\,\frac{\omega^2}{2} = I'_v\,\frac{\omega'^2}{2},$$

în care ω' este viteza unghiulară a axului auxiliar.

Din expresia de mai sus rezultă:

$$I'_v = I_v \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 . \qquad \text{(II.297)}$$

Din analiza formulei (II.297) se vede că, cu cît axul pe care este montat volantul are o viteză unghiulară mai mare, cu atît dimensiunile lui vor fi mai mici.

De aceea se caută ca totdeauna montarea volantului să se facă pe axe cu viteze de rotaţie mari.

De asemenea, este necesar ca ω' a axului auxiliar să fie constantă, sau, ceea ce este acelaşi lucru, ca raportul de transmitere $i = \frac{\omega}{\omega'}$ să fie constant.

In sfîrşit, trebuie să se aibă în vedere mărimea deformaţiilor elastice ale lanţului cinematic de la arborele motor la axul auxiliar pe care este montat volantul, astfel încît oscilaţiile elastice să nu depăşească limitele prescrise.

CAPITOLUL IV

REGLAJUL MIŞCĂRII MAŞINII. REGULATOARELE

§ 22. PROBLEMELE REGLĂRII MIŞCĂRII MAŞINII. GENERALITĂŢI. DEFINIŢIA REGULATORULUI

Cu ajutorul volantului montat pe arborele motor sau pe un ax auxiliar s-a putut rezolva problema reglării amplitudinilor oscilaţiilor periodice ale maşinii în mişcarea de regim, prin micşorarea acestora la mărimea impusă de condiţiile de funcţionare a agregatului.

Dimensionarea volantului pentru un anumit grad de neregularitate presupune — după cum s-a văzut — egalitatea lucrurilor mecanice produse şi consumate în timpul unui ciclu energetic Φ_E din mişcarea de regim.

Astfel, în aplicaţia din § 19.5 lucrul mecanic produs în timpul unui ciclu energetic $\Phi_E = 4\pi$ a fost $W_M = 22{,}500$ kgm, egal cu cel consumat de rezistenţa tehnologică în acelaşi interval de timp ($W_r = 22{,}500$ kgm).

In condiţiile de mai sus, agregatul motor-maşină de lucru va funcţiona cu viteza unghiulară medie reală, care oscilează între valorile ω_{max} şi ω_{min} determinate de relaţiile cunoscute (II.229) şi (II.230).

Dacă însă în acest timp echilibrul forţelor exterioare se modifică, fie că rezistenţa tehnologică creşte, fie că scade, regimul de mişcare se modifică şi el corespunzător.

In adevăr, dacă rezistenţa tehnologică scade, maşina începe să se accelereze, iar dacă creşte, mişcarea se încetineşte. In cazul cînd momentul motor variază, fenomenul este invers.

Menţinerea turaţiei în limitele fixate de gradul de neregularitate δ se face prin aducerea şi a celorlalte forţe la aceeaşi valoare cu forţa care a suferit modificarea. Prin aceasta se realizează o nouă egalitate între lucrul mecanic produs (motor) W_M şi cel consumat (rezistent) W_r la o altă valoare şi motorul reintră în mişcarea de regim sau permanentă.

In cazul locomotivei, operaţia de egalizare a lui W_M cu W_r se face de către mecanic. Astfel, dacă locomotiva care circulă în aliniament şi în palier cu viteza constantă se angajează la un moment dat pe o rampă, atunci forţele rezistente cresc şi, în consecinţă, nu mai există echilibru între forţele exterioare.

Pentru a evita micşorarea vitezei, mecanicul acţionează fie asupra regulatorului, mărind astfel cantitatea de abur care intră în cilindri, fie asupra schimbătorului de mers, mărind gradul de admisie şi, prin aceasta, puterea locomotivei. Se restabileşte în acest mod echilibrul dintre forţa motoare şi cea rezistentă (sau dintre cuplul motor şi cel rezistent).

In cazul maşinilor stabile, operaţia pe care o execută mecanicul pentru a menţine locomotiva în mişcarea de regim o realizează mecanisme automate, numite regulatoare.

Regulatorul acţionează asupra organelor de admisie a aburului (în cazul maşinilor cu abur şi al turbinelor), asupra organelor de introducere în cilindri a amestecului combustibil (în cazul motoarelor cu explozie) sau asupra pompei de injecţie a combustibilului (în cazul motoarelor Diesel). (In cursul lucrării se va folosi termenul generic „agent motor").

Acţiunea regulatorului are loc atunci cînd mărimea puterii consumate (adică a puterii rezistenţei tehnologice) se modifică.

Dacă puterea consumată creşte şi maşina începe să-şi micşoreze viteza, regulatorul acţionează asupra organelor de distribuţie mărind cantitatea de abur sau de combustibil. Puterea motoare creşte şi astfel, prin restabilirea echilibrului, maşina revine la mişcarea de regim.

Este de menţionat că regulatorul este neapărat necesar pentru automatizarea reglajului vitezei, atunci cînd forţele exterioare depind de poziţia elementului iniţial şi cînd procesul tehnologic pentru care este creat agregatul reclamă o turaţie constantă, cum este în cazul turbogeneratoarelor, al grupurilor electrogene, al turbinelor de apă etc.

Dacă însă puterea este funcţie de viteză, atunci reglajul se face de la sine, fără a mai fi nevoie de un mecanism de reglaj special, cum ar fi în cazul grupului motor asincron — maşină de lucru.

In adevăr, dacă momentul (cuplul) rezistent scade, viteza motorului asincron creşte. Prin creşterea vitezei, cuplul motor scade, astfel că echilibrul se restabileşte de la sine, motorul apropiindu-se de viteza de sincronism.

Dacă însă cuplul rezistent creşte, viteza motorului asincron scade, mărindu-se astfel cuplul motor. Bineînţeles că viteza motorului nu poate scădea sub valoarea admisibilă, sub care motorul se opreşte.

In concluzie: pentru agregatele la care forţa motoare depinde de poziţia elementului iniţial, reglajul oscilaţiilor neperiodice se face cu ajutorul mecanismelor automate numite regulatoare, care acţionează asupra cuplului motor.

Dacă cuplul motor este funcţie de viteză nu este necesar un astfel de mecanism, deoarece reglajul oscilaţiilor neperiodice se face de la sine.

Regulatoarele de viteză care provoacă variaţia cuplului rezistent se numesc moderatoare.

§ 23. CLASIFICAREA REGULATOARELOR. DESCRIERE ŞI FUNCŢIONARE

Regulatoarele se clasifică din mai multe puncte de vedere.

23.1. Clasificarea regulatoarelor din punctul de vedere al naturii forţelor de reglaj

1) Forţa care acţionează dispozitivul de admisie a agentului motor în maşină este forţa centrifugă produsă prin rotirea unor greutăţi G_1, G_2 în jurul unui ax care primeşte mişcarea de la arborele motor, prin intermediul unor angrenaje E, F (fig. II.79).

Un astfel de regulator influenţează admisia agentului motor în maşină numai după ce turaţia a depăşit, într-un sens sau în altul turaţia maximă sau minimă fixată de gradul de neregularitate al maşinii. Acest regulator lucrează deci cu o întîrziere anumită, faţă de cauza care á provocat dezechilibrul dintre cuplul motor şi cel rezistent.

Regulatoarele centrifuge se numesc şi regulatoare spaţiale, deoarece mişcările diferitelor elemente ce compun mecanismul sînt cuprinse într-un plan care se roteşte în jurul unui ax fix (reprezentat prin axa zz în fig. II.79).

Acţiunea regulatoarelor centrifuge este independentă de mărimea acceleraţiei elementului iniţial, din care cauză viteza unghiulară a maşinii este limitată într-un anumit interval.

2) Există regulatoare la care forţa de inerţie îndeplineşte funcţiunea de forţă de reglaj. Ele se numesc din această cauză regulatoare de inerţie, sau regulatoare plane.

Regulatoarele de inerţie sînt mai sensibile decît cele centrifuge, deoarece ele intră în acţiune chiar în momentul în care se produce dezechilibrul brusc dintre cuplul motor şi cel rezistent.

Regulatoarele de inerţie nu pot menţine însă turaţia între anumite limite decît dacă acceleraţia sau încetinirea elementului conducător este suficient de mare, pentru ca forţa de inerţie dezvoltată de greutăţi să învingă frecările din articulaţii.

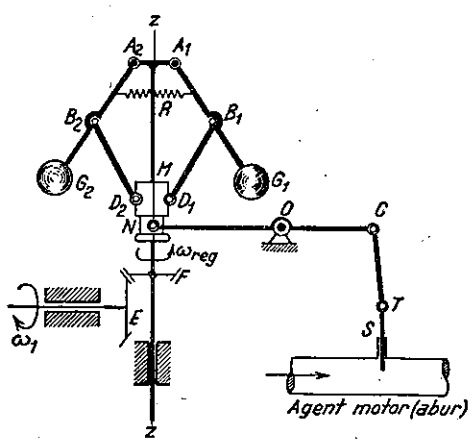


Fig. II.79. Regulatorul centrifug tip Tolle.

In adevăr, dacă dezechilibrul dintre cuplul motor şi cel rezistent se produce foarte încet, astfel încît acceleraţia unghiulară nu ar dezvolta în masele greutăţilor forţe de inerţie capabile să învingă frecările din articulaţiile regulatorului şi ale mecanismului de distribuţie, regulatorul nu poate intra în acţiune şi viteza elementului conducător va varia încet peste orice limită. Maşina se poate astfel ambala sau opri fără ca regulatorul de inerţie să poată influenţa

într-un sens sau în altul distribuţia agentului motor în maşină.

Pentru aceste motive, regulatoarele de inerţie se construiesc combinate cu regulatoare centrifuge.

Un regulator plan (axial) care funcţionează şi ca regulator centrifug şi ca regulator de inerţie este redat în fig. II.80, *a*.

La extremităţile unei pîrghii *1*, articulată în O_1 la butucul volantului *2*, sînt montate două greutăţi G_1 şi G_2 de mărimi diferite. În cazul de faţă $G_2 > G_1$.

Un arc *3* este articulat cu capătul B de pîrghia *1* şi cu celălalt capăt C de coroana volantului *2*.

Sensul de rotaţie al volantului este invers celui al acelor unui ceasornic, după cum îl indică sensul lui ω_1.

De la capătul A al pîrghiei *1* este articulat dispozitivul de reglare a admisiei agentului motor în maşină (aburul, amestecul de vapori de benzină etc.).

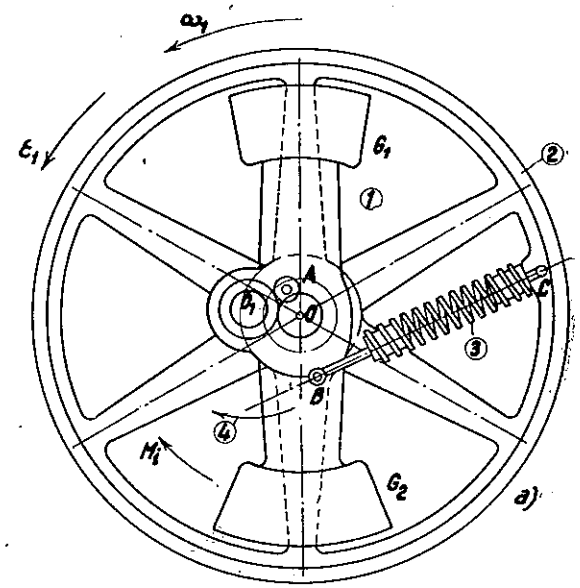
La viteza unghiulară ω_1 a maşinii din faza de regim poziţia lui A este determinată de echilibrul realizat între tensiunea R a arcului *3* şi rezultanta F_c a forţelor centrifuge F_{c_1} şi F_{c_2} ale celor două greutăţi G_1 şi G_2, după cum se vede destul de clar în fig. II.80, *b*.

In consecinţă, în tot timpul mişcării de regim există relaţia:

$$F_c h = Rr, \qquad \text{(a)}$$

în care:

R este tensiunea arcului *3*;



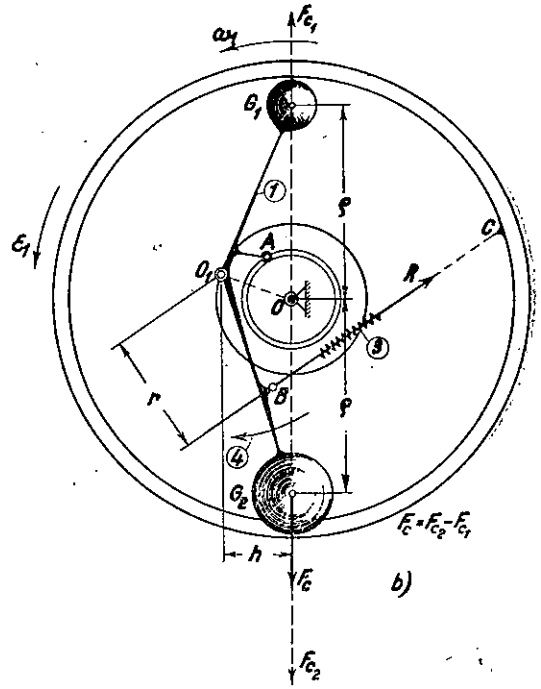


Fig. II.80. Regulatorul de inerţie sau plan (fig. II.80, *a* construcţie, fig. II.80, *b* schemă).

F_c este rezultanta celor două forţe centrifuge F_{c_1} şi F_{c_2}, adică $F_c = F_{c_2} - F_{c_1}$, acestea fiind egale cu:

$$F_{c_1} = \frac{G_1}{g} \rho \omega_1^2; \quad F_{c_2} = \frac{G_2}{g} \rho \omega_1^2;$$

r — distanţa de la punctul de articulaţie O_1 al pîrghiei *1* cu butucul volantului pînă la linia de acţiune a tensiunii R a arcului *3*;

h — distanţa de la acelaşi punct O_1 pînă la linia de acţiune a forţei centrifuge F_c.

Regulatorul funcţionează astfel:

Se presupune că din cauza micşorării cuplului rezistent viteza ω_1 a maşinii creşte.

In acest caz noua rezultantă F'_c a forţelor centrifuge F'_{c_1} şi F'_{c_2} va creşte, astfel că egalitatea (a) devine:

$$F'_c h > Rr. \qquad (b)$$

Ca urmare, pîrghia *1* se va roti în sensul săgeţii *4* (sensul acelor de ceasornic), astfel că dispozitivul de reglare acţionat de articulaţia A va micşora secţiunea de trecere a agentului motor în maşină, restabilind astfel echilibrul dintre cuplurile motor şi rezistent, şi turaţia revine la cea de regim, corespunzătoare egalităţii (a).

Dacă scăderea cuplului rezistent se produce brusc, atunci şi creşterea vitezei unghiulare este bruscă, iar volantul capătă o acceleraţie unghiulară ε_1 apreciabilă.

Pe baza principiului inerţiei, greutăţile G_1 şi G_2 vor produce un moment al forţelor de inerţie

$$M_i = -\varepsilon_1 I, \qquad (c)$$

în care I este momentul de inerţie al greutăţilor G_1 şi G_2 în raport cu punctul O.

Acest moment al forţelor de inerţie va învinge momentul forţei R a arcului *3* şi va roti cele două greutăţi în sensul invers lui ε_1, adică tot în sensul săgeţii *4*. Ca urmare, organele de reglare, sub acţiunea articulaţiei A, vor micşora admisia şi vor restabili echilibrul dintre cuplurile motor şi rezistent.

Este evident că dacă variaţiile acceleraţiei unghiulare sînt mici, atunci, şi momentul M_i al forţelor de inerţie va fi mic şi, în consecinţă, articulaţia A nu va putea modifica admisia maşinii.

In felul acesta — după cum s-a precizat mai înainte — viteza maşinii poate creşte sau scădea necontenit, fără ca inerţia celor două greutăţi să poată interveni.

In cazul variaţiilor lente ale vitezei unghiulare ω_1, regulatorul intră în acţiune numai datorită forţei centrifuge F'_c, conform relaţiei (b).

Dacă cele două greutăţi G_1 şi G_2 ar fi egale, atunci $F_c = 0$, şi regulatorul este un regulator plan de inerţie cu dezavantajul arătat mai sus.

23.2. Clasificarea regulatoarelor din punctul de vedere al naturii forţelor antagoniste

Există regulatoare în care readucerea regulatorului în poziţia iniţială se face prin intermediul unei greutăţi (tipul Watt, fig. II.81) sau prin intermediul unui arc (tipul Tolle, fig. II.79). Ultimele, prezintă avantaje, datorită inerţiei reduse care evită oscilaţiile periodice.

In adevăr, momentul de inerţie al greutăţii Q (fig. II.81) în raport cu axa zz este mult mai mare decît al arcului R (fig. II.79) în raport cu aceeaşi axă de rotaţie zz.

Un alt avantaj al regulatoarelor centrifuge cu arc este posibilitatea modificării caracteristicii, prin modificarea tensiunii iniţiale a resortului.

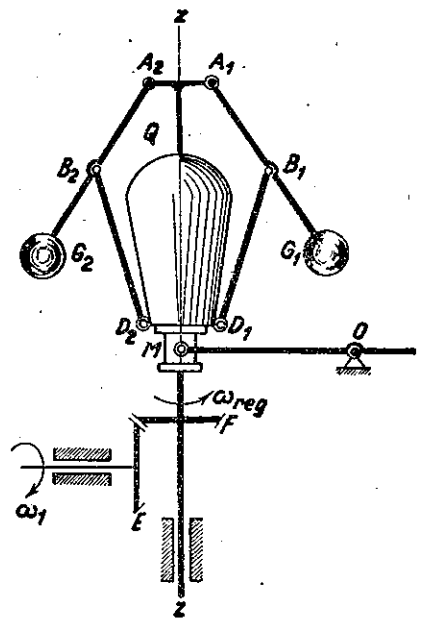


Fig. II.81. Regulatorul centrifug tip Watt.

23.3. Clasificarea regulatoarelor din punctul de vedere al felului cum sînt dispuse greutăţile

In cazul cînd greutăţile sînt dispuse ca în fig. II.79 şi II.81, deci cînd au o mişcare spaţială, regulatoarele se numesc conice, pendulare sau spaţiale.

Dacă greutăţile se deplasează într-un plan perpendicular pe axa de rotaţie zz, deci au o mişcare plană, regulatoarele se numesc plane sau axiale (fig. II.80).

S-au arătat în § 23.1 avantajele şi dezavantajele acestor regulatoare.

23.4. Clasificarea regulatoarelor după modul de acţionare asupra mecanismului de distribuţie (organele de reglare)

1. *Regulatoare cu acţiune directă* (fig. II.79). La acest fel de regulatoare acţiunea asupra organelor de distribuţie a agentului motor se face prin intermediul unui mecanism articulat acţionat de regulator.

Se va descrie mai jos funcţionarea regulatorului centrifug cu acţiune directă (fig. II.79).

Pe axul zz, care primeşte mişcarea de la arborele conducător al maşinii prin angrenajul conic EF, sînt articulate în A_1 şi A_2 două bare A_1B_1 şi A_2B_2 în prelungirea cărora sînt fixate două greutăţi identice G_1 şi G_2.

Pe acelaşi ax zz poate culisa manşonul M, care este articulat în D_1 şi D_2 la două bare B_1D_1 şi B_2D_2, articulate la rîndul lor în B_1, respectiv B_2, de barele A_1B_1 şi A_2B_2 ale celor două greutăţi.

De manşonul *M* este articulată o bară furcată *NOC* care, la rîndul ei, acţionează asupra mecanismului de distribuţie reprezentat schematic prin clapeta *S*, articulat în *T* la bara de legături *CT*.

Se presupune că viteza unghiulară ω_1 a elementului conducător a crescut, din cauza micşorării cuplului rezistent util. Ca urmare, viteza unghiulară ω_{reg} a axului *zz* va creşte, şi greutăţile G_1, G_2 vor începe să se depărteze de axul de rotaţie, din cauza creşterii forţelor centrifuge, deplasînd — prin intermediul barelor B_1D_1 şi B_2D_2 — manşonul în sus. Manşonul, la rîndul său, va împinge clapeta *S* în jos, micşorînd secţiunea de admisie a aburului în cilindru.

Prin micşorarea cantităţii de abur care intră în cilindrii maşinii va scădea deci cuplul motor.

Micşorării cuplului motor îi urmează o micşorare a vitezei, deci o apropiere a greutăţilor de axul *zz* şi, în consecinţă, o ridicare a clapetei *S* care produce mărirea secţiunii de admisie a aburului. Aceasta determină o creştere a cuplului motor, după care fenomenul se repetă.

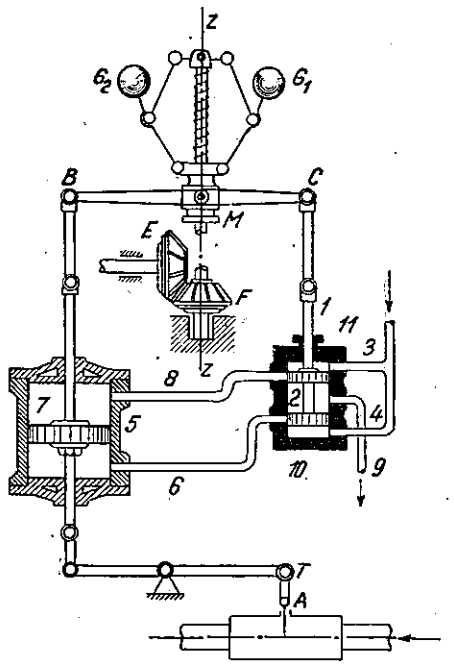


Fig. II.82. Regulator centrifug cu acţiune indirectă şi legătură inversă.

Acţiunea regulatorului este deci oscilatorie.

Rolul arcului *R* sau al greutăţii *Q* (fig. II.81) se va arăta la studiul caracteristicii regulatorului. Funcţionarea regulatorului nu va fi posibilă dacă creşterea forţei centrifuge, ca urmare a creşterii vitezei unghiulare, nu va fi suficient de mare încît să învingă frecările din articulaţiile regulatorului şi ale mecanismului de distribuţie. De aceea, regulatorul cu acţiune directă se va utiliza numai în cazul cînd aceste frecări sînt mici.

2. *Regulatoare cu acţiune indirectă* (fig. II.82). La aceste regulatoare acţiunea manşonului *M* se transmite asupra sertăraşului dublu *1* al unui cilindru *2* numit releu care, la rîndul său, prin uleiul ce-l primeşte prin conductele *3* şi *4* şi-l introduce apoi în cilindrul *5* al servomotorului, modifică prin pistonul *7* al acestuia, poziţia clapetei *A*.

Funcţionarea lui este următoarea:

In poziţia din figură sertăraşul dublu *1* al releului acoperă orificiile conductelor *6* şi *8*, astfel că pe ambele feţe ale pistonului *7* există aceeaşi presiune de ulei. Tija pistonului *7* fiind fixă, atît articulaţia *B* a pîrghiei *BC* cît şi articulaţia *T* a clapetei *A* vor fi de asemenea fixe.

Această poziţie va rămîne neschimbată atît timp cît tija pistonului dublu *1* al releului va rămîne nemişcată sub acţiunea presiunii uleiului de pe cele două feţe exterioare *10* şi *11*.

Se presupune acum că, din cauza micşorării cuplului rezistent util, viteza maşinii a crescut.

Greutăţile G_1 şi G_2 încep să se depărteze şi ridică manşonul *M*.

Deoarece articulaţia *B* este în acest moment fixă, manşonul *M* va ridica articulaţia *C* şi cu ea şi sertăraşul dublu *1*, deschizînd orificiile conductelor *6* şi *8*.

Prin deschiderea orificiului conductei *6* uleiul din partea inferioară a releului pătrunde în partea inferioară a cilindrului *5* şi ridică pistonul *7*, coborînd astfel clapeta *A*. Uleiul din partea superioară a pistonului *7* este evacuat prin conducta *8* şi prin conducta *9*.

Prin ridicarea pistonului *7*, articulaţia *B* s-a deplasat şi ea în sus.

Deoarece manşonul *M* se află nemişcat în noua poziţie de echilibru al regulatorului, ridicarea articulaţiei *B* va coborî pe *C*, astfel încît sertăraşul dublu *1* al releului, acoperind din nou orificiile conductelor *6* şi *8*, va opri cursa de ridicare a pistonului *7*.

Sertăraşul dublu *1* s-a reîntors astfel în poziţia sa mijlocie, în timp ce pistonul *7* al servomotorului a luat o poziţie diferită.

Fenomenul se repetă pînă la stabilirea unui nou echilibru.

In realitate, fenomenul este mai complex, deoarece manşonul *M*, sertăraşul dublu *1* şi pistonul *7* al servomotorului se mişcă concomitent, pînă la restabilirea echilibrului dintre cuplul motor şi cel rezistent.

La sfîrşit, viteza maşinii diferă de cea de la începutul acţiunii de reglare şi va fi mai mare sau mai mică, după cum cuplul rezistenţei utile s-a micşorat sau a crescut.

Eliminarea dezavantajului de mai sus se realizează prin introducerea unei legături inverse elastice între articulaţia *B* şi pistonul *7*, astfel încît după terminarea acţiunii de reglare punctul *B* să ocupe aceeaşi poziţie iniţială ca şi articulaţia *C*.

In acest caz, manşonul *M* va ocupa şi el aceeaşi poziţie ca la început şi, deci, viteza maşinii revine la valoarea dinaintea începerii dezechilibrului dintre cuplul motor şi rezistent.

In fig. II.83 este arătată schema de principiu a unui regulator centrifug cu acţiune indirectă şi cu legătură inversă elastică.

Prin ridicarea pistonului *7*, legat rigid de cilindrul *10*, pistonul *11* se va ridica şi el, deoarece uleiul aflat în cilindru nu va avea timp să treacă din partea inferioară în cea superioară prin orificiile *12*.

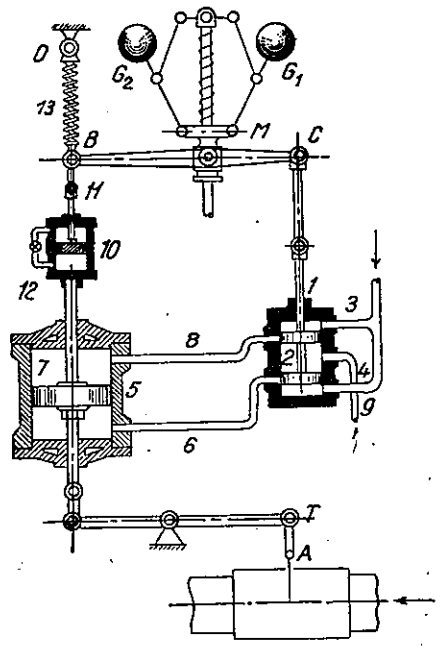


Fig. II.83. Regulator centrifug cu acţiune indirectă şi legătură inversă elastică.

Prin ridicarea pistonului *II* se va ridica şi articulaţia *B*, care va comprima astfel arcul *13*.

La sfîrşitul acţiunii de reglare, cînd sertăraşul dublu *1* al releului a căpătat poziţia mijlocie, închizînd orificiile conductelor *6* şi *8* şi pistonul *7* şi-a terminat cursa de ridicare, intră în acţiune arcul *13*.

In adevăr, arcul *13* căutînd să-şi reia poziţia iniţială, împinge pistonul *II* în jos, fără a modifica poziţia pistonului *7*, deoarece uleiul din partea inferioară trece în partea superioară prin orificiile *12*.

Dacă viteza maşinii este mai mare decît la începutul acţiunii de reglare, atunci şi manşonul *M* se află mai sus. In consecinţă, prin coborîrea articulaţiei *B* se va ridica sertăraşul dublu *1*.

Ca urmare, uleiul va pătrunde în partea inferioară a pistonului *7* al servomotorului şi clapeta *A* va coborî, micşorînd cuplul motor.

La sfîrşitul acţiunii de reglare, articulaţiile *B* şi *C* şi manşonul *M* vor ocupa exact aceleaşi poziţii ca la început. Viteza de regim a maşinii va fi astfel restabilită. Acest fel de regulatoare se mai numesc şi izodromi.

Servomotorul poate fi hidraulic (fig. II.82 şi II.83), pneumatic sau un motor electric.

23.5. Clasificarea regulatoarelor din punctul de vedere al scopului urmărit în funcţionarea agregatului

1. *Regulatoare care menţin viteza constantă.* Acest fel de regulatoare sînt cele mai răspîndite în tehnică.

Acţiunea regulatoarelor de viteză se face, fie asupra mecanismului de distribuţie al maşinii-motor, readucînd cuplul motor la nivelul celui rezistent, fie asupra mecanismului cuplului rezistent, readucîndu-l la valoarea iniţială. In acest din urmă caz s-a arătat că regulatoarele se numesc moderatoare.

Din categoria moderatoarelor este de menţionat moderatorul care reglează unghiul de atac al paletelor elicelor de avion, în scopul modificării momentului rezistent, pe care-l aduce la nivelul cuplului motor, după cum se vede în fig. II.84, unde este redat schematic un astfel de moderator.

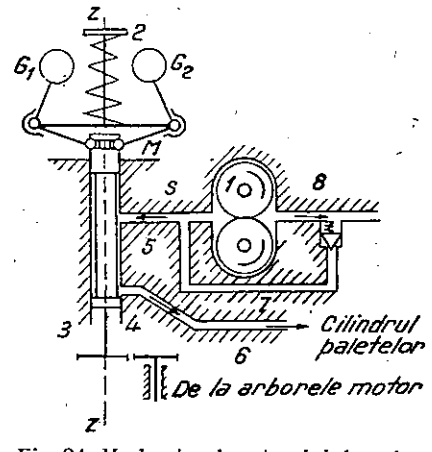


Fig. 84. Moderatorul motorului de avion.

In ansamblul regulatorului este o pompă cu roţi dinţate, care debitează uleiul în sensul săgeţii *s*.

Axul *zz* al regulatorului are prevăzut pe el un manşon *3* cu un sertăraş cilindric *4*.

Dacă, de exemplu, viteza de rotaţie a motorului avionului descreşte din cauza creşterii cuplului rezistent al elicei, atunci axul *zz* îşi micşorează şi el viteza unghiulară şi, în consecinţă, sub influenţa arcului *2* greutăţile G_1 şi G_2 se apropie.

Ca urmare, manşonul *3* — şi cu el sertăraşul *4* — deschide legătura dintre canalele *5* şi *6*, şi astfel uleiul debitat de pompa *1* va fi refulat în cilindrul paletelor, micşorîndu-le unghiul de atac şi, prin aceasta, şi cuplul rezistent.

Prin micşorarea cuplului rezistent, turaţia motorului începe să crească din nou, depăşind uneori pe cea normală, din care cauză sertăraşul *4* se deplasează în sus şi uleiul din cilindrul paletelor se scurge în carterul motorului.

Dacă însă turaţia motorului ajunge la cea normală de regim, atunci sertăraşul *4* închide orificiul canalului *6* şi pompa *1* debitează uleiul în circuitul închis *(5, 7, 8, 5)*.

2. *Regulatoare care menţin echilibrul dintre cuplul motor şi rezistent la turaţii variabile.* Funcţionarea maşinilor cu abur sau cu ardere internă trebuie în mai multe cazuri adaptată la nevoile exploatării, atunci cînd sînt cuplate la pompa de alimentare cu apă, compresoare etc., care să menţină fie un debit constant în reţeaua de alimentare, fie să-l modifice după cum se modifică şi debitul consumat.

In aceste condiţii, viteza maşinii trebuie micşorată sau mărită, astfel încît să se asigure debitul cerut de consumator. Regulatoarele care acţionează pentru realizarea scopului de mai sus se numesc regulatoare de debit.

La baza funcţionării acestui tip de regulatoare stă legea continuităţii, cunoscută din hidraulică.

Există de asemenea regulatoare de presiune sau de temperatură, al căror scop final este acelaşi cu al celui de debit.

Un regulator care acţionează asupra mecanismului de distribuţie al maşinii-motor în scopul de a restabili echilibrul dintre cuplul motor şi cel rezistent, fără a condiţiona menţinerea vitezei constante, este mecanicul de locomotivă. Acesta, după cum s-a arătat, acţionează fie asupra schimbătorului de mers, care modifică gradul de admisie al aburului în cilindri, fie asupra regulatorului, care variază cantitatea de abur ce intră în cilindri. Automatizarea funcţionării locomotivei astfel, încît ea să se poată adapta la toate variaţiile cuplului rezistent (pantă, rampă, curbe, pilotări etc.), nu este posibilă. Mecanicul de locomotivă îndeplineşte în prezent funcţiunea unui regulator al funcţionării locomotivei, regulator care în anumite situaţii este cinematic, alteori dinamic şi, de cele mai multe ori, de debit.

§ 24. CINETOSTATICA REGULATORULUI CENTRIFUG CARACTERISTICA REGULATORULUI

24.1. Metode de calcul

Se va lua regulatorul centrifug cu arc (fig. II.85) funcţionînd în mişcarea de regim. Viteza unghiulară ω_{reg} este în consecinţă constantă şi regulatorul se află în echilibru sub acţiunea forţelor centrifuge ale celor două greutăţi (bile) G_1 şi G_2 şi a forţelor antagoniste datorite greutăţii elementelor şi tensiunii arcului R.

Analiza funcţionării regulatorului se face prin reducerea la manşonul M a tuturor forţelor care-şi fac echilibru.

Se află astfel valoarea forţelor centrifuge ale bilelor, reduse la manşonul M al regulatorului. Această valoare va fi egalată cu a forţelor datorite greutăţii bilelor, a barelor, a manşonului M şi a tensiunii arcului R, reduse de asemenea toate la manşonul M.

Pentru simplificarea calculului, greutăţile barelor A_1G_1; A_2G_2; B_1D_1 şi B_2D_2 se reduc static în punctele A_1, G_2, D_1; A_2, G_2 şi D_2, după metoda cunoscută.

Astfel, masa barei B_1D_1 se repartizează static în articulaţiile D_1 şi B_1. Masa din B_1 se repartizează apoi static în A_1 şi G_1. Masa barei A_1G_1 se repartizează de asemenea static în A_1 şi G_1. La fel se procedează şi cu barele B_2D_2 şi A_2G_2. Dacă masele barelor sînt mici faţă de ale bilelor, atunci se renunţă la reducerea făcută mai sus, neglijîndu-se în calcule.

In ultima analiză, regulatorul centrifug s-a redus la o masă în A_1 (respectiv A_2), una în G_1 (respectiv G_2) şi una în D_1 (respectiv D_2). In plus există tensiunea arcului R, a cărei mărime poate fi determinată pentru orice poziţie a regulatorului.

Se constată că deplasările relative ale barelor regulatorului, ca urmare a modificării vitezei unghiulare ω_{reg}, se efectuează în plane perpendiculare pe vectorul vitezei de transport al cărei sens este dat de $\bar{\omega}_{reg}$. In consecinţă, lucrul mecanic al forţelor antagoniste şi al celor centrifuge corespunzătoare

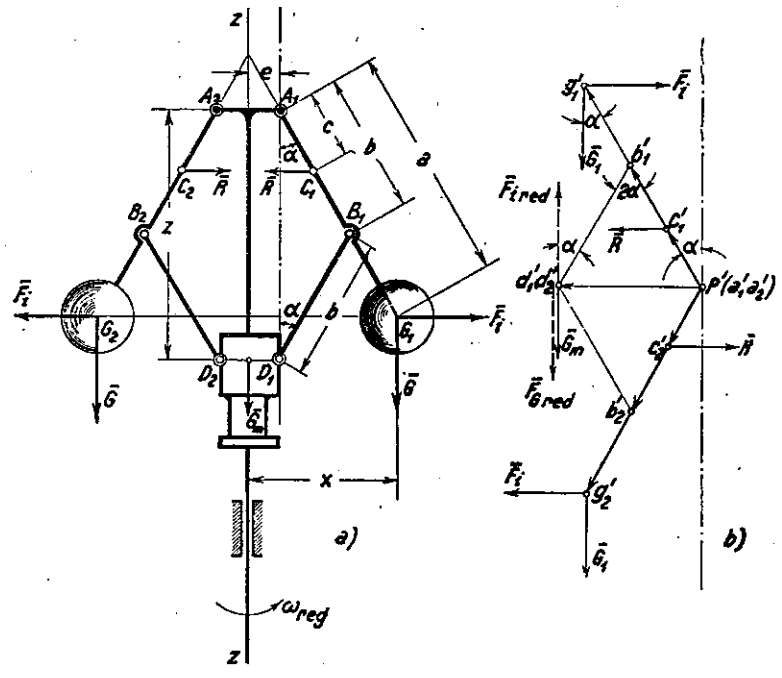


Fig. II.85. Schema regulatorului centrifug cu arc (fig. II.85, *a*) şi planul vitezelor rotit cu 90° cu forţele care acţionează asupra regulatorului.

mişcării de transport sînt egale cu zero, astfel încît studiul echilibrului forţelor reduse la manşon se poate face luînd în consideraţie numai mişcarea relativă.

Calculul cinetostatic al regulatorului centrifug se poate face aplicînd metoda pîrghiei lui N. E Jukovski.

Pentru aceasta se va construi pentru întregul mecanism al regulatorului compus din cele două braţe ale bilelor planul vitezelor rotit cu 90° (fig. II.85, *b*).

Astfel, din polul p' (corespunzător vitezelor relative egale cu zero ale lui A_1 şi A_2) se duce vectorul $p'g_1'$, care reprezintă la scara k_v viteza centrului G_1 al bilei într-o deplasare compatibilă cu legăturile elementelor regulatorului.

Vitezele punctelor B_1 şi C_1 vor fi $k_v(\overline{p'b_1'})$, respectiv $k_v(\overline{p'c_1'})$. Din b_1' se duce $b_1'd_1' \parallel B_1D_1$ şi din p' direcţia $p'd_1' \perp zz$. Din această construcţie rezultă $v_{D_1}=v_{D_2}=k_v(\overline{p'd_1'})$ rotite cu 90°. La fel se procedează şi cu partea stîngă a regulatorului, obţinîndu-se vectorii corespunzători vitezelor G_2; B_2; C_2 şi D_2.

După construirea planului vitezelor rotit cu 90° se aplică forţele G_1, F_i, R şi G_m în vîrfurile vectorilor vitezelor corespunzătoare fiecărui punct de aplicaţie din planul regulatorului.

24.2. Calculul forţei centrifuge reduse la manşon

Valoarea forţei centrifuge a bilei corespunzătoare vitezei $\bar{\omega}_{reg}$ a axului zz este

$$F_i = \frac{G_1}{g} x \cdot \omega_{reg}^2 .$$

Din figură rezultă:

$$x = e + a \sin \alpha,$$

deci

$$F_i = \frac{G_1}{g}(e + a \sin \alpha)\,\omega_{reg}^2 . \qquad \text{(II.298)}$$

Luînd momentul acestor forţe centrifuge faţă de polul p' al planului vitezelor, care se echilibrează cu momentul forţei de echilibrare F_{ie} la manşonul M al regulatorului, se obţine:

$$F_i(\overline{p'g_1'})\cos\alpha + F_i(\overline{p'g_2'})\cos\alpha + F_{ie}(\overline{p'd'}) = 0.$$

Cum

$$(\overline{p'g_1'}) = (\overline{p'g_2'}) = \frac{v_G}{k_v} \quad \text{şi} \quad (\overline{p'd_1'}) = \frac{v_D}{k_v},$$

prin împărţire cu $(\overline{p'd'})$ se obţine:

$$F_{ie} = -2F_i \frac{v_G}{v_D} \cos\alpha.$$

Deci, valoarea forţei reduse $F_{i\,red}$ este:

$$F_{i\,red} = 2F_i \frac{v_G}{v_D} \cos\alpha. \qquad \text{(II.299)}$$

După cum se știe, sensul acestei forțe este invers lui F_{ie}, adică orientat în sus, așa cum este arătat punctat în fig. II.85, *b*.

Aceasta înseamnă că forța centrifugă F_i redusă la manșon tinde să micșoreze valoarea lui z, deplasînd manșonul în sus.

Formula (II.299) se transformă într-o expresie în funcție de ordonata z, dacă se înlocuiește raportul $\frac{v_G}{v_D}$ cu valoarea ce se obține din planul vitezelor.

Din triunghiul $p'b'_1d'_1$ se obține:

$$\frac{p'b'_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{p'd'_1}{\sin 2\alpha},$$

de unde

$$\frac{v_B}{v_D}=\frac{1}{2\sin\alpha}. \qquad \text{(a)}$$

Cum

$$\frac{v_B}{v_G}=\frac{b}{a},\ \text{înlocuind pe } v_B \text{ în (a),}$$

rezultă

$$\frac{v_G}{v_D}=\frac{a}{2b\sin\alpha}. \qquad \text{(b)}$$

Înlocuind această valoare în (II.299), se obține:

$$F_{i\,red}=F_i\frac{a}{b\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

După introducerea în formula de mai sus și a valorii lui F_i din (II.298) rezultă:

$$F_{i\,red}=\frac{G_1}{g}(e+a\sin\alpha)\frac{a}{b\,\mathrm{tg}\,\alpha}\omega^2_{reg}. \qquad \text{(c)}$$

Din triunghiul $A_1B_1D_1$ format în fig. II.85, *a* se vede că

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sqrt{b^2-\frac{z^2}{4}}}{\frac{z}{2}}=\frac{2b}{z}\sqrt{1-\left(\frac{z}{2b}\right)^2} \qquad \text{(d)}$$

și

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{b^2-\frac{z^2}{4}}}{b}=\sqrt{1-\left(\frac{z}{2b}\right)^2}. \qquad \text{(e)}$$

Înlocuind aceste valori în formula (c) și făcînd calculele, se obține:

$$F_{i\,red}=\frac{G_1}{2g}\left(\frac{a}{b}\right)^2\left[1+\frac{e}{a\sqrt{1-\left(\frac{z}{2b}\right)^2}}\right]z\cdot\omega^2_{reg}. \qquad \text{(II.300)}$$

Formula se poate scrie sub forma prescurtată

$$F_{i\,red}=\omega^2_{reg}\cdot f_i(z), \qquad \text{(II.301)}$$

unde

$$f_i(z)=\frac{G_1}{2g}\left(\frac{a}{b}\right)^2\left[1+\frac{e}{a\sqrt{1-\left(\frac{z}{2b}\right)^2}}\right]z, \qquad \text{(II.302)}$$

sau

$$f_i(z)=\frac{G_1}{2g}\left(\frac{a}{b}\right)^2\left[z+\frac{e}{\frac{a}{2b}\sqrt{\left(\frac{2b}{z}\right)^2-1}}\right]. \qquad \text{(II.302')}$$

24.3. Calculul forței antagoniste reduse la manșon (forța portantă a regulatorului). Caracteristica regulatorului

Luînd momentele în raport cu polul p' pentru forțele G_1 (greutățile bilelor), R (tensiunea arcului), G_m (greutatea manșonului) și a forței de echilibrare F_{Ge} la manșon, se obține din planul vitezelor (știind că $\overline{p'g'_1}=\overline{p'g'_2}$; $\overline{p'c'_1}=\overline{p'c'_2}$):

$$2G_1\left(\overline{p'g'_1}\right)\sin\alpha+2R\left(\overline{p'c'_1}\right)\cos\alpha+G_m\left(\overline{p'd'_1}\right)+F_{Ge}\left(\overline{p'd'_1}\right)=0.$$

Forța redusă $F_{G\,red}=-F_{Ge}$, dirijată în jos, așa cum este arătat în fig. II.85, *b*, are deci valoarea:

$$F_{G\,red}=G_m+2R\left(\frac{\overline{p'c'_1}}{\overline{p'd'_1}}\right)\cos\alpha+2G_1\left(\frac{\overline{p'g'_1}}{\overline{p'd'_1}}\right)\sin\alpha$$

sau

$$F_{G\,red}=G_m+2R\frac{v_C}{v_D}\cos\alpha+2G_1\frac{v_D}{v_G}\sin\alpha. \qquad \text{(II.303)}$$

Valoarea lui $\frac{v_C}{v_D}$ se obține ușor din planul vitezelor și din formula (a).

Astfel,

$$\frac{v_C}{v_D}=\frac{v_B}{v_D}\frac{c}{b}=\frac{c}{b}\frac{1}{2\sin\alpha}. \qquad \text{(f)}$$

Înlocuind în (II.303) valorile din (b) și (f), se obține:

$$F_{G\,red}=G_m+\frac{Rc}{b\,\mathrm{tg}\,\alpha}+\frac{G_1a}{b}. \qquad \text{(II.304)}$$

Dacă se înlocuieşte valoarea lui $\operatorname{tg}\alpha$ din (d), atunci valoarea forţei portante a regulatorului este:

$$F_{G\,red}=G_m+G_1\frac{a}{b}+R\frac{cz}{2b^2\sqrt{1-\left(\frac{z}{2b}\right)^2}}$$

sau

$$F_{G\,red}=G_m+G_1\frac{a}{b}+R\frac{c}{b\sqrt{\left(\frac{2b}{z}\right)^2-1}}. \qquad \text{(II.305)}$$

Din analiza formulei (II.305) se vede că forţa portantă a regulatorului este funcţie de aceeaşi ordonată z.

Se poate scrie deci că:

$$F_{G\,red}=f_G(z), \qquad \text{(II.306)}$$

în care $f_G(z)$ este dat de formula (II.305).

Curba $f_G(z)$ trasată într-un sistem de axe, în care pe ordonată se măsoară valorile forţei portante $F_{G\,red}$ iar pe abscisă valorile poziţiilor z ale manşonului, se numeşte *caracteristica regulatorului.*

§ 25. CURBA DE ECHILIBRU A REGULATORULUI

Ecuaţia de echilibru a regulatorului se obţine din egalarea formulelor (II.300) cu (II.305), adică:

$$F_{i\,red}-F_{G\,red}=0. \qquad \text{(II.307)}$$

Ţinînd seamă de (II.301) şi (II.306), se obţine:

$$\omega_{reg}^2 f_i(z)-f_G(z)=0. \qquad \text{(II.308)}$$

Dacă într-un sistem de axe de coordonate se trasează $\omega_{reg}^2 f_i(z)$ şi $f_G(z)$, (caracteristica regulatorului), (fig. II.86), atunci punctul M de intersecţie a acestora va da poziţia de echilibru a regulatorului corespunzătoare valorii lui ω_{reg}. Abscisa va da mărimea ordonatei z, adică poziţia manşonului.

Curba $\omega_{reg}^2 f_i(z)=F_{i\,red}(z)$ are o pantă cu atît mai mare, cu cît ω_{reg}^2 este mai mare. Astfel, din construcţia unui fascicul de curbe $F_{i\,red}(z)$ pentru diferite valori ale lui ω_{reg} se obţin poziţiile de echilibru ale regulatorului. Cu cît ω_{reg} este mai mare, că atît valoarea lui z, corespunzătoare poziţiei de echilibru, este mai mică.

In fig. II.86 punctul M' dă poziţia de echilibru pentru $\omega'_{reg}>\omega_{reg}$, iar punctul M'' — pentru $\omega''_{reg}<\omega_{reg}$.

Forma curbelor $F_{i\,red}(z)$ şi $f_G(z)$ depinde de tipul regulatorului şi de valoarea tensiunii R a arcului.

Aplicaţie. Să se afle turaţia n_{reg} a regulatorului din fig. II.85, astfel încît poziţia de echilibru să aibă loc pentru $z=b$. Se dau: $a=400$ mm; $b=320$ mm; $e=60$ mm; $G_1=8$ kg; $G_m=152$ kg; $R=0$. (Regulator tip Watt din fig. II.81).

Soluţie. Din ecuaţia (II.308) rezultă:

$$\omega_{reg}=\sqrt{\frac{f_G(z)}{f_i(z)}}$$

sau, înlocuind valorile lui $f_i(z)$ şi $f_G(z)$ din (II.302), respectiv (II.305), şi făcînd $R=0$, se obţine:

$$\omega_{reg}=\sqrt{\frac{G_m+G_1\frac{a}{b}}{\frac{1}{2g}G_1\left(\frac{a}{b}\right)^2\left[z+\frac{e}{\frac{a}{2b}\sqrt{\left(\frac{2b}{z}\right)^2-1}}\right]}}.$$

Făcînd în expresia de mai sus $z=b$, rezultă:

$$\omega_{reg}=\sqrt{6g\left(1+\frac{b}{a}\frac{G_m}{G_1}\right)\frac{1}{3a+2e\sqrt{3}}}.$$

Dacă acum se fac înlocuirile cu datele problemei, se găseşte:

$$\omega_{reg}=26{,}03\ \text{rads}^{-1}$$

sau

$$n_{reg}=252\ \text{rot/min}.$$

Unghiul α are în acest caz valoarea:

$$\alpha=\arccos\frac{z}{2b}=$$

$$=\arccos\frac{1}{2}=60°.$$

Dacă tensiunea arcului este dată de expresia

$$R=kc(\sin\alpha-\sin\alpha_0),$$

în care

k este constanta arcului;

α_0 — poziţia barelor regulatorului de unde începe acţiunea antagonistă a arcului,

atunci expresia lui $F_{G\,red}$ din (II.305) devine:

$$F_{G\,red}=G_m+G_1\frac{a}{b}+\frac{kc^2}{2b^2}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{z}{2b}\right)^2}-\sin\alpha_0}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{2b}\right)^2}}z$$

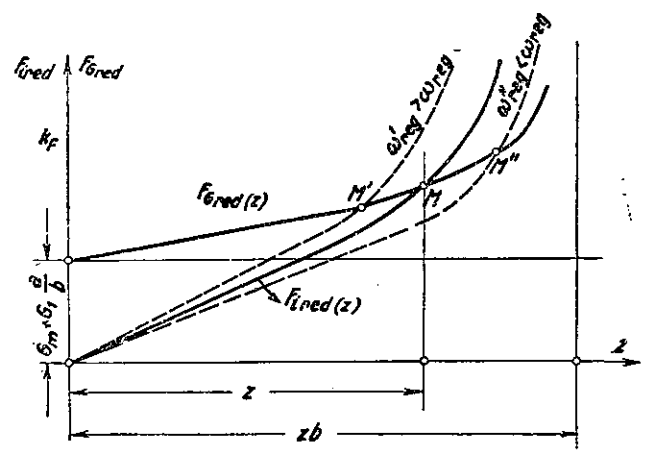


Fig. II.86. Determinarea poziţiei M de echilibrare a regulatorului centrifug corespunzătoare vitezei unghiulare ω_{reg}, cu ajutorul curbei caracteristice $F_{G\,red}(z)$.

sau

$$F_{G\,red}=G_m+G_1\frac{a}{b}+\frac{kc^2}{2b^2}\left[1-\frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{2b}\right)^2}}\right]z. \qquad \text{(II.309)}$$

Caracteristica regulatorului dată de (II.309) are forma din fig. II.87.

Pentru valoarea lui $z=z_0=2b\cos\alpha_0$, unde z_0 este poziția mufei pentru $\alpha=\alpha_0$, valoarea lui $F_{G\,red}$ este aceeași ca și pentru $z=0$.

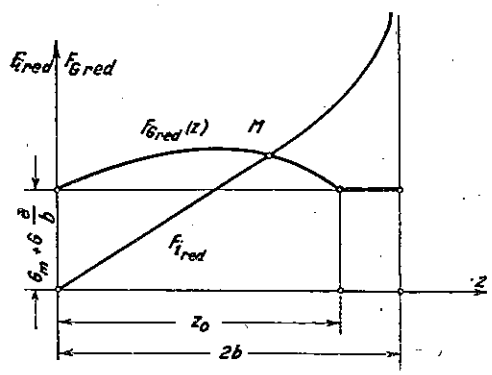


Fig. II.87. Curba caracteristică $F_{G\,red}(z)$ a regulatorului cu arc.

De la valoarea $z=z_0=2b\cos\alpha_0$ pînă la valoarea $z=2b$ forța $F_{G\,red}$ este constantă, deoarece al treilea termen din membrul al doilea al ecuației (II.309) dispare, R fiind egal cu zero în acest interval.

Aflarea pozițiilor de echilibru ale regulatorului pentru diferite valori ale lui ω_{reg} se face la fel ca în fig. II.86. Astfel, în fig. II.87 punctul M determină poziția de echilibru corespunzătoare lui $F_{i\,red}$ determinat de viteza unghiulară ω_{reg}.

Dacă se calculează pentru fiecare tip de regulator expresiile lui $f_i(z)$ și $f_G(z)=F_{G\,red}(z)$, atunci cu ajutorul formulei (II.308) se obține valoarea lui ω_{reg}, adică:

$$\omega^2_{reg}=\frac{f_G(z)}{f_i(z)}\Phi=(z). \qquad \text{(II.310)}$$

Prin construirea curbei $\Phi(z)$ într-un sistem de axe $\left(\omega^2_{reg}, z\right)$, se poate obține pentru fiecare poziție a mufei viteza unghiulară care realizează echilibrul regulatorului.

Curba $\Phi(z)$ este numită curba de echilibru a regulatorului.

Dacă în (II.310) ce introduc valorile lui $f_i(z)$ și $f_G(z)$ date de (II.302) și (II.305), se obține:

$$\omega^2_{reg}=\frac{G_m+G_1\frac{a}{b}+R\frac{cz}{2b^2\sqrt{1-\left(\frac{z}{2b}\right)^2}}}{\frac{G_1}{2g}\left(\frac{a}{b}\right)^2\left[1+\frac{e}{a\sqrt{1-\left(\frac{z}{2b}\right)^2}}\right]z}. \qquad \text{(II.311)}$$

Formula de mai sus se poate pune sub o formă adimensională dacă se ia pe ordonată $\omega^2_{reg}=\frac{\omega^2_{reg}\cdot a}{g}$, iar pe abscisă $z'=\frac{z}{2b}$.

In acest caz, (II.311) devine:

$$\omega'^2_{reg}=\frac{G_m+G_1\frac{a}{b}+R\frac{c}{b}\cdot\frac{z'}{\sqrt{1-z'^2}}}{G_1\frac{a}{b}\left(1+\frac{e}{a\sqrt{1-z'^2}}\right)^2z'}. \qquad \text{(II.312)}$$

In sistemul de axe $\left(\omega'^2_{reg}, z'\right)$ curba de echilibru a regulatorului sub forma adimensională se prezintă ca în fig. II.88. In această curbă, valorile extreme ale lui z' variază

între $z'=0$, cînd barele regulatorului sînt orizontale, adică $\alpha=\frac{\pi}{2}$, și $z'=1$, cînd barele regulatorului sînt verticale, adică $\alpha=0$ și $z=2b$.

— Pentru $z'=0$, se obține:

$$\omega'_{reg}=\infty \quad \text{și}$$

$$\omega_{reg}=\infty.$$

— Pentru $z'=1$, se obține:

$$\omega'_{reg}=\sqrt{\frac{cR}{G_1e}}$$

și

$$\omega_{reg}=\sqrt{\frac{cR}{Ge}\cdot\frac{g}{a}}.$$

Curba de echilibru a regulatorului are un minim în M_0, care reprezintă limita de stabilitate statică a acestuia.

Porțiunea M_1M_0 este nestabilă (sau labilă), deoarece la o creștere a lui z' corespunde o creștere a lui ω'_{reg}.

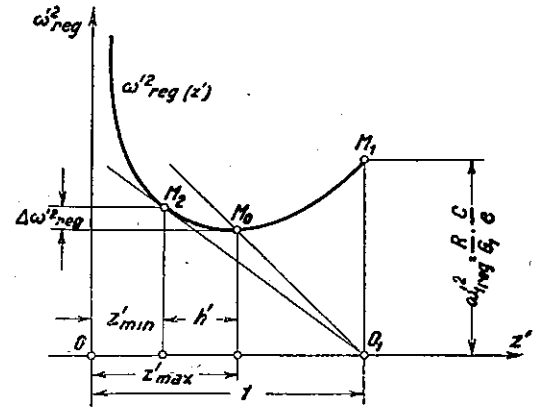


Fig. II.88. Curba de echilibru a regulatorului $\omega'^2_{reg}(z')$ în coordonate adimensionale și determinarea domeniului de stabilitate M_0M_2.

Porțiunea de stabilitate statică a regulatorului este cuprinsă între M_0 și M_2, unde M_2 este punctul de tangență al dreptei duse din O_1 la curba $\omega'^2_{reg}(z')$. Pozițiile minimă z'_{min} și maximă z'_{max} ale mufei regulatorului determină regiunea între care acesta are o funcționare stabilă.

Regiunea este evident influențată de elementele constructive ale regulatorului, cum sînt: tensiunea arcului R, greutățile bilelor, lungimea și forma barelor.

Construcția curbei date de (II.312) se face practic prin înlocuirea lui z' cu valori de la 0 pînă la 1.

Avînd curba $\omega'^2_{reg}(z')$ pentru un regulator dat, se poate determina valoarea lui $\omega_{reg}=\omega'_{reg}\sqrt{\frac{g}{a}}$ pentru fiecare poziție a lui $z=2bz'$.

Curba de echilibru a regulatorului $\omega'^2_{reg}(z')$ reprezentată în fig. II.88 prezintă avantajul că elimină adoptarea de scări pentru ω_{reg} și z.

Dacă $F_{G\,reg}$ este dat de formula (II.309), atunci variația lui z' are loc între 0 și $\cos\alpha_0$.

§ 26. GRADUL DE NEREGULARITATE AL REGULATORULUI

Prin construirea curbei de echilibru a regulatorului s-au determinat punctele M_0 și M_2 corespunzătoare limitelor în interiorul cărora funcționarea regulatorului este stabilă.

Astfel, poziției M_0 îi corespunde o distanță maximă $z_{max}=2bz'_{max}$ a manșonului, determinată de viteza unghiulară minimă $\omega_{reg\,min}=\omega'_{reg\,min}\sqrt{\frac{g}{a}}$, dată de turația minimă n_{min} a elementului inițial al mașinii.

Poziției M_2 îi corespunde o distanță minimă $z_{min}=2bz'_{min}$ a manșonului, determinată de viteza unghiulară maximă $\omega_{reg\,max}=\omega'_{reg\,max}\sqrt{\frac{g}{a}}$ dată de turația maximă n_{max} a elementului inițial al mașinii.

Sub turaţia n_{min} regulatorul nu mai are o poziţie de echilibru stabil, deoarece — după cum s-a arătat — la o creştere a lui z corespunde o creştere a lui ω_{reg} în loc de o scădere a acesteia.

Dincolo de turaţia n_{max} regulatorul nu mai reacţionează la variaţiile vitezei unghiulare.

Cursa totală a manşonului este deci diferenţa

$$h = z_{max} - z_{min}.$$

Dacă se notează pentru simplificare

$$\omega_{reg\,max} = \omega_{max} \quad \text{şi} \quad \omega_{reg\,min} = \omega_{min},$$

vitezele unghiulare maximă şi minimă ale axului regulatorului corespunzătoare lui z_{min}, respectiv z_{max}, şi cu

$$\omega_{med} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}, \tag{II.313}$$

atunci se defineşte drept grad de neregularitate al regulatorului raportul

$$\varepsilon = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{med}}. \tag{II.314}$$

Mărimea lui ε se poate pune şi sub forma asemănătoare gradului de neregularitate al maşinii, adică

$$\varepsilon = \frac{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}{2\omega_{med}^2}. \tag{II.315}$$

Nu trebuie confundat gradul de neregularitate ε al regulatorului cu gradul de neregularitate δ al maşinii. Acesta din urmă este funcţie — după cum s-a arătat — de masa volantului, de momentul de inerţie redus al maşinii şi de diagramele de variaţie ale forţelor exterioare.

Gradul de neregularitate al regulatorului depinde atît de elementele constructive ale acestuia, cît şi de vitezele unghiulare ale maşinii: cea maximă la mersul în gol şi cea minimă la funcţionarea cu suprasarcina maximă admisibilă.

Dimensionarea regulatorului trebuie făcută astfel, încît să aibă o funcţionare stabilă în acest interval.

Dacă se dau cele două viteze unghiulare extreme ale maşinii, atunci se determină ω_{max} şi ω_{min} ale regulatorului şi de aici şi diferenţa

$$\Delta\omega_{reg}^2 = \omega_{max}^2 - \omega_{min}^2.$$

Cu ajutorul lui $\Delta\omega_{reg}^2$ se calculează $\Delta\omega_{reg}'^2 = \frac{a}{g}\Delta\omega_{reg}^2$ şi din curba de echilibru a regulatorului (fig. II.88) se găseşte punctul M_2.

Distanţa pe orizontală dintre M_0 şi M_2 este cursa maximă h' a manşonului, unde $h' = \frac{h}{2b}$ (h fiind cursa manşonului corespunzătoare regiunii de funcţionare stabilă).

Se vede că la diferite regulatoare, pentru un acelaşi h, gradul de neregularitate ε va fi cu atît mai mare, cu cît panta curbei de echilibru în porţiunea stabilă este mai mare.

Cu cît această pantă este mai mică, cu atît ε este mai mic.

Dacă curba de echilibru este o orizontală, atunci $\varepsilon = 0$ şi, în consecinţă, axul regulatorului are o viteză unghiulară constantă pentru orice poziţie a manşonului.

Un astfel de regulator se numeşte astatic.

§ 27. STABILITATEA REGULATORULUI

Studiul stabilităţii regulatorului se poate face şi dacă se analizează funcţionarea lui cu ajutorul curbei caracteristice a forţei portante reduse la centrele de greutate ale bilelor, aşa cum se arată în fig. II.89.

In acest caz, valoarea forţei portante $F'_{G\,red}$ redusă la centrele bilelor se obţine tot din planul vitezelor rotit cu 90° (fig. II.85, *b*).

Expresia lui $F'_{G\,red}$ se poate deduce mai simplu din (II.303), care se înmulţeşte cu raportul

$$\frac{v_D}{v_G \cos\alpha}.$$

Făcînd înmulţirea, se obţine:

$$F'_{G\,red} = F_{G\,red}\frac{v_D}{v_G \cos\alpha}.$$

Inlocuind pe $F_{G\,red}$ cu valoarea dată de (II.303), rezultă:

$$F'_{G\,red} = G_m \frac{v_D}{v_G \cos\alpha} + 2r\left(\frac{v_C}{v_G}\right) + 2g_1 \operatorname{tg}\alpha. \tag{II.316}$$

Din formula (b) de la § 24.2 rezultă

$$\frac{v_D}{v_G} = \frac{2b}{a}\sin\alpha,$$

de unde

$$\frac{v_D}{v_G \cos\alpha} = \frac{2b}{a}\operatorname{tg}\alpha;$$

de asemenea

$$\frac{v_C}{v_G} = \frac{c}{a}.$$

Inlocuind în (II.316), se obţine:

$$F'_{G\,red} = G_m \frac{2b}{a}\operatorname{tg}\alpha + 2R\frac{c}{a} + 2G_1 \operatorname{tg}\alpha. \tag{II.317}$$

Din fig. II.89 rezultă valoarea lui $\operatorname{tg}\alpha$.

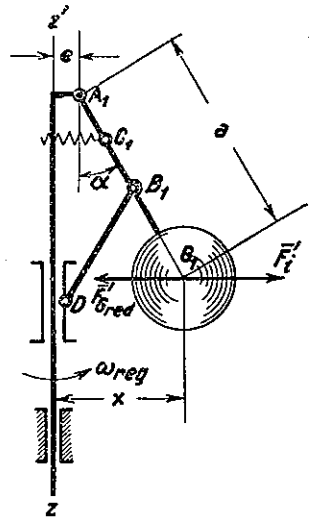


Fig. II.89. Poziţia de echilibru a regulatorului centrifug cu arc corespunzătoare vitezei unghiulare ω_{reg} şi a dreptei $F_i(x)$.

Se vede imediat că

$$\sin\alpha=\frac{x-e}{a},$$

şi deci

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{x-e}{\sqrt{a^2-(x-e)^2}}\cdot\cdot$$

Introducînd expresia de mai sus în (II.317), se găseşte în sfîrşit că:

$$F'_{G\,red}=2\left(\frac{b}{a}G_m+G_1\right)\frac{x-e}{\sqrt{a^2-(x-e)^2}}+2\frac{c}{a}R. \qquad \text{(II.318)}$$

In expresia (II.318) x variază de la:

$$x=e,\quad \text{pentru}\quad \alpha=0\quad \text{cînd}\quad F'_{G\,red}=2\frac{c}{a}R,$$

pînă la:

$$x=a+e,\quad \text{pentru}\quad \alpha=\frac{\pi}{2}\quad \text{cînd}\quad F'_{G\,red}=\infty.$$

$F'_{G\,red}=\varphi_G(x)$ este [la fel ca şi ecuaţia (II.306)] caracteristica regulatorului. Intr-un sistem de axe ($F'_{G\,red}$, x), variaţia forţei portante a regulatorului, redusă la centrele de greutate ale bilelor, este dată de $\varphi_G(x)$.

Forţa centrifugă a bilelor care face echilibru lui $F'_{G\,red}$ are expresia

$$F_i=2\frac{G_1}{g}\omega_{reg}^2 x. \qquad \text{(II.319)}$$

Ecuaţia de echilibru a regulatorului se poate scrie în acest caz sub forma

$$F_i-\varphi_G(x)=0, \qquad \text{(II.320)}$$

sau sub forma

$$\omega_{reg}^2\varphi_i(x)-\varphi_G(x)=0, \qquad \text{(II.321)}$$

unde

$$\varphi_i(x)=2\frac{G_1}{g}x.$$

Din ecuaţiile de mai sus rezultă:

$$\omega_{reg}^2=\frac{\varphi_G(x)}{\varphi_i(x)}=\psi(x). \qquad \text{(II.322)}$$

Cu funcţia $\psi(x)$ se poate face acelaşi studiu care s-a făcut la § 25 cu funcţia $\Phi(z)$ — curba de echilibru a regulatorului.

Se va studia acum mai departe stabilitatea regulatorului, folosind curba caracteristică $\varphi_G(x)$, trasată în fig. II.90.

Dacă se duce prin origine o dreaptă înclinată cu unghiul β, aceasta reprezintă la un $\omega_{reg}=$const., linia forţei centrifuge.

In adevăr, din (II.319) rezultă:

$$\frac{F_i}{x}=2\frac{G_1}{g}\omega_{reg}^2$$

şi cum

$$F_i=k_F y \quad \text{şi} \quad x=k_l x_1,$$

înlocuind, se obţine:

$$\frac{k_F}{k_l}\cdot\frac{y}{x}=\frac{k_F}{k_l}\operatorname{tg}\beta=2\frac{G_1}{g}\omega_{reg}^2,$$

de unde

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{k_l}{k_F}2\frac{G_1}{g}\omega_{reg}^2. \qquad \text{(II.323)}$$

Din (II.323) rezultă valoarea vitezei unghiulare a axului regulatorului, pentru o anumită înclinare a liniei forţei centrifuge:

$$\omega_{reg}=\sqrt{\frac{k_F}{k_l}\frac{g}{2G_1}\operatorname{tg}\beta}. \qquad \text{(II.324)}$$

Punctul M de intersecţie a liniei forţei centrifuge cu curba caracteristică reprezintă poziţia de echilibru a regulatorului, corespunzătoare vitezei unghiulare dată de înclinarea β.

In adevăr, pentru punctul M, conform ecuaţiei (II.320), există egalitate între forţa redusă centrifugă F_i şi forţa redusă $F'_{G\,red}=\varphi_G(x)$.

Se va examina acum care este porţiunea de pe curba caracteristică ce corespunde unei funcţionări stabile a regulatorului.

Dacă pentru poziţia de funcţionare corespunzătoare punctului M se scoate regulatorului din echilibru, de exemplu prin ridicarea manşonului, atunci depărtarea x a bilelor faţă de axa de rotaţie a regulatorului se va mări, adică

$$x_1+\Delta x_1=x_1''>x_1.$$

Dacă acum se lasă liber regulatorul, atunci noua forţă centrifugă

$$F_i+\Delta F_i=k_F(\overline{m''M_1''})$$

va fi mai mică decît forţa portantă a regulatorului:

$$F_{G\,red}+\Delta F'_{G\,red}=k_F(\overline{m''M''}),$$

care tinde să apropie bilele de axa de rotaţie.

In consecinţă, bilele regulatorului vor reveni la poziţia iniţială, în M.

Dacă, din contra, manşonul va fi coborît şi apoi lăsat liber, fenomenul este invers şi noua forţă centrifugă

$$F_i-\Delta F_i=k_F(\overline{m'M_1'})$$

va readuce bilele în poziţia iniţială — în M — deoarece învinge forţa portantă

$$F'_{G\,red}-\Delta F'_{G\,red}=k_F(\overline{m'M'}).$$

In concluzie, regulatorul va fi stabil dacă curba caracteristică se află sub linia forței centrifuge, pînă la punctul de intersecție M, și deasupra, după punctul de intersecție.

Limita de stabilitate statică a regulatorului este dată de punctul M_0 de tangență cu linia forței centrifuge.

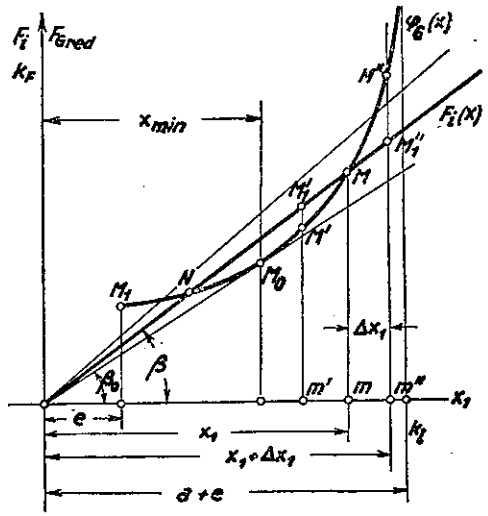


Fig. II.90. Determinarea domeniului de stabilitate a regulatorului centrifug cu ajutorul curbei caracteristice $\varphi_G(x)$.

Această poziție corespunde unei viteze unghiulare minime ω_{reg_0}, a cărei valoare este dată de unghiul β_0.

Punctul M_0 din fig. II.90 este corespunzător lui M_0 din fig. II.88.

Acestui punct îi corespunde un x_{min} sub care funcționarea regulatorului este nestabilă.

Intre x_{min} din fig. II.90 și z'_{max} din fig. II.88 există o legătură dată de forma constructivă a regulatorului.

In porțiunea M_0M_1 funcționarea regulatorului este nestabilă.

In adevăr, dacă prin ridicarea manșonului (deci prin mărirea lui x) se scoate regulatorul din poziția N de echilibru și apoi se lasă liber, atunci forța centrifugă, fiind mai mare decît forța portantă, va depărta bilele de axul de rotație, pînă cînd va căpăta poziția stabilă corespunzătoare punctului M.

Dacă se face operația inversă, regulatorul va veni în poziția M_1.

Utilizînd limbajul matematic se poate spune că regulatorul are o funcționare stabilă, dacă tangenta T la curba caracteristică $\varphi_G(x)$ în punctul M are o pantă mai mare decît a liniei forței centrifuge $F_i(x)$, adică dacă:

$$\frac{d\varphi_G(x)}{dx} > \frac{dF_i(x)}{dx} = \frac{k_F}{k_l} \operatorname{tg} \beta. \qquad \text{(II.325)}$$

In fig. II.91, *a* punctul M satisface condiția (II.325).

Regulatorul va fi nestabil dacă

$$\frac{d\varphi_G(x)}{dx} < \frac{dF_i(x)}{dx} = \frac{k_F}{k_l} \operatorname{tg} \beta. \qquad \text{(II.326)}$$

Punctul N (fig. II.91, *b*) satisface condiția (II.326).

In sfîrșit, în punctul M_0 este satisfăcută condiția:

$$\frac{d\varphi_G(x)}{dx} = \frac{dF_i(x)}{dx} = \frac{k_F}{k_l} \operatorname{tg} \beta. \qquad \text{(II.327)}$$

Cu ajutorul curbei caracteristice se poate vedea dacă între limitele ω_{max} și ω_{min} ale axului regulatorului, corespunzătoare vitezei mașinii la mersul în gol și în suprasarcină, funcționarea regulatorului este stabilă.

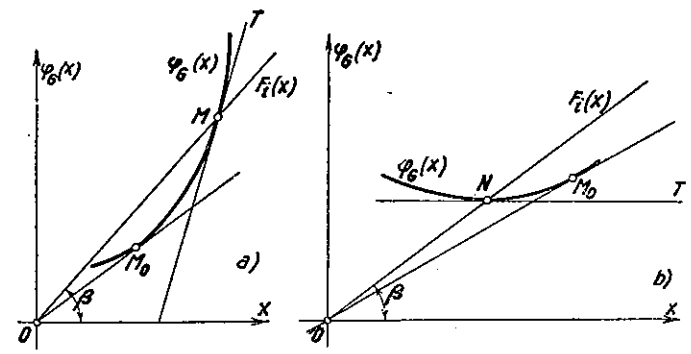


Fig. II.91. Curbele caracteristice ale regulatoarelor statice (fig. II.91, *a*) și nestatice (fig. II.91, *b*).

Dacă cele două linii ale forței centrifuge corespunzătoare lui ω_{max} și ω_{min} intersectează curba caracteristică în puncte care satisfac condiția (II.325) *și dacă toate punctele din acest interval au această proprietate,* atunci regulatorul este static (fig. II.92, *a*). Un astfel de regulator dacă este scos, dintr-o cauză oarecare, din poziția de echilibru, corespunzătoare mișcării de regim a mașinii, revine la poziția inițială, fie imediat (cînd viteza la sosirea în punctul M este zero), fie după o serie de mici oscilații în jurul poziției de echilibru.

Dacă cele două linii ale forțelor centrifuge corespunzătoare lui ω_{max} și ω_{min} intersectează curba caracteristică în puncte care satisfac condiția (II.326) și dacă toate punctele din acest interval au această proprietate, atunci regulatorul este nestatic (fig. II.92, *b*).

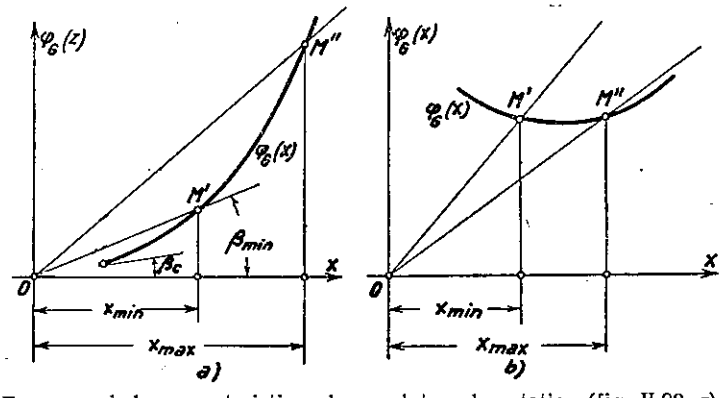


Fig. II.92. Forma curbelor caracteristice ale regulatoarelor statice (fig. II.92, *a*) și nestatice (fig. II.92, *b*).

Dacă un astfel de regulator este scos din poziția de echilibru, el nu va mai reveni la poziția inițială, ci, sau se depărtează, sau se apropie de axul de rotație, după natura impulsului inițial.

Dacă curba caracteristică este o dreaptă care trece prin origine şi coincide cu linia forţei centrifuge, atunci regulatorul se găseşte pentru orice poziţie a mufei în echilibru dinamic. Cazul corespunde unei curbe de echilibru paralele cu axa $z\,[\omega'^2_{reg}(z')$ din fig. II.88].

Un astfel de regulator se numeşte astatic.

Caracteristica regulatorului limitează astfel şi domeniul lui de utilizare, în special în ceea ce priveşte viteza minimă. Astfel,

$$\omega_{min}=\sqrt{\frac{k_F}{k_l}\frac{g}{2G_1}\operatorname{tg}\beta_{min}}>\omega_0=\sqrt{\frac{k_F}{k_l}\frac{g}{2G_1}\operatorname{tg}\beta_0},$$

adică

$$\beta_{min}>\beta_0 \text{ (în cazul regulatoarelor statice).}$$

§ 28. INSENSIBILITATEA REGULATORULUI

28.1. Domeniul de insensibilitate

Studiul echilibrului regulatorului s-a făcut fără a se lua în consideraţie frecările din articulaţii.

Problema trebuie deci reluată, luînd în consideraţie în calcul şi suma tuturor forţelor de frecare reduse, fie la manşon, atunci cînd se scrie ecuaţia de echilibru (II.308), fie la centrele bilelor, atunci cînd se scrie ecuaţia de echilibru (II.321).

Se consideră în primul caz că $F_{f\,red}$ este suma tuturor forţelor de frecare reduse la manşonul regulatorului.

Sensul acestei forţe este — după cum se ştie — invers sensului de deplasare a manşonului faţă de ax.

Se presupune întîi că, din cauza creşterii sarcinii, viteza unghiulară a maşinii s-a micşorat.

In acest caz manşonul va începe să se deplaseze în jos la o viteză unghiulară ω_{reg_1}, numai după ce forţa portantă $F_{G\,red}$ a devenit egală cu forţa centrifugă $F_{i\,red}$ *plus* frecarea $F_{f\,red}$, adică atunci cînd este satisfăcută ecuaţia:

$$\omega^2_{reg_1}\cdot f_i(z)+F_{f\,red}-f_G(z)=0. \qquad \text{(II.328)}$$

Viteza ω_{reg_1} la care regulatorul începe să intre în acţiune este mai mică decît ω_{reg} corespunzătoare intrării în acţiune dacă se neglijează frecarea $F_{f\,red}$, adică:

$$\omega_{reg_1}<\omega_{reg}.$$

Dacă se presupune că viteza unghiulară a maşinii creşte, ca urmare a scăderii sarcinii, manşonul regulatorului va începe să se deplaseze în sus numai după ce forţa de inerţie redusă la manşon $F_{i\,red}$ a devenit egală cu forţa portantă *plus* frecarea $F_{f\,red}$.

In acest moment ecuaţia de echilibru devine:

$$\omega^2_{reg_2}f_i(z)-F_{f\,red}-f_G(z)=0. \qquad \text{(II.329)}$$

In ecuaţia de mai sus ω_{reg_2} este viteza unghiulară a axului regulatorului în momentul cînd manşonul începe să se ridice.

Această viteză unghiulară este mai mare decît ω_{red} corespunzătoare momentului cînd manşonul începe să se deplaseze, dacă se neglijează frecarea $F_{f\,red}$, adică

$$\omega_{reg_2}>\omega_{reg}.$$

In concluzie: pentru fiecare valoare a vitezei unghiulare ω_{reg} a regulatorului, deci pentru fiecare poziţie a manşonului, există un interval de variaţie a lui ω_{reg} în interiorul căruia poziţia manşonului va rămîne neschimbată (regulatorul nu intră în acţiune).

Intervalul este dat de inegalităţile de mai jos:

$$\omega_{reg_1}<\omega_{reg}<\omega_{reg_2}.$$

Corespunzător celor trei viteze unghiulare se pot trasa curbele de echilibru:

$$\omega^2_{reg_1}=\frac{f_G(z)-F_{f\,red}}{f_i(z)}=\Phi_1(z); \qquad \text{(II.330)}$$

$$\omega^2_{reg}=\frac{f_G(z)}{f_i(z)}=\Phi(z); \qquad \text{(II.331)}$$

$$\omega^2_{reg_2}=\frac{f_G(z)+F_{f\,red}}{f_i(z)}=\Phi_2(z). \qquad \text{(II.332)}$$

In fig. II.93 sînt trasate cele trei curbe de echilibru corespunzătoare celor trei viteze unghiulare de mai sus.

Domeniul cuprins între curbele $\omega_2(z)$ şi $\omega_1(z)$ se numeşte domeniul de insensibilitate al regulatorului, deoarece în acest domeniu, la un z dat, manşonul rămîne nemişcat.

Se presupune, de exemplu, că manşonul este în poziţia M_2, determinată de abscisa z, şi că se află aici în urma unei creşteri a vitezei unghiulare a maşinii, cînd regulatorul în acţiunea sa a deplasat manşonul în sus.

Dacă acum viteza unghiulară a maşinii se micşorează, atunci viteza ω_{reg_2} se va micşora pînă cînd atinge valoarea ω_{reg_1} (corespunzătoare punctului figurativ M_1), fără ca în tot acest timp manşonul să-şi modifice poziţia iniţială z.

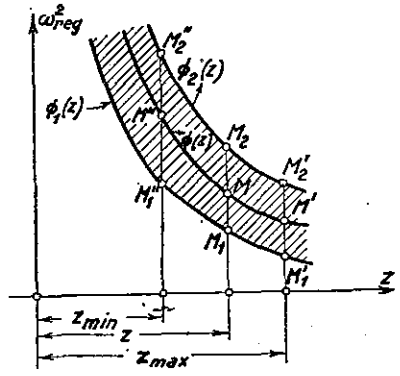


Fig. II.93. Determinarea domeniului de insensibilitate a regulatorului.

Dacă viteza unghiulară continuă să descrească, manşonul începe să se deplaseze în jos, punctul figurativ M_1 se va deplasa în lungul curbei $\Phi_1(z)$ în sensul lui z crescător, bilele se vor apropia deci de axul de rotaţie al regulatorului.

Dacă fenomenul descris mai sus a fost precedat de o scădere a vitezei unghiulare, adică manşonul se află în această poziţie în urma unei coboriri, atunci punctul figurativ din diagramă este M_1.

La o nouă micşorare a vitezei unghiulare a maşinii, manşonul va începe să se deplaseze imediat, iar punctul figurativ M_1 se va mişca pe curba $\Phi_1(z)$ pînă la noua poziţia de echilibru.

28.2. Gradul de insensibilitate al regulatorului

Ca măsură a insensibilităţii regulatorului se ia gradul de insensibilitate ν definit de raportul

$$\nu = \frac{\omega_{reg_2} - \omega_{reg_1}}{\omega_{reg}}, \tag{II.333}$$

în care

$$\omega_{reg} = \frac{\omega_{reg_2} + \omega_{reg_1}}{2}. \tag{II.334}$$

Gradul de insensibilitate poate fi scris şi sub forma

$$\nu = \frac{\omega^2_{reg_2} - \omega^2_{reg_1}}{2\omega^2_{reg}}. \tag{II.335}$$

In funcţie de ν se pot determina vitezele unghiulare ω_{reg_2} şi ω_{reg_1} dincolo de care regulatorul devine sensibil şi intră în acţiune:

$$\begin{aligned} \omega_{reg_2} &= \omega_{reg}\left(1 + \frac{\nu}{2}\right); \\ \omega_{reg_1} &= \omega_{reg}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right). \end{aligned} \tag{II.336}$$

Formulele (II.333) şi (II.334) arată că gradul de insensibilitate al regulatorului depinde de poziţia z a manşonului. In calcule trebuie deci folosite valorile medii din domeniul respectiv de reglare.

Această influenţă reiese şi din expresia lui ν în funcţie de valoarea forţei centrifuge F_i.

In adevăr, dacă se notează:

$$\omega_{reg_2} = \omega_{reg} + d\omega_{reg}$$

şi

$$\omega_{reg_1} = \omega_{reg} - d\omega_{reg},$$

atunci gradul de insensibilitate se poate scrie:

$$\nu = \frac{(\omega_{reg} + d\omega_{reg}) - (\omega_{reg} - d\omega_{reg})}{\omega_{reg}} = \frac{2d\omega_{reg}}{\omega_{reg}} = \frac{2dn}{n},$$

în care n este numărul de rotaţii pe minut ale maşinii, corespunzătoare lui ω_{reg}.

Expresia forţei centrifuge a celor două bile, corespunzătoare lui ω_{reg}, este dată de (II.319):

$$F_i = 2\frac{G_1}{g}\omega^2_{reg} \cdot x.$$

Diferenţiala acesteia în funcţie de ω_{reg} este

$$dF_i = 4\frac{G_1}{g} x\omega_{reg} d\omega_{reg}.$$

Dacă se face raportul, se obţine

$$\frac{dF_i}{F_i} = \frac{2d\omega_{reg}}{\omega_{reg}} = \frac{2dn}{n}.$$

Se poate scrie deci:

$$\nu = \frac{2dn}{d} = \frac{dF_i}{F_i}. \tag{II.337}$$

Cum F_i depinde, pentru orice poziţie a regulatorului, de viteza ω_{reg}, rezultă imediat că ν este variabil în intervalul de funcţionare de la z_{max} la z_{min}.

28.3. Influenţa gradului de insensibilitate ν al regulatorului asupra gradului de neregularitate ε al regulatorului

Se va ţine seamă de notaţiile folosite la § 26, adică:

$\omega_{reg\,max}$ se va nota cu ω_{max}

şi

$\omega_{reg\,min}$ cu ω_{min}.

Limita superioară a insensibilităţii regulatorului, corespunzătoare lui ω_{max}, este evident ω_{max_2} şi are pe M''_2 ca punct figurativ pe curba de echilibru din fig. II.93.

Limita inferioară a insensibilităţii pentru ω_{min} este evident ω_{min_1} şi are pe M'_1 ca punct figurativ.

Considerînd pe ν constant în tot intervalul de la z_{min} la z_{max}, se pot scrie relaţiile:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{max_2} &= \omega_{max}\left(1 + \frac{\nu}{2}\right); \\ \omega_{min_1} &= \omega_{min}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{II.338}$$

De asemenea, se poate scrie:

$$\omega_{med} = \frac{\omega_{max_2} + \omega_{min_1}}{2}. \tag{II.339}$$

In consecinţă, gradul de neregularitate real al regulatorului se poate pune sub forma

$$\varepsilon_{real}=\frac{\omega_{max_2}-\omega_{min_1}}{\omega_{med}}. \qquad (II.340)$$

Dacă se ţine seamă de formulele (II.338) şi (II.339), ε_{real} capătă forma:

$$\varepsilon_{real}=\frac{\omega_{max}\left(1+\frac{\nu}{2}\right)-\omega_{min}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)}{\omega_{med}}=\frac{\omega_{max}-\omega_{min}}{\omega_{med}}+\frac{(\omega_{max}+\omega_{min})}{2\omega_{med}},$$

de unde

$$\varepsilon_{real}=\varepsilon+\nu. \qquad (II.341)$$

Gradul de neregularitate real al regulatorului este egal cu suma gradului de neregularitate ε al regulatorului, dacă se neglijează frecările, şi a gradului de insensibilitate ν.

Micşorarea gradului de neregularitate real se face micşorînd pe ν. Dar ν depinde de mărimea forţelor de frecare din articulaţiile regulatorului şi ale mecanismului de distribuţie. Se poate micşora deci gradul de insensibilitate ν, dacă se micşorează influenţa forţelor de frecare ale mecanismului de distribuţie. Acest lucru se realizează la regulatoarele cu acţionare indirectă, la care mecanismul de distribuţie este acţionat cu ajutorul unui servomotor comandat de un releu (sertăraşul dublu *1* din fig. II.82).

Micşorarea gradului de insensibilitate ν al regulatorului prezintă avantajul că reduce masa bilelor regulatorului.

28.4. Influenţa gradului de insensibilitate al regulatorului asupra mecanismelor regulatorului şi de distribuţie ale maşinii

Gradul de insensibilitate al regulatorului nu poate fi însă coborît sub anumite limite, care depind de mişcarea de regim a maşinii. In adevăr, ν nu poate fi coborît sub valoarea gradului de neregularitate δ al maşinii respective.

Depăşirea limitei inferioare (adică dacă $\nu<\delta$) are ca rezultat uzura mecanismului de distribuţie şi oscilaţii periodice ale admisiei aburului în cilindrii maşinii.

După cum se ştie, viteza unghiulară a elementului conducător sau iniţial al maşinii variază între două limite n_{max} şi n_{min}, care depind de valoarea momentului de inerţie redus I_{red} al maşinii şi de variaţia forţelor exterioare în timpul unui ciclu energetic Φ_E.

Viteza de rotaţie a axului regulatorului ω_{reg} va suferi şi ea aceste oscilaţii periodice.

Dacă gradul de insensibilitate ν al regulatorului este mai mic decît gradul de neregularitate δ al maşinii, oscilaţiile periodice ale axului regulatorului vor produce oscilaţii ale mărimii forţei centrifuge F_i a bilelor, deoarece suplimentul de forţă centrifugă dF_i va învinge rezistenţele F_f, micşorînd admisia, cînd viteza unghiulară atinge valoarea n_{max}, şi mărind-o, cînd atinge valoarea n_{min}.

Aceste micşorări şi măriri ale secţiunii de trecere a agentului motor la fiecare rotaţie a arborelui motor uzează articulaţiile regulatorului şi ale mecanismului de distribuţie, mărind în acelaşi timp amplitudinile oscilaţiilor periodice ale vitezei unghiulare ω_1 a maşinii.

Se recomandă alegerea unui grad de insensibilitate ν egal cu gradul de neregularitate δ al maşinii. Alegerea lui $\nu=\delta$ prezintă avantajul că surplusul de forţă centrifugă dF_i creat de oscilaţiile vitezei unghiulare în mişcarea de regim aduce regulatorul pînă la limita de reglare, fără a-l pune în acţiune.

La fiecare rotaţie a maşinii, punctul figurativ corespunzător poziţiei z a manşonului (fig. II.93) se va găsi o dată în M_1 şi o dată în M_2.

Cînd mişcarea de regim încetează, ca urmare a modificării cuplului rezistent, regulatorul intră imediat în funcţiune, punctul figurativ M_2 deplasîndu-se pe curba de echilibru $\Phi_2(z)$ — în cazul creşterii vitezei unghiulare. In cazul micşorării vitezei unghiulare a maşinii punctul figurativ M_1 se deplasează pe curba de echilibru $\Phi_1(z)$.

28.5. Aplicaţie

Să se determine greutatea G_m a manşonului M, gradele de neregularitate ε şi ε_{real} la un regulator de tip Watt.

Se dau următoarele date:

$$a=400\text{ mm};\quad b=320\text{ mm};\quad e=60\text{ mm};\quad \alpha_{med}=30°;$$

$$n=180\text{ rot/min}\quad\text{sau}\quad \omega_{reg}=18{,}84\text{ rads}^{-1};\quad z_{max}-z_{min}=45\text{ mm};$$

$$G_1=8\text{ kg};\quad R=0;\quad \nu=0{,}1.$$

Soluţie. $F_{G\,red}$ rezultă din (II.305), în care se face $R=0$:

$$F_{G\,red}=G_m+G_1\frac{a}{b}. \qquad (a)$$

Din fig. II.85, *a* rezultă că pentru poziţia medie $z=z_{med}$ va avea expresia

$$z_{med}=2b\cos\alpha_{med}=2b\cos 30°=b\sqrt{3}. \qquad (b)$$

Introducînd valoarea lui z în (II.300) şi făcînd calculele, rezultă:

$$F_{i\,red}=\frac{G_1}{2g}(a+2e)\frac{a}{b}\sqrt{3}\,\omega_{reg}^2. \qquad (c)$$

Prin egalarea lui (a) cu (c), se obţine:

$$G_m=\frac{G_1}{2g}(a+2e)\frac{a}{b}\sqrt{3}\,\omega_{reg}^2-G\frac{a}{b}. \qquad (d)$$

Inlocuind în (d) valorile din datele problemei, rezultă:

$$G_m=\frac{8}{2\times 981}\times(40+12)\times\frac{40}{32}\times 1{,}73\times 18{,}84^2-8\times\frac{40}{32}=152{,}77\text{ kg}.$$

Pentru calculele care urmează se va lua

$$G_m=153\text{ kg}.$$

Se consideră că $\alpha_{med}=30°$ pentru cazul cînd

$$z_{max}-z_{med}=22{,}5\text{ mm}.$$

Cum din (b) rezultă

$$z_{med}=320\times 1{,}7321=554{,}3\text{ mm},$$

se găsește imediat:

$$z_{max}=576{,}8\text{ mm};\quad z_{min}=531{,}8\text{ mm}.$$

Unghiurile α_{max} și α_{min} se calculează cu formulele (d) sau (e) de la § 24.2.

Astfel, se poate întocmi tabela II.8.

Tabela II.8. Determinarea vitezelor unghiulare ω_{reg} corespunzătoare domeniului de funcționare a regulatorului

$z_{max}-z_{min}$ mm	z mm	α	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$f_i(z)$ kgs^2	$f_G(z)$ kgf	$\omega^2_{reg}=\frac{f_G(z)}{f_i(z)}$ s^{-2}	x mm
0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	531,8	33°48′	0,56630	0,66944	0,4301	163	$\omega^2_{max}=379$	284
22,5	554,3	30°	0,5	0,57735	0,4591	163	$\omega^2_{med}=355$	260
45	576,8	25°41′	0,43340	0,43091	0,4924	163	$\omega^2_{min}=331$	236

Valorile din coloanele 5 și 6 s-au calculat cu ajutorul formulelor (c) din § 24.2 combinate cu (II.301), respectiv cu formula (a) de mai sus. Valoarea lui x din coloana 8 s-a calculat cu formula $x=e+a\sin\alpha$.

Gradul de neregularitate ε al regulatorului (tip Watt) se va obține cu formula (II.315)

$$\varepsilon=\frac{\omega^2_{max}-\omega^2_{min}}{2\omega^2_{med}}=\frac{379-331}{2\times 356}=0{,}07.$$

Gradul de neregularitate real al regulatorului rezultă din formula (II.341).

$$\varepsilon_{red}=\varepsilon+\nu=0{,}07+0{,}1=0{,}17.$$

Cu ajutorul formulelor (II.338) ridicate la pătrat rezultă:

$$\omega^2_{max_2}=\omega^2_{max}(1+\nu);\qquad \omega^2_{min_2}=\omega^2_{min}(1-\nu).\qquad \text{(II.338′)}$$

Folosind formulele (II.338) se pot calcula pătratele vitezelor unghiulare corespunzătoare punctelor: M_1, M_2; M_1', M_2' și M_1'', M_2'' cu care se poate apoi construi domeniul de insensibilitate al regulatorului (fig. II.93).

Pătratele acestor viteze unghiulare sînt date în tabela II.9.

Tabela II.9. Determinarea domeniului de insensibilitate al regulatorului

z mm	ω^2_{reg} s^{-2}	$\omega^2_{min_2}$ s^{-2}	$\omega^2_{max_2}$ s^{-2}
531,8	379 (M'')	341 (M_1'')	417 (M_2'')
554,3	355 (M)	320 (M_1)	391 (M_2)
576,8	331 (M')	298 (M_1')	364 (M_2')

In paranteze s-au menționat punctele de pe curbele $\Phi(z)$ din fig. II.93 corespunzătoare valorilor lui ω^2. Curbele se pot trasa mai exact dacă se mai iau și alte puncte corespunzătoare diferitelor valori ale lui z cuprinse între

$$z_{min}<z<z_{max}.$$

Calculul forței centrifuge F_i

Folosind formula (II.319) și datele din tabele, rezultă:

Pentru $\omega^2_{reg}=\omega^2_{min}=355\text{ s}^{-2}$; $x=260$ mm:

$$F_{i\,med}=2\frac{G_1}{g}\omega^2_{reg}x=2\times\frac{8}{981}\times 355\times 26=150\text{ kgf}.$$

Pentru $\omega^2_{reg}=\omega^2_{min}=331\text{ s}^{-2}$; $x=236$ mm:

$$F_{i\,min}=2\times\frac{8}{981}\times 331\times 23{,}6=127\text{ kgf}.$$

Pentru $\omega^2_{reg}=\omega^2_{max}=379\text{ s}^{-2}$; $x=284$ mm:

$$F_{i\,max}=2\times\frac{8}{981}\times 379\times 28{,}4=176\text{ kgf}.$$

Cu aceste date și cu valorile lui x se poate construi curba caracteristică a regulatorului (fig. II.90).

CAPITOLUL V

ECHILIBRAJUL MAȘINILOR

§ 29. PROBLEMELE ECHILIBRĂRII FORȚELOR DE INERȚIE

După cum se știe (partea I, § 4.3), asupra fiecărui element din structura unui agregat sau mașină, element care are o mișcare variată, acționează o forță rezultantă unică de inerție, care produce presiuni dinamice pe suprafețele sau pe liniile de contact ale cuplelor cinematice (partea I, § 3.4, aplicația 2).

Aceste presiuni dinamice au o variaţie periodică, la fel ca şi forţele de inerţie care le-au produs, periodicitatea coincizînd cu ciclul cinematic sau energetic al maşinii.

Presiunile dinamice se transmit mai departe asupra elementului fix sau considerat fix al maşinii (cadrul locomotivei, automobilului, tractorului, avionului etc.), care preia astfel acţiunea tuturor forţelor de inerţie dezvoltate de masele în mişcare variată ale maşinii.

Dacă aceasta este fixată de teren prin fundaţie, forţele de inerţie se transmit terenului in toate sensurile sub formă de vibraţii de diferite amplitudini şi ordine şi de aici la construcţiile învecinate, punînd în pericol existenţa acestora, în afară de faptul că sînt extrem de greu de suportat chiar de persoanele din raza lor de influenţă.

Vibraţiile devin foarte periculoase cînd frecvenţa impulsurilor maşinii sau ale mecanismului coincide cu frecvenţa proprie a construcţiei sau a vehiculului pe care este montat (fenomenul de rezonanţă). In astfel de cazuri se poate ajunge chiar la distrugerea vehiculului sau a construcţiei, atunci cînd fenomenul de rezonanţă durează un timp mai lung.

In afară de aceste efecte dăunătoare, forţele de inerţie dezvoltate de masele elementelor maşinii produc în cuplele cinematice forţe de frecare suplimentare, precum şi tensiuni interioare suplimentare, care depăşesc în majoritatea cazurilor cu mult pe cele dezvoltate de forţele statice.

Eliminarea tuturor efectelor dăunătoare datorite forţelor de inerţie se face printr-o judicioasă repartizare atît a maselor elementelor, cît şi a unor mase adiţionale numite contragreutăţi. Această operaţie este cunoscută în tehnică sub numirea de echilibrarea maselor maşinii sau echilibrajul maşinii.

Forţele de inerţie dezvoltate de masa unui element care execută o mişcare plan-paralelă nu pot fi echilibrate în interiorul elementului propriu-zis, deoarece atît centrul de greutate al acestuia cît şi centrul instantaneu al acceleraţiilor descriu curbe închise (ciclice).

Nu acelaşi lucru se poate spune şi despre elementele care descriu mişcări de rotaţie în jurul unei axe fixe, unde centrul instantaneu al acceleraţiilor fiind fix, se poate realiza echilibrarea în interiorul elementului.

Din această cauză presiunile dinamice (sau suplimentare) în cuplele cinematice de rotaţie ale elementelor în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe se pot elimina complet prin echilibrare, ceea ce nu este posibil atunci cînd este vorba despre elemente în mişcare plan-paralelă.

In cazul agregatului sau al maşinii, forţele de inerţie ale tuturor elementelor care compun agregatul sau maşina se pot înlocui cu o rezultantă şi cu un moment al forţelor de inerţie.

Acestea produc efectele dăunătoare menţionate mai înainte. Dacă se va reuşi să se echilibreze această rezultantă prin repartizări judicioase de mase adiţionale şi să se elimine şi efectul momentului forţelor de inerţie, atunci maşina sau agregatul vor fi complet echilibrate.

La unele agregate cu dimensiuni mari şi cu un număr mai mic de cilindri, atenuarea efectului forţelor de inerţie şi al momentelor forţelor de inerţie neechilibrate total se face prin interpunerea între fundaţie şi teren a nisipului sau a altor materiale amortizoare. Această soluţie nu rezolvă însă complet problema.

Soluţia eliminării complete a presiunilor suplimentare sau dinamice din articulaţiile fixe ale maşinii sau agregatului este echilibrarea maselor.

In găsirea acestei soluţii se deosebesc două probleme, şi anume:

a) echilibrarea forţelor de inerţie dezvoltate de elementele aflate în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe, adică echilibrarea maselor în mişcare de rotaţie;

b) echilibrarea forţelor de inerţie ale elementelor unei maşini sau agregat, adică echilibrarea — parţială sau totală — a forţei de inerţie rezultantă a tuturor acelor elemente, precum şi a momentului rezultant al forţelor de inerţie al acestora. Este problema generală a echilibrării mecanismelor, maşinilor sau agregatelor.

Prima problemă se poate rezolva prin calcul matematic dacă se cunosc poziţia centrului de greutate şi mărimea maselor aflate în mişcare de rotaţie, cum ar fi, de exemplu, cazul la un arbore cotit. Această echilibrare trebuie însă verificată ulterior şi experimental, cu ajutorul unor instalaţii sau maşini speciale de balansare, menite să elimine eventualele imprecizii datorite erorilor de uzinare, neomogenităţii materialului sau nesimetriilor produse în timpul montajului.

Rezolvarea celei de-a doua probleme se poate face în trei moduri, şi anume: a) prin determinarea în prealabil a centrului de greutate al maşinii şi impunerea condiţiei ca acesta să fie fix în tot timpul ciclului energetic al maşinii; b) prin aplicarea metodei repartizării (concentrării) dinamice sau statice a tuturor maselor elementelor şi echilibrarea acestora după metoda primei probleme, atunci cînd toate masele punctiforme astfel concentrate au mişcări de rotaţie în jurul unor axe fixe; c) prin metode speciale, care se vor descrie mai departe, atunci cînd unele dintre masele punctiforme concentrate au mişcări rectilinii alternative.

Mai departe se vor trata separat cele două probleme expuse pe scurt mai sus.

§ 30. CONDIŢIILE DE ECHILIBRARE A MASELOR ÎN MIŞCARE DE ROTAŢIE

Pentru a putea proceda la echilibrarea maselor în mişcare de rotaţie în jurul unei axe este necesar să se cunoască în prealabil condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească o astfel de axă pentru ca rezultanta tuturor forţelor de inerţie dezvoltate de masele în mişcare de rotaţie, cum şi momentele forţelor de inerţie ale acestor mase, să nu dea naştere la reacţiuni suplimentare în articulaţiile arborelui cu batiul.

Din punct de vedere matematic acest lucru este echivalent cu găsirea condiţiilor pe care trebuie să le îndeplinească modul de repartizare a maselor faţă de axa de rotaţie, pentru ca să nu apară în timpul mişcării forţe de inerţie sau momente ale forţelor de inerţie neechilibrate.

In partea I, la studiul forţelor de inerţie dezvoltate în mecanisme (§ 3.2), s-au găsit expresiile proiecţiilor forţelor de inerţie şi ale momentelor forţelor de inerţie [formulele (I.10)] în cazul mişcării spaţiale generale după care, prin particularizare, s-a ajuns la cazul mişcării de rotaţie în jurul unei axe a unui element şi condiţiile ca acesta să fie echilibrat.

Mai jos se dă o metodă directă de găsire a acestor condiţii de echilibrare.

Se va lua pentru aceasta o masă oarecare (fig. II.94), care se roteşte în jurul axei Oz cu o viteză unghiulară ω şi cu o acceleraţie unghiulară ε oarecare.

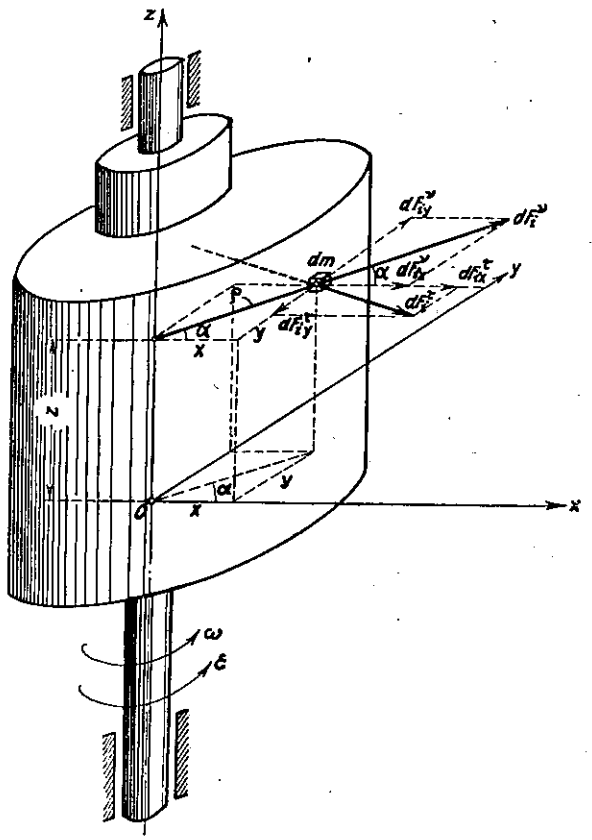


Fig. II.94. Componentele pe axele Ox, Oy şi Oz ale forţei de inerţie dF_i a unui element de masă dm dintr-un corp în mişcare de rotaţie în jurul unei axe Oz.

Această masă poate fi un rotor al unui motor electric sau turbine, un arbore cotit etc., care se rotesc în jurul axei geometrice Oz.

Se va lua din acest rotor un element de masă dm, la distanţa z de un plan de referinţă xOy şi la distanţa $\rho(x, y)$ de axa de rotaţie Oz.

In acest element de masă dm se dezvoltă o forţă de inerţie

$$dF_i = -a_A dm,$$

care se descompune în cele două componente — tangenţială şi centrifugă.

Valorile sînt date de expresiile cunoscute:

$$dF_i^{\nu} = -a_A^{\nu} dm = \rho\omega^2 dm,$$

$$dF_i^{\tau} = -a_A^{\tau} dm = -\rho\varepsilon dm$$

şi au sensurile indicate în fig. II.94.

Se vor găsi acum componentele acestor forţe de inerţie elementare după cele trei axe Ox, Oy şi Oz.

Din figură rezultă imediat:

$$d\bar{F}_{ix} = d\bar{F}_{ix}^{\nu} + \bar{F}_{ix}^{\tau} = \rho\omega^2 dm \cos\alpha + \rho\varepsilon dm \sin\alpha;$$

$$d\bar{F}_{iy} = d\bar{F}_{iy}^{\nu} + d\bar{F}_{iy}^{\tau} = \rho\omega^2 dm \sin\alpha - \rho\varepsilon dm \cos\alpha;$$

$$dF_{iz} = 0.$$

Ţinînd seamă că:

$$\rho\cos\alpha = x \quad \text{şi} \quad \rho\sin\alpha = y,$$

se obţine:

$$dF_{ix} = \omega^2 x dm + \varepsilon y dm; \tag{II.342}$$

$$dF_{iy} = \omega^2 y dm - \varepsilon x dm; \tag{II.343}$$

$$dF_{iz} = 0. \tag{II.344}$$

Momentele acestor componente în raport cu axele Ox, Oy şi Oz sînt respectiv:

$$dM_{ix} = -z dF_{iy} = -\omega^2 zy dm + \varepsilon zx dm; \tag{II.345}$$

$$dM_{iy} = +z dF_{ix} = +\omega^2 zx dm + \varepsilon yz dm; \tag{II.346}$$

$$dM_{iz} = -y dF_{ix} + x dF_{iy} = -\omega^2 xy dm - \varepsilon y^2 dm + \omega^2 xy dm - \varepsilon x^2 dm$$

sau

$$dM_{iz} = -\varepsilon\rho^2 dm. \tag{II.347}$$

Insumînd toate forţele de inerţie elementare şi momentele acestora date de relaţiile de mai sus pentru întregul corp aflat în mişcare de rotaţie, se obţine:

$$F_{ix} = \int dF_{ix} = \omega^2 \int x dm + \varepsilon \int y dm;$$

$$F_{iy} = \int dF_{iy} = \omega^2 \int y dm - \varepsilon \int x dm;$$

$$F_{iz} = 0.$$

Dar cum

$$x_G = \frac{\int x dm}{m} \quad \text{şi} \quad y_G = \frac{\int y dm}{m}$$

sînt expresiile coordonatelor centrului de greutate G al corpului, rezultă tocmai expresiile găsite în partea I, § 3.3, unde s-a studiat mişcarea elementului în jurul unei axe fixe [formulele (I.21)]:

$$F_{ix} = m\omega^2 x_G + m\varepsilon y_G;$$

$$F_{iy} = m\omega^2 y_G - m\varepsilon x_G. \tag{II.348}$$

Proiecţiile momentului forţelor de inerţie rezultă din integrarea expresiilor (II.345)—(II.347) şi sînt evident identice cu expresiile (I.24) (partea I, § 3.3), unde s-au particularizat expresiile generale ale vectorului $\bar{\omega} \times \bar{K}$ în cazul mişcării de rotaţie:

$$M_{ix} = -\omega^2 I_{yz} + \varepsilon I_{zx};$$

$$M_{iy} = \omega^2 I_{zx} + \varepsilon I_{yz}; \tag{II.349}$$

$$M_{iz} = -\varepsilon I_z.$$

Pentru ca rotorul să fie echilibrat trebuie deci ca, în conformitate cu cele enunţate la început, să fie satisfăcute următoarele condiţii:

$$F_{ix} = 0; \quad F_{iy} = 0;$$

$$M_{ix} = 0; \quad M_{iy} = 0. \tag{II.350}$$

Dar aceste condiţii nu sînt satisfăcute pentru orice valori ale lui ω şi ε, decît dacă

$$x_G = y_G = 0, \tag{II.351}$$

şi

$$I_{yz} = I_{zx} = 0. \tag{II.352}$$

Condiţia dată de (II.351) arată că centrul de greutate al rotorului trebuie să se afle pe axa de rotaţie Oz.

Condiţia dată de (II.352) arată că axa de rotaţie Oz trebuie să fie axa principală centrală de inerţie; axa Oz este astfel o axă de simetrie.

Nu este necesar ca şi $M_{iz}=0$, deoarece acesta nu produce reacţiuni suplimentare în axa Oz. M_{iz} devine zero în momentul cînd rotorul are o mişcare de rotaţie uniformă.

Dacă un corp în mişcare de rotaţie are centrul de greutate pe axa de rotaţie Oz [deci este satisfăcută condiţia (II.351) fără însă ca axa Oz să fie şi axă de simetrie], se spune că s-a realizat o echilibrare statică.

Dacă sînt satisfăcute ambele condiţii (II.351) şi (II.352), atunci se realizează o echilibrare dinamică.

Obiectivul echilibrărilor statice şi dinamice ale maselor în mişcare de rotaţie în jurul unei axe este deci o judicioasă repartizare a lor, astfel încît axa să fie o axă de simetrie.

Dacă masele în mişcare de rotaţie se află într-un singur plan, respectarea condiţiei (II.351), adică situarea centrului de greutate pe axa de rotaţie este suficientă pentru asigurarea echilibrării dinamice.

In cazul cînd masele sînt situate în diferite plane (cazul rotoarelor de motoare electrice, al arborilor cotiţi etc.), respectarea condiţiilor (II.351) şi (II.352) este neapărat necesară pentru realizarea echilibrării dinamice.

§ 31. ECHILIBRAREA MASELOR ÎN MIŞCARE DE ROTAŢIE, AFLATE ÎN ACELAŞI PLAN. AUTOECHILIBRAREA ROTORULUI DE TURBINĂ

31.1. Echilibrarea maselor în mişcare de rotaţie aflate în acelaşi plan

Problema echilibrării maselor în mişcare de rotaţie aflate în acelaşi plan se rezolvă cu ajutorul calculului şi se definitivează, după cum s-a precizat mai înainte, pe cale experimentală, pentru corectarea erorilor datorite impreciziei uzinării etc.

Deoarece masele sînt situate într-un singur plan, rezultă că pentru echilibrarea lor este suficient ca printr-o judicioasă plasare a unei mase suplimentare — numită contragreutate — să se aducă centrul de greutate al sistemului pe axa de rotaţie.

In felul acesta rezultanta tuturor forţelor centrifuge ale maselor inclusiv contragreutatea este egală cu zero, deoarece centrul lor de greutate este fix.

Matematic, problema se rezolvă după cum se arată mai jos.

Fie m_1; m_2; m_3, mase concentrate în centrele lor de greutate care se rotesc în jurul axei O (fig. II.95, a).

In mişcarea lor de rotaţie aceste mase vor dezvolta forţe centrifuge ale căror valori sînt:

$$\bar{F}_{i_1}=m_1\bar{\rho}_1\omega^2;\quad \bar{F}_{i_2}=m_2\bar{\rho}_2\omega^2;\quad \bar{F}_{i_3}=m_3\bar{\rho}_3\omega^2. \tag{a}$$

Suma acestor vectori dă vectorul rezultant:

$$-\bar{F}_{iG}=k_f(\overline{ad}). \qquad \text{(fig. II.95, } b\text{)}$$

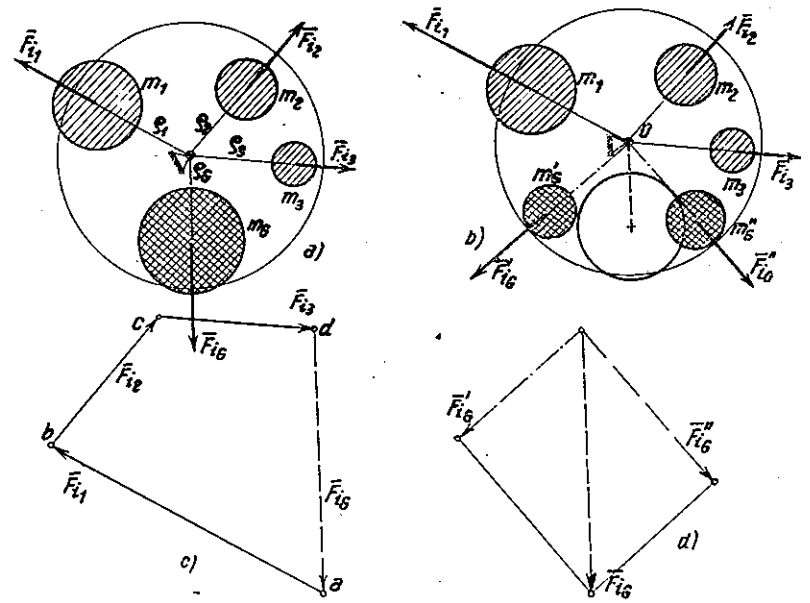


Fig. II.95. Metoda grafică de echilibrare a maselor m_1; m_2; m_3 aflate într-un plan în mişcare de rotaţie cu contragreutatea de masă m_G (fig. II.95, a) sau cu două contragreutăţi, fiecare de masă $m'_G=\frac{1}{2}m_G$ (fig. II.95, b).

Pentru a anula efectul acestei forţe centrifuge rezultante, va trebui să se plaseze pe o direcţie paralelă cu $(\overline{ad})$ şi trecînd prin O o masă m_G, astfel încît:

$$m_G\rho_G\omega^2=-k_f(\overline{ad})=\bar{F}_{i_G},$$

în care ρ_G este distanţa de la centrul de greutate al contragreutăţii m_G pînă la axa de rotaţie O.

Dacă această distanţă se alege în funcţie de gabaritul maşinii, valoarea masei contragreutăţii va fi:

$$m_G=\frac{k_f(\overline{da})}{\rho_G\omega^2}$$

sau, în kgf:

$$G_G=\frac{gk_f(\overline{da})}{\rho_G\omega^2}. \tag{II.353}$$

In formula de mai sus s-a notat:

$k_f=$ — scara forţelor din poligonul forţelor centrifuge, kgf/mm,

g — acceleraţia gravitaţiei $=9{,}8065$ ms^{-2}.

Expresia analitică a poligonului forţelor centrifuge ale maselor $m_1,\ldots,m_n$ şi a contragreutăţii G_G poate fi scrisă sub o formă vectorială foarte sugestivă.

Astfel, cu notaţiile anterioare se scrie că suma vectorială este zero, adică:

$$\bar{F}_{i_1}+\bar{F}_{i_2}+\ldots+\bar{F}_{i_n}+\bar{F}_{i_G}=0. \qquad \text{(II.354)}$$

Dacă se înlocuiesc forţele de inerţie cu valorile lor de forma (a) şi se simplifică cu $\frac{\omega^2}{g}$, se obţine:

$$G_1\bar{\rho}_1+G_2\bar{\rho}_2+\ldots+G_n\bar{\rho}_n+ +G_G\bar{\rho}_G=0. \qquad \text{(II.354')}$$

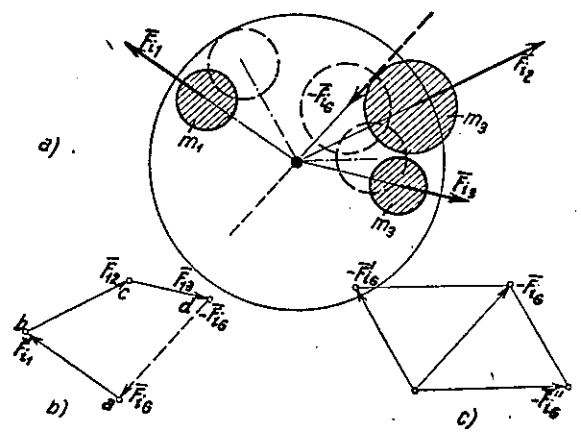


Fig. II.96. Echilibrarea maselor m_1; m_2; m_3 prin extragere de material din partea opusă poziţiei contragreutăţii.

Ecuaţia (II.354') stă la baza determinării contragreutăţii a n mase aflate în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe, pentru realizarea echilibrării.

Dacă în direcţia $\bar{\rho}_G$ rezultată din poligonul forţelor nu este posibilă plasarea contragreutăţii, aceasta se înlocuieşte cu alte două mase m'_G şi m''_G (fig. II.95, *c*) în direcţii unde este posibilă plasarea lor. Mărimea celor două mase m'_G şi m''_G se alege astfel, încît rezultanta forţelor lor de inerţie să fie egală cu cea rezultată din poligonul forţelor centrifuge, după cum uşor se poate vedea în fig. II.95, *d*.

Dacă nu este posibilă adăugarea de contragreutăţi, se poate îndepărta material de masă echivalentă contragreutăţii pe direcţia diametral opusă direcţiei rezultate din calcul (fig. II.96, *a*).

Operaţia este echivalentă adăugării unei mase negative $-m_y$ la distanţa ρ, astfel încît:

$$m_y\rho_y=m_G\rho_G.$$

Şi aici se poate scoate materialul din două direcţii diferite, astfel încît efectul să fie echivalent cu $m_y\rho_y$ (fig. II.96, *c*).

31.2. Echilibrarea rotorului de turbină dincolo de viteza de rotaţie critică

Realizarea unei echilibrări perfecte permite maşinii un mers liniştit, care la viteze foarte mari face aproape imperceptibilă mişcarea de rotaţie, datorită lipsei trepidaţiilor.

Cu toate acestea, sînt cazuri foarte numeroase cînd realizarea unei echilibrări dinamice statice este imposibilă.

Se realizează, cu alte cuvinte, plasarea maselor într-un singur plan, dar cu toate măsurile tehnice luate nu se reuşeşte ca centrul de greutate al sistemului să coincidă cu axa de rotaţie.

Astfel de cazuri se întîmplă în special la arborii rotoarelor de turbină.

Se va arăta mai jos că, deşi din punct de vedere mecanic, în acest caz, pentru orice valoare a vitezei unghiulare ω, se produc în lagărele rotorului reacţiuni suplimentare, cu atît mai mari cu cît ω este mai mare, totuşi, dacă se consideră cazul real al elasticităţii arborelui se constată că, dincolo de o anumită turaţie ω_c, trepidaţiile maşinii încep să se micşoreze, pentru ca după un anumit timp să dispară complet.

Descoperirea acestui fenomen de o însemnătate capitală pentru funcţionarea turbinelor, fenomen care realizează o autoechilibrare şi, în acelaşi timp, o corectare automată a erorilor de uzinaj şi montaj, a permis dezvoltarea rapidă a construcţiilor de maşini rotative.

Se arată mai jos demonstraţia matematică a acestui fenomen făcută de savantul ceh Stodola.

Se dă o turbină al cărei rotor este reprezentat schematic în fig. II.97.

Din cauza erorilor de uzinaj şi de montaj, centrul de greutate G se află la distanţa e de axa geometrică de rotaţie xx a turbinei.

Sub acţiunea greutăţii G a rotorului, arborele pe care este calat rotorul capătă o săgeată statică dată de expresia

$$y_s=\delta_{is}G, \qquad \text{(II.355)}$$

unde δ_{is} este coeficientul de influenţă.

Cînd rotorul capătă o viteză unghiulară ω, forţele centrifuge împreună cu greutatea G vor produce arborelui turbinei o săgeată:

$$y=\delta_{is}G', \qquad \text{(II.356)}$$

în care:

$y=y_s+y_d$ şi

y_d — săgeata dinamică;

G' — greutatea dinamică a rotorului, adică greutatea G la care se adaugă forţa datorită acceleraţiei produse de variaţia săgeţii dinamice şi de forţa centrifugă.

Forţa datorită acceleraţiei produse de variaţia săgeţii dinamice este dată de expresia clasică

$$-\frac{G}{g}\frac{d^2y_d}{dt^2}.$$

Forţa centrifugă datorită excentricităţii şi săgeţii este

$$(y+e)\frac{G}{g}\omega^2,$$

în care $y+e$ este excentricitatea centrului de greutate al rotorului faţă de axa geometrică a celor două lagăre ale sale.

G' este dat deci de relaţia:

$$G'=G-\frac{G}{g}\frac{d^2y_d}{dt^2}+(y+e)\frac{G}{g}\omega^2. \qquad \text{(II.357)}$$

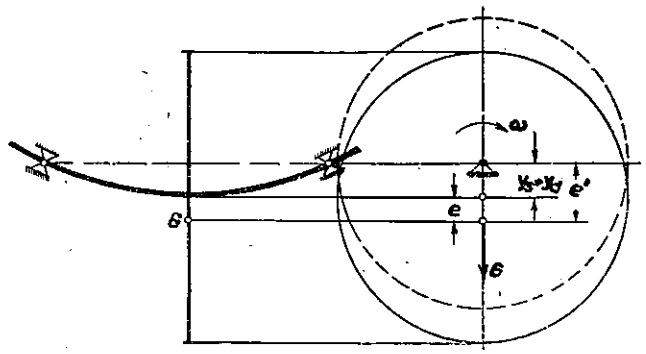


Fig. II.97. Schema rotorului în poziţia cînd centrul de greutate se află în poziţia cea mai de jos şi $\omega < \omega_c$.

Inlocuind valoarea lui G' din (II.357) în (II.356), se obţine:

$$y=y_s+y_d=\delta_{is}\left[G-\frac{G}{g}\frac{d^2y_d}{dt^2}+(y+e)\frac{G}{g}\omega^2\right].$$

Ţinînd seamă de (II.355) şi făcînd calculele, se obţine:

$$y_d=-\frac{y_s}{g}\frac{d^2y_d}{dt^2}+(y_s+y_d)\frac{y_s}{g}\omega^2+\frac{y_s}{g}\omega^2e.$$

Dacă se înmulţesc ambii membri ai ecuaţiei de mai sus cu $\frac{g}{y_s}$ şi se trec în membrul întîi toţi termenii care conţin pe y_d, rezultă:

$$\frac{d^2y_d}{dt^2}+\left(\frac{g}{y_s}-\omega^2\right)y_d=(y_s+e)\omega^2. \qquad \text{(II.358)}$$

Deoarece expresia $\frac{g}{y_s}$ are dimensiunea $[T^{-2}]$, se poate nota $\frac{g}{y_s}=\omega_c^2$, şi în acest caz ecuaţia de mai sus capătă forma:

$$\frac{d^2y_d}{dt^2}+(\omega_c^2-\omega^2)y_d=(y_s+e)\omega^2. \qquad \text{(II.359)}$$

Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale (II.359) se face în două cazuri:

Cazul a)

$$\omega<\omega_c.$$

Se notează

$$\alpha^2=\omega_c^2-\omega^2$$

şi ecuaţia devine:

$$\frac{d^2y_d}{dt^2}+\alpha^2y_d=(y_s+e)\omega^2, \qquad \text{(II.359')}$$

a cărei soluţie generală este

$$y_d=A\cos\alpha t+B\sin\alpha t+\frac{y_s+e}{\alpha^2}\omega^2.$$

Dacă se notează

$$C=\frac{B}{\cos\varphi},$$

în care

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A}{B},$$

expresia săgeţii dinamice devine:

$$y_d=C\sin(\alpha t+\varphi)+\frac{y_s+e}{\alpha^2}\omega^2. \qquad \text{(II.360)}$$

Deci, excentricitatea centrului de greutate al rotorului faţă de axa geometrică a celor două lagăre, adică

$$e'=e+y_s+y_d=C\sin(\alpha t+\varphi)+(y_s+e)\frac{\omega_c^2}{\alpha^2},$$

are o variaţie sinusoidală.

Ca urmare, în lagărele rotorului vor apărea reacţiuni suplimentare variabile atît ca mărime, cît şi ca direcţie.

Acestea sînt produse de forţa

$$F_c=(y_s+y_d+e)\frac{G}{g}\omega^2-\frac{G}{g}\frac{d^2y_d}{dt^2},$$

în care, înlocuind valorile găsite mai sus şi făcînd calculele, se obţine:

$$F_c=\left[C\sin(\alpha t+\varphi)+\frac{y_s+e}{\alpha^2}\omega^2\right]\frac{G}{g}\omega_c^2 \qquad \text{(II.361)}$$

sau

$$F_c=y_d\frac{G}{g}\omega_c^2. \qquad \text{(II.361')}$$

Cu cît ω este mai mare, cu atît forţa centrifugă F_c este mai mare.

Ea devine infinită cînd $\omega=\omega_c$, deoarece $y_d=\infty$, cu alte cuvinte apare fenomenul de rezonanţă.

Viteza unghiulară $\omega_c=\sqrt{\frac{g}{y_s}}$, la care apare acest fenomen, se numeşte viteză unghiulară critică.

Cazul b)

$$\omega > \omega_c.$$

In acest caz ecuația (II.359) se poate pune sub forma

$$\frac{d^2y_d}{dt^2} - (\omega^2 - \omega_c^2)\, y_d = (y_s + e)\, \omega^2;$$

dacă se notează

$$\omega^2 - \omega_c^2 = \beta^2,$$

se obține:

$$\frac{d^2y_d}{dt^2} - \beta^2 y_d = (y_s + e)\, \omega^2. \qquad \text{(II.362)}$$

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale este

$$y_d = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t} - \frac{y_s + e}{\beta^2}\omega^2. \qquad \text{(II.363)}$$

Deoarece în cazul $\omega > \omega_c$ se constată practic că arborele capătă o săgeată finită, rezultă că trebuie ca

$$A = 0,$$

deoarece în caz contrar după un timp foarte lung săgeata arborelui turbinei ar căpăta valori foarte mari.

Soluția rămîne deci

$$y_d = Be^{-\beta t} - \frac{y_s + e}{2}\omega^2. \qquad \text{(II.363')}$$

Termenul $Be^{-\beta t}$ scade continuu, cînd timpul t (cît rotorul se menține la viteza $\omega > \omega_c$) crește, și devine practic egal cu zero, cînd t tinde către infinit.

După un timp destul de lung de la depășirea de către rotor a turației critice ω_c, săgeata dinamică este dată de formula

$$y_d = -\frac{y_s + e}{\beta^2}\omega^2.$$

Dacă se înlocuiește β^2 și se fac calculele, se obține:

$$y_d = -\frac{y_s + e}{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}. \qquad \text{(II.364)}$$

Dacă se analizează formula de mai sus se constată că, cu cît ω este mai mare decît ω_c, cu atît termenul $\frac{\omega_c^2}{\omega^2}$ este mai mic, astfel că pentru $\omega \gg \omega_c$ se poate scrie cu suficientă exactitate:

$$y_d = -(y_s + e) \qquad \text{(II.365)}$$

sau

$$y_d + y_s + e = e' = 0. \qquad \text{(II.365')}$$

Rezultă deci că, după un timp destul de mare de la depășirea turației critice și la turații mult mai mari decît aceasta, forțele centrifuge și de inerție dezvoltate de rotorul neechilibrat static au tendința de a aduce centrul de greutate al rotorului în axa geometrică a lagărelor arborelui turbinei.

Pentru a realiza un ω_c cît mai mic arborii se fac subțiri, astfel încît săgeata statică y_s să fie relativ apreciabilă. In același timp, se alege o turație de regim ω cît mai mare posibil.

In felul acesta se ajunge la situația favorabilă a autoechilibrării maselor în mișcare de rotație.

Fenomenul din timpul apropierii trecerii prin viteza critică și a depășirii acesteia se manifestă prin trepidații violente, care ating maximul în momentul cînd $\omega = \omega_c$, după care rotorul își recapătă mersul liniștit.

Acest fenomen se observă și la motoarele electrice de mare viteză (3 000 rot/min).

§ 32. ECHILIBRAREA MASELOR IN MIȘCARE DE ROTAȚIE AFLATE IN PLANE DIFERITE

32.1. Metoda vectorială de echilibrare

In cazul general, masele în mișcare de rotație sînt situate în așa fel, încît centrele lor de greutate se află în plane paralele, perpendiculare pe axa de rotație.

Cazul cel mai specific al unei astfel de situații este la roțile cuplare și motoare ale locomotivelor de cale ferată și îndeosebi, la osiile cotite.

In cele de mai jos se va lua ca model de echilibrare un caz asemănător.

In cazul ce urmează a fi studiat, echilibrarea se va putea realiza numai dacă vor fi îndeplinite simultan cele patru condiții din (II.350). Aceste condiții impun:

$$F_i = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2} = 0$$

și

$$M_i = \sqrt{M_{ix}^2 + M_{iy}^2} = 0.$$

Numărul minim de contragreutăți — așezate în plane diferite — necesare pentru realizarea echilibrării este deci egal cu 2.

Fie, de exemplu, masele m_1; m_2; ...; m_5 ale căror centre de greutate se află la distanțele ρ_1; ρ_2; ...; ρ_5 de axa de rotație zz (fig. II.98, *a*).

Aceste mase în mișcare de rotație vor fi echilibrate atunci cînd centrul de greutate al lor se va afla pe axa de rotație care, în același timp, trebuie să fie și axă principală de inerție.

Dacă aceste două condiții nu sînt îndeplinite, va trebui realizată echilibrarea cu ajutorul a două contragreutăți plasate în două plane diferite numite plane de reducere.

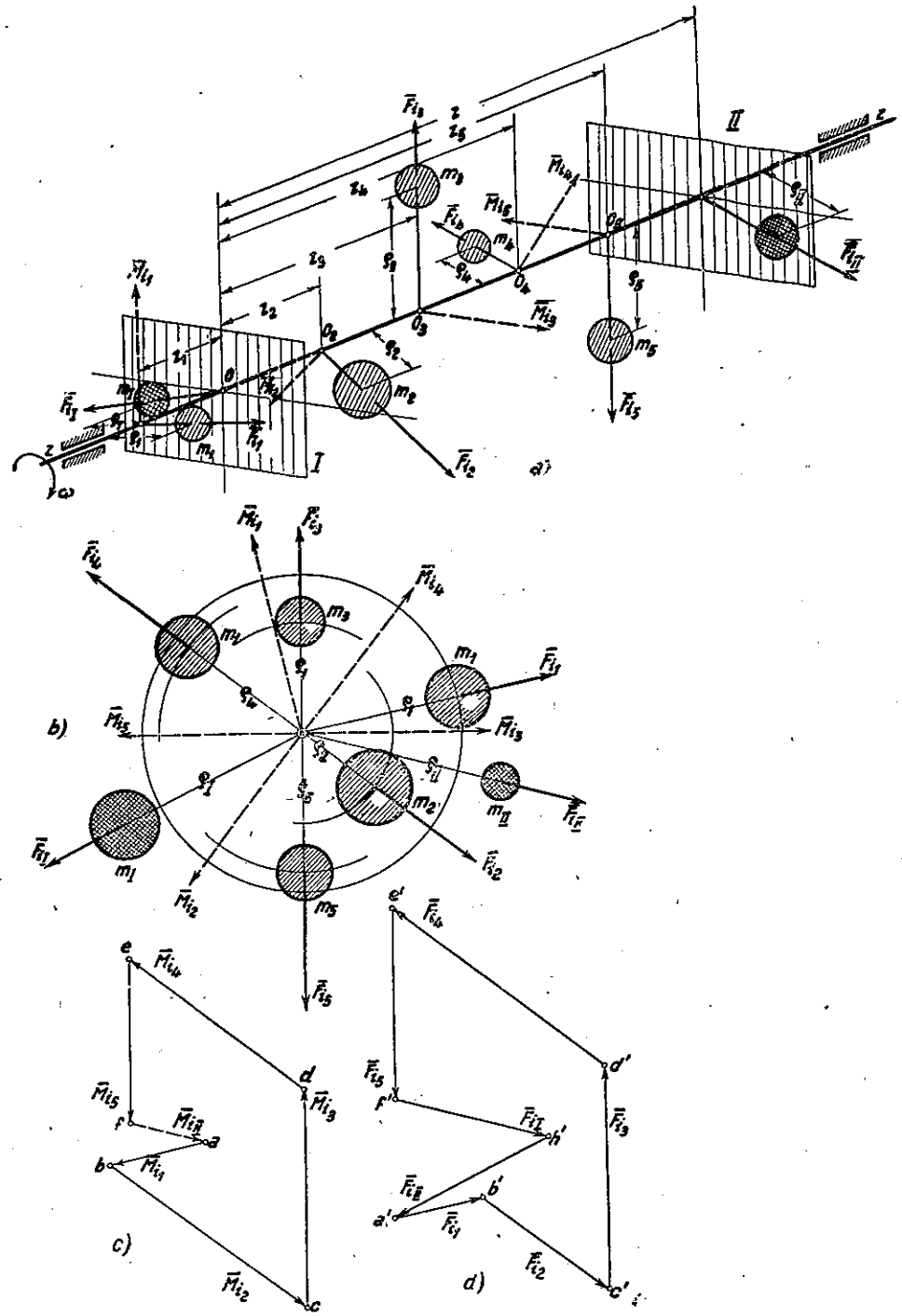


Fig. II.98. Metoda grafică de echilibrare a maselor $m_1, \ldots, m_5$, aflate în plane diferite şi în mişcare de rotaţie în jurul axei zz.

In fig. II.98, *a* aceste plane sînt notate cu *I* şi *II* şi sînt situate la distanţa z unul de altul. In cazul locomotivelor această distanţă poate fi şi ecartamentul căii.

Planul *I* se ia drept plan de referinţă, faţă de care se măsoară distanţele z_1 ; z_2 ; ... ; z_5 la care se află situate centrele de greutate ale maselor m_1 ; m_2 ; ... ; m_5.

Originea axelor de coordonate se ia punctul O aflat în planul *I* pe axa de rotaţie zz.

Cele două condiţii de echilibrare dinamică se traduc matematic prin două ecuaţii vectoriale.

Prima rezultă din suma vectorilor forţelor centrifuge ale maselor m_1 ; m_2 ; ... ... ; m_5 şi a celor două contragreutăţi (necunoscute încă). Această sumă trebuie să fie egală cu zero, adică:

$$\overline{F}_{i_1}+\overline{F}_{i_2}+\ldots+\overline{F}_{i_5}+\overline{F}_{i_I}+\overline{F}_{i_{II}}=0, \qquad \text{(II.366)}$$

în care

$$\overline{F}_{i_1}=m_1\bar{\rho}_1\omega^2; \quad \overline{F}_{i_2}=m_2\bar{\rho}_2\omega^2; \ldots; \overline{F}_{i_5}=m_5\bar{\rho}_5\omega^2;$$

$$\overline{F}_{i_I}=m_I\bar{\rho}_I\omega^2; \quad \overline{F}_{i_{II}}=m_{II}\bar{\rho}_{II}\omega^2.$$

Inlocuind aceste valori în ecuaţia de mai sus şi făcînd reducerile, se obţine

$$G_1\bar{\rho}_1+G_2\bar{\rho}_2+\ldots+G_5\bar{\rho}_5+G_I\bar{\rho}_I+G_{II}\bar{\rho}_{II}=0. \qquad \text{(II.366')}$$

A doua ecuaţie de echilibru rezultă din condiţia ca suma momentelor vectorilor $\overline{F}_{i_1}$; $\overline{F}_{i_2}$; ... ; $\overline{F}_{i_5}$; $\overline{F}_{i_I}$ şi $\overline{F}_{i_5}$ în raport cu punctul O aflat în planul de reducere *I* să fie egală cu zero, adică:

$$\bar{z}_1\times\overline{F}_{i_1}+\bar{z}_2\times\overline{F}_{i_2}+\ldots+\bar{z}_5\times\overline{F}_{i_5}+\bar{z}\times\overline{F}_{i_{II}}=0. \qquad \text{(II.367)}$$

(Evident că în ecuaţia de mai sus momentul lui $\overline{F}_{i_I}$ în raport cu punctul O este zero).

Inlocuind valorile lui $\overline{F}_{i_1}, \ldots, \overline{F}_{i_5}$ în ecuaţia de mai sus şi făcînd reducerile, se obţine:

$$G_1\bar{z}_1\times\bar{\rho}_1+G_2\bar{z}_2\times\bar{\rho}_2+\ldots+G_5\bar{z}_5\times\bar{\rho}_5+G_{II}\bar{z}\times\bar{\rho}_{II}=0. \qquad \text{(II.367')}$$

Vectorii axiali din ecuaţia (II.367) sau (II.367') sînt perpendiculari pe vectorii forţelor centrifuge corespunzători, după cum uşor se poate constata din fig. II.98, *a* şi II.98, *b*.

Sensul lor este determinat de regula şurubului drept.

Determinarea mărimii celor două contragreutăţii se face acum în felul următor.

Deoarece în ecuaţia (II.367) nu există decît un singur termen necunoscut, şi anume $\bar{z}\times\overline{F}_{i_{II}}$ sau $G_{II}\bar{z}\times\bar{\rho}_{II}$, se va construi întîi acest poligon al vectorilor.

Pentru ca vectorul de închidere al poligonului, adică $\frac{\omega^2}{g} G_{II}\bar{z} \times \bar{\rho}_{II}$ să dea adevărata direcţie a lui $\bar{\rho}_{II}$, şi deci poziţia corectă a centrului de greutate al lui G_{II}, se vor roti toţi vectorii ecuaţiei (II.367) cu 90° în sensul invers acelor de ceasornic.

In felul acesta toţi vectorii de forma $\frac{\omega^2}{g} G_j \bar{z}_j \times \bar{\rho}_j$ situaţi la dreapta planului de reducere I vor avea acelaşi sens cu forţele centrifuge corespunzătoare, iar cei situaţi la stînga vor avea sensul opus forţelor centrifuge corespunzătoare.

Se construieşte poligonul momentelor forţelor centrifuge, calculînd valorile tuturor vectorilor din ecuaţia (II.367) şi trasîndu-i la scara k_M într-un plan separat (fig. II.98, *c*).

Astfel, din punctul a, ales arbitrar în plan, se duc:

$$(\overline{ab}) = \frac{\omega^2 G_1 \bar{z}_1 \times \bar{\rho}_1}{g k_M}; \quad (\overline{bc}) = \frac{\omega^2 G_2 \bar{z}_2 \times \bar{\rho}_2}{g k_M}; \quad (\overline{cd}) = \frac{\omega^2 G_3 \bar{z}_3 \times \bar{\rho}_3}{g k_M};$$

$$(\overline{de}) = \frac{\omega^2 G_4 \bar{z}_4 \times \bar{\rho}_4}{g k_M} \quad \text{şi} \quad (\overline{ef}) = \frac{\omega^2 G_5 \bar{z}_5 \times \bar{\rho}_5}{g k_M}.$$

Linia de închidere a acestui poligon dă, la scara k_M, tocmai al şaselea termen al ecuaţiei vectoriale (II.367), adică:

$$\frac{\omega^2}{g} G_{II}\bar{z} + \bar{\rho}_{II} = k_M (\overline{fa}). \tag{II.368}$$

Se determină astfel direcţia şi sensul lui ρ_{II}, care, conform convenţiei de rotire făcută la început, sînt date de direcţia şi sensul lui $(\overline{fa})$.

Deoarece mărimea lui z este dată, se alege poziţia centrului de greutate al lui G_{II} (deci mărimea lui ρ_{II}).

In acest caz, mărimea contragreutăţii este

$$G_{II} = k_M \frac{(\overline{fa})}{z\rho_{II}} \frac{g}{\omega^2}. \tag{II.368'}$$

După determinarea contragreutăţii G_{II}, se poate trece la construirea celui de-al doilea poligon, poligonul forţelor centrifuge dat de ecuaţia vectorială (II.366), unde acum singura necunoscută este $\bar{F}_i = \frac{G_I}{g} \bar{\rho}_I \omega^2$ (fig. II.97, *d*).

Dintr-un punct a, ales arbitrar în plan, se duc:

$$(\overline{a'b'}) = \frac{\omega^2 G_1 \bar{\rho}_1}{g k_F}; \quad (\overline{b'c'}) = \frac{\omega^2 G_2 \bar{\rho}_2}{g k_F}; \quad (\overline{c'd'}) = \frac{\omega^2 G_3 \bar{\rho}_3}{g k_F};$$

$$(\overline{d'e'}) = \frac{\omega^2 G_4 \bar{\rho}_4}{g k_F}; \quad (\overline{e'f'}) = \frac{\omega^2 G_5 \bar{\rho}_5}{g k_F}; \quad (\overline{f'h'}) = \frac{\omega^2 G_{II} \bar{\rho}_{II}}{g k_F}.$$

Linia de închidere a acestui poligon, dă la scara k_F:

$$\frac{\omega^2}{g} G_I \bar{\rho}_I = k_F (\overline{h'a'}). \tag{II.369}$$

Direcţia şi sensul lui $\bar{\rho}_I$ sînt astfel determinate de direcţia şi sensul lui $(\overline{h'a'})$.

Dacă se alege valoarea lui $\bar{\rho}_I$, mărimea contragreutăţii este dată de expresia

$$G_I = k_F \frac{(\overline{h'a'})}{\rho_I} \frac{g}{\omega^2}. \tag{II.369'}$$

Şi în acest caz, la fel ca şi la echilibrarea maselor aflate într-un singur plan, se pot monta în loc de două, patru contragreutăţi, în direcţia în care este permisă plasarea lor, operaţia fiind făcută în fiecare dintre planele de reducere I şi II, aşa cum este arătat în fig. II.96, *a* şi *b*.

De asemenea, în loc de a monta contragreutăţi, se pot îndepărta din părţile diametral opuse determinate de formulele (II.368) şi (II.369) cantităţi de material egale în greutate cu G_{II}, respectiv G_I.

32.2. Metoda scalară de echilibrare

Echilibrarea maselor în mişcare de rotaţie aflate în plane diferite este o operaţie care necesită un volum mare de lucru şi o deosebită atenţie la calcule.

Prima dificultate care trebuie învinsă este determinarea centrelor de greutate ale diferitelor mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Practic, calculul se face scalar, fiecare dintre ecuaţiile (II.366) şi (II.367) fiind echivalente cu cîte două ecuaţii scalare.

Sistematizarea calculului se face de asemenea prin determinarea contragreutăţilor necesare echilibrării prin două contragreutăţi plasate în planele I şi II, a fiecăreia dintre masele $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Această metodă se utilizează aproape exclusiv la echilibrarea roţilor motoare şi cuplare la locomotive.

Fie, astfel (fig. II.99):

α_j — unghiul pe care-l face masa m_j cu axa Ox;

ρ_{jx}, ρ_{jy} — distanţele centrului de greutate al masei m_j pînă la planele yOz, respectiv xOz;

z_j — distanţa aceluiaşi centru de greutate pînă la planul xOy;

ρ — distanţa pînă la axa de rotaţie zz a centrelor de greutate ale contragreutăţilor, plasate în planele de reducere I şi II.

Cele două contragreutăţi plasate în planele I şi II care vor echilibra masa m_j, cum şi aceasta din urmă, se vor afla în planul $\pi(OO_j m_j)$, care face cu planul xOz unghiul α_j.

Valorile celor două contragreutăţi:

m'_j — aflată în planul de reducere I şi

m''_j — aflată în planul de reducere II

rezultă din aplicarea ecuaţiei (II.367'), scrisă pentru fiecare dintre cele două plane de reducere.

Astfel, masa contragreutăţii m''_j se deduce din ecuaţia

$$m''_j z\rho = m_j z_i \rho_j,$$

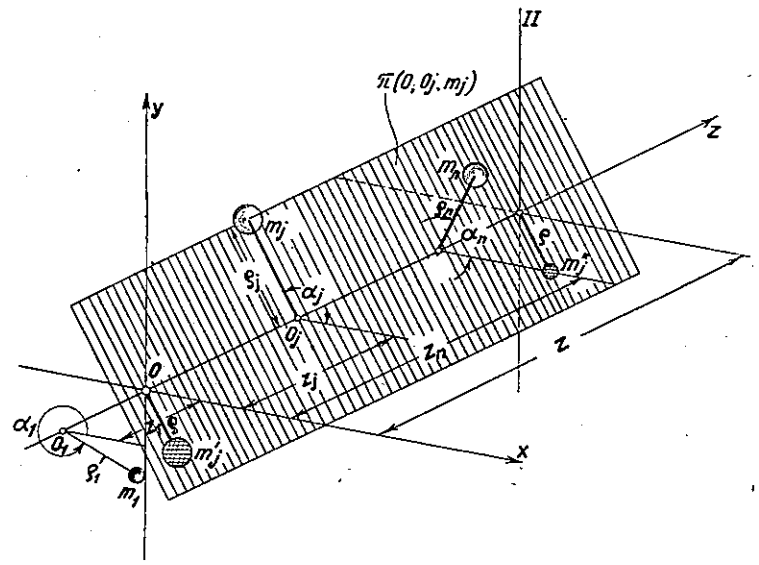


Fig. II.99. Metoda scalară de echilibrare a maselor $m_1, \ldots, m_j, \ldots, m_n$ în mişcare de rotaţie prin cîte două contragreutăţi m_j'; m_j'' aflate în planele de reducere *I* şi *II*.

de unde:

$$m_j''=\frac{z_j}{z}\cdot\frac{\rho_j}{\rho}\cdot m_j, \tag{II.370}$$

iar a contragreutăţii m_j' se deduce din ecuaţia

$$m_j' z\rho=(z-z_j)\,\rho_j m_j,$$

de unde:

$$m_j'=\frac{z-z_j}{z}\cdot\frac{\rho_j}{\rho}\,m_j. \tag{II.371}$$

Formulele (II.370)—(II.371) se pot scrie:

$$G_j'=\frac{\rho_j}{\rho}\cdot\frac{z-z_j}{z}\,G_j\ \text{[kg]}; \tag{II.370'}$$

$$G_j''=\frac{\rho_j}{\rho}\cdot\frac{z_j}{z}G_j\ \text{[kg]}. \tag{II.371'}$$

Dacă se consideră valorile date de formulele de mai sus ca vectori orientaţi după direcţiile lui $\bar{\rho}_j$, mărimea vectorială a rezultantei tuturor contragreutăţilor va fi evident:

$$\begin{aligned}&\text{în planul de reducere } I \quad \bar{G}_I=\sum_{j=1}^{n}\bar{G}_j';\\ &\text{în planul de reducere } II \quad \bar{G}_{II}=\sum_{j=1}^{n}\bar{G}_j''.\end{aligned} \tag{II.372}$$

Valoarea celor două contragreutăţi şi direcţia lor se află fie vectorial, fie scalar.

Astfel, cu notaţiile din fig. II.99, componentele pe axele *Ox* şi *Oy* ale lui G_I sînt:

$$\begin{aligned}G_{Ix}&=\sum_{j=1}^{n}G_j'\cos\alpha_j;\\ G_{Iy}&=\sum_{j=1}^{n}G_j'\sin\alpha_j.\end{aligned} \tag{II.373}$$

Din (II.373) rezultă:

$$G_I=\sqrt{G_{Ix}^2+G_{Iy}^2}. \tag{II.374}$$

Unghiul pe care direcţia centrului de greutate îl face cu axa *Ox* se obţine cu formula

$$\operatorname{tg}\alpha_I=\frac{G_{Iy}}{G_{Ix}}. \tag{II.375}$$

Formulele analoge dau mărimea şi poziţia contragreutăţii aflată în planul de reducere *II*:

$$\begin{aligned}G_{IIx}&=\sum_{j=1}^{n}G_j''\cos\alpha_j;\\ G_{IIy}&=\sum_{j=1}^{n}G_j''\sin\alpha_j;\end{aligned} \tag{II.373'}$$

$$G_{II}=\sqrt{G_{IIx}^2+G_{IIy}^2}; \tag{II.374'}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{II}=\frac{G_{IIy}}{G_{IIx}}. \tag{II.375'}$$

32.3. Aplicaţie

Să se echilibreze osia motoare nr. 1 a locomotivei seria 301 (fig. II.100).

Locomotiva din parcul C.F.R. cu seria 301 are patru cilindri: doi exteriori şi doi interiori.

Bielele motoare ale cilindrilor interiori acţionează asupra osiei motoare nr. 1, iar cele ale cilindrilor exteriori, asupra osiei motoare 2.

Problema care trebuie rezolvată este echilibrarea forţelor centrifuge dezvoltate de masele neechilibrate ale arborelui cotit, ale manivelelor, butoanelor de manivelă şi ale părţilor din masele bielelor cuplare care se repartizează pe cele două butoane cuplare ale osiei (fig. II.100).

Masele în mişcare de rotaţie neechilibrate şi care trebuie deci echilibrate prin cele două contragreutăţi plasate în planele mediane ale celor două roţi sînt:

1. *Masele reduse ale bielelor cuplare* a căror greutate se notează cu G_1 (pentru fiecare parte a osiei motoare), care se repartizează pe butoanele cuplare exterioare. Cele două butoane sînt plasate după cum urmează: cel de pe roata stîngă a locomotivei — în planul vertical $\alpha_1=90°$, iar cel de pe roata dreaptă — în planul orizontal cu $\alpha_1=0°$.

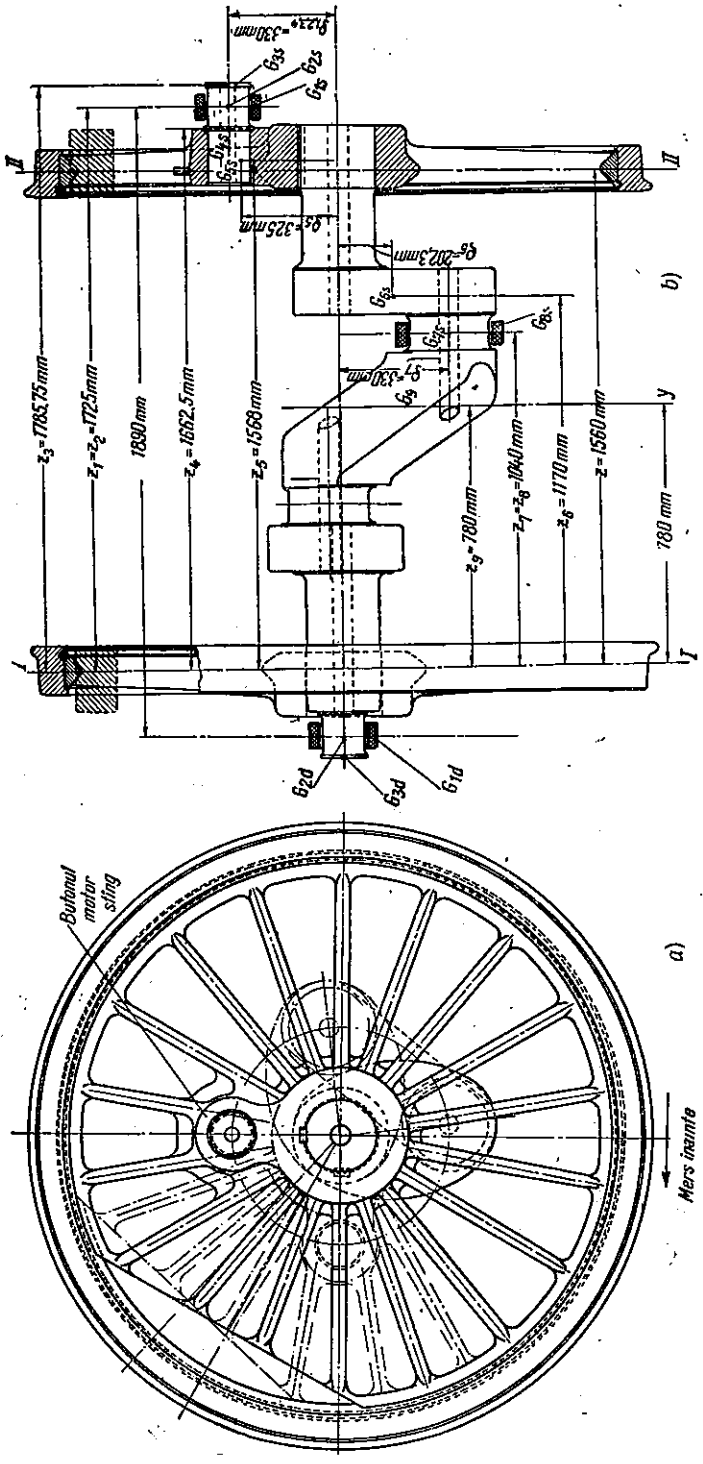


Fig. II.100. Osia motoare cotită nr. 1 a locomotivei seria 301 din parcul C.F.R. și repartizarea greutăților $G_1 \ldots G_9$.

Din calcul rezultă

$$G_{1s}=G_{1d}=62{,}1 \text{ kg}.$$

Centrul de greutate al acestor greutăți față de axul de rotație zz și de planul de reducere I al roții din dreapta a locomotivei are coordonatele (fig. II.100, *b*):

$$\rho_1=330 \text{ mm}; \quad z_{1s}=1\,725 \text{ mm}; \quad z_{1d}=-165 \text{ mm}.$$

2. *Masele butoanelor cuplare exterioare,* a căror greutate se notează cu G_2.

Din calcul rezultă

$$G_{2s}=G_{2d}=11{,}55 \text{ kg},$$

iar centrul de greutate are coordonatele:

$$\rho_2=330 \text{ mm}; \quad z_{2s}=1\,725 \text{ mm}; \quad z_{2d}=-165 \text{ mm}.$$

G_{1d} și G_{2d} sînt decalați cu 90° față de G_{1s} și G_{2s}.

3. *Masele rozetelor din exteriorul butoanelor cuplare,* a căror greutate se notează cu G_3.

Din calcul rezultă

$$G_{3s}=G_{3d}=1{,}865 \text{ kg},$$

iar centrele de greutate au coordonatele:

$$\rho_3=330 \text{ mm}; \quad z_{3s}=1\,785{,}75 \text{ mm}; \quad z_{3d}=-225{,}75 \text{ mm}.$$

4. *Masele rozetelor din interiorul butoanelor cuplare* care le racordează cu corpul manivelei. Greutatea fiecăreia dintre ele se notează cu G_4.

Datele necesare pentru calcul sînt:

$$G_{4s}=G_{4d}=0{,}692 \text{ kg}; \quad \rho_4=330 \text{ mm}; \quad z_{4s}=1\,662{,}5 \text{ mm}; \quad z_{4d}=-102{,}5 \text{ mm}.$$

5. *Masele manivelelor exterioare* aflate pe roțile osiei. Calculul greutății acestora se face prin desenarea uneia dintre manivele la o scară cît mai potrivită (eventual chiar la scara 1 : 1), după care se împarte masa acesteia în elemente de volum de forme geometrice simple.

Greutatea reală a unei manivele se notează cu G_5.

Din calculul făcut rezultă:

$$G_{5s}=G_{5d}=50{,}2 \text{ kg}; \quad \rho_5=325 \text{ mm}; \quad z_{5s}=1\,568 \text{ mm}; \quad z_{5d}=-8 \text{ mm}.$$

Greutatea manivelei raportată la raza ρ_1 a manivelei este evident

$$G_{5r}=G_5\frac{\rho_5}{\rho_1}=50{,}2\times\frac{325}{330}=49{,}4 \text{ kg}.$$

Greutățile $G_{1s}, \ldots, G_{5s}$ se află astfel în planul vertical, iar greutățile $G_{1d}, \ldots, G_{5d}$ — în planul orizontal (fig. II.100, *a*).

6. *Masele manivelelor motoare interioare.* Forma acestor manivele este eliptică (v. fig. II.101).

Greutatea reală a manivelei se notează cu G_6.

Din calcul rezultă:

$$G_{6s}=G_{6d}=166 \text{ kg}; \quad \rho_6=202{,}3 \text{ mm};$$

$$z_{6s}=1\,170 \text{ mm}; \quad z_{6d}=390 \text{ mm}.$$

Greutatea manivelei raportată la raza ρ_1 a manivelei exterioare este

$$G_{6r}=G_6\frac{\rho_6}{\rho_1}=166\times\frac{202{,}3}{330}=101{,}76 \text{ kg}.$$

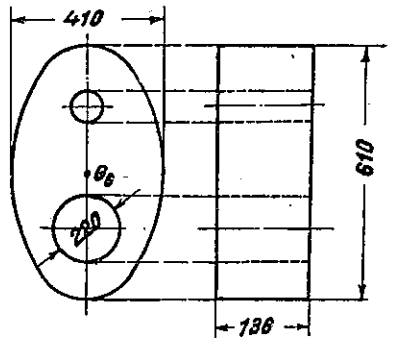


Fig. II.101. Manivela motoare interioară a osiei motoare nr. 1 a locomotivei seria 301 din parcul C.F.R.

Cele două manivele motoare interioare fac între ele un unghi de 90°, ρ_6 al butonului cuplar din stînga face cu orizontala un unghi $\alpha_6=83°20'$.

7. *Masele butoanelor motoare interioare*, a căror greutate se notează cu G_7.

Observînd că acestea sînt goale în interior, diametrul găurii fiind 60 mm, rezultă ușor greutatea unui buton:

$$G_{7s}=G_{7d}=40 \text{ kg}.$$

Celelalte date sînt:

$$\rho_7=330 \text{ mm}; \quad z_{7s}=1\,040 \text{ mm}; \quad z_{7d}=520 \text{ mm}.$$

8. *Masele repartizate pe butoanele motoare interioare ale bielelor motoare interioare*, ai căror greutate se notează cu G_8.

O formulă care dă valoarea în kg a greutății masei bielei ce se repartizează pe butonul motor interior este

$$G_8=g\frac{I}{l^2},$$

în care:

I este momentul de inerție al bielei în raport cu axa butonului motor;

l — lungimea bielei motoare interioare.

Inlocuind, se obține:

$$G_{8s}=G_{8d}=9{,}81\frac{51{,}8}{2{,}1^2}=115{,}6 \text{ kg}.$$

Celelalte date sînt:

$$\rho_8=330 \text{ mm}; \quad z_{8s}=1\,040 \text{ mm}; \quad z_{8d}=520 \text{ mm}.$$

Direcțiile ρ ale greutăților G_{6s}; G_{7s} și G_{8s} fac cu axa Ox un unghi $\alpha_6=83°20'$, iar cele aflate în jumătatea dreaptă a osiei (G_{6d}; G_{7d} și G_{8d}), un unghi $\alpha_6=186°40'$.

9. *Masa brațului cotit*, a cărui greutate reală se notează cu G_9.

Forma lui este redată schematic în fig. II.102.

Calculînd G_9, se găsește:

$$G_9=378{,}25 \text{ kg}.$$

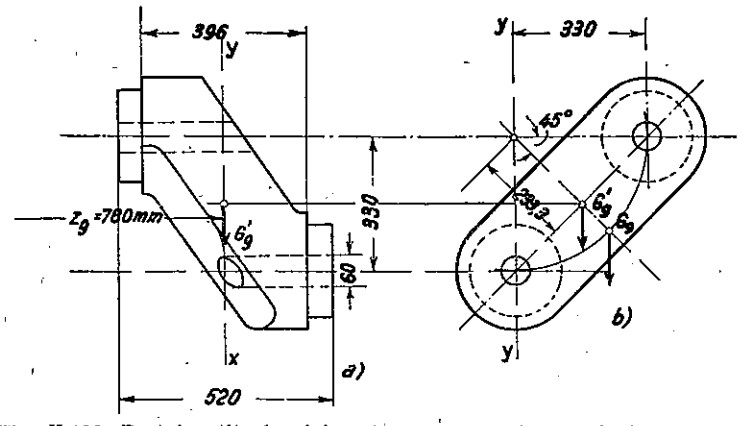


Fig. II.102. Brațul cotit al osiei motoare nr. 1 a locomotivei seria 301.

Centrul de greutate se află în planul median al locomotivei (fig. II.102, *a*) și pe o direcție care face 45° cu raza vectoare a centrului butonului de manivelă interior (fig. II.102, *b*).

Deci, $\rho_9=\rho_1\cos 45°=233{,}3$ mm și $z_9=780$ mm.

Unghiul pe care ρ_9 îl face cu axa Ox este $\alpha_9=180°+6°40'+45°=231°40'$.

Greutatea brațului raportată la raza ρ_1 a manivelei este deci

$$G_{9r}=G_9\frac{\rho_9}{\rho_1}=G_9\cos 45°=267{,}4 \text{ kg}.$$

Determinarea contragreutăților pentru echilibrarea fiecăreia dintre masele $m_1,\ldots,m_9$.

Planele de reducere sînt situate în planele mediane ale celor două roți.

Planul de reducere *I* corespunde roții din dreapta (adică din partea stîngă cum se privește desenul II.100, deoarece osia este desenată văzută din față, adică dinspre cilindri).

Planul de reducere *II* corespunde roții din stînga (dreapta în desen).

Pentru determinarea grupelor de contragreutăți care echilibrează fiecare dintre masele calculate mai sus se folosesc formulele (II.370′) și (II.371′).

Pentru sistematizarea calculului s-a întocmit tabela II.10, unde în coloanele 9 și 11 s-au înscris formulele de mai sus sub forma

$$G'_j=\frac{z-z_j}{z}G_{jr}, \quad \text{respectiv} \quad G''_j=\frac{z_j}{z}G_{jr},$$

unde

$$G_{jr}=\frac{\rho_j}{\rho}G_j \text{ sînt calculate mai sus.}$$

In coloana 2 a tabelei II.10 s-au trecut masele neechilibrate începînd cu masele mai depărtate de planul de reducere *I* al roții din dreapta, notîndu-se cu indicele *s* toate masele care se află în jumătatea stîngă a osiei motoare și cu indicele *d* cele aflate în jumătatea dreaptă.

Astfel, m_{1s} este masa redusă a bielelor cuplare din partea stîngă a locomotivei, care se repartizează pe butonul cuplar stîng, în timp ce m_{1d} are aceeași semnificație, dar pentru butonul cuplar drept. La fel s-a procedat și pentru notarea greutăților.

In coloana 3 s-au trecut greutățile reale calculate ale maselor, iar în coloana 4 — distanțele ρ_j de la axa zz a osiei pînă la centrul de greutate al greutăților G_j.

In coloana 5 s-au trecut greutățile reduse la raza butonului de manivelă $\rho_1=330$ mm.

In coloanele 6 și 7 s-au trecut valorile lui z_j și α_j determinate mai înainte.

In coloanele 9 și 11 s-au trecut valorile celor două contragreutăți G'_j, respectiv G''_j, care echilibrează greutățile G_{jr}, iar în coloanele 10, respectiv 12, unghiurile pe care le fac razele vectoare ale acestor contragreutăți cu axa Ox.

Din tabelă (coloanele 10 și 12) se vede că cele 17 contragreutăți calculate se pot concentra în 5 grupe, situate pe direcții diferite.

Astfel, în planul de reducere *II* (roata stîngă) vor exista următoarele contragreutăți:

$$Q''_1=G''_{1s}+G''_{2s}+G''_{3s}+G''_{4s}+G''_{5s}=68{,}680+12{,}772+2{,}133+0{,}734+49{,}650;$$

$$Q''_1=133{,}97 \text{ kg} \quad \text{cu} \quad \alpha''_1=270°;$$

$$Q''_2=G''_{6s}+G''_{7s}+G''_{8s}=76{,}310+26{,}664+77{,}000=179{,}974 \text{ kg} \quad \text{cu} \quad \alpha''_2=96°40';$$

$$Q''_3=G''_9=133{,}700 \text{ kg} \quad \text{cu} \quad \alpha''_3=51°40';$$

$$Q''_4=G''_{8d}+G''_{7d}+G''_{6d}=38{,}600+13{,}336+25{,}450=77{,}386 \text{ kg} \quad \text{cu} \quad \alpha''_4=6°40';$$

$$Q''_5=G''_{5d}+G''_{4d}+G''_{3d}+G''_{2d}+G''_{1d}=0{,}250+0{,}042+0{,}268+1{,}222+6{,}570;$$

$$Q''_5=8{,}352 \text{ kg} \quad \text{cu} \quad \alpha''_5=0°.$$

Tabela II.10. Calculul contragreutăţilor la osia motoare 1 a locomotivei seria 301

	Masa neechilibrată								Mărimea contragreutăţilor			
									din planul I (dreapta)		din planul II (stînga)	
	Denumirea	Simbol	Greutatea reală G_j kg	ϱ_j mm	Greutatea redusă la raza ϱ=330 mm $G_{jr}=\frac{\varrho_j}{\varrho}G_j$ kg	Distanţa de la planul de reducere I z_j mm	α_j	Distanţa dintre planele de reducere z mm	$G'_j=\frac{z-z_j}{z}G_{jr}$ kg	α'_j	$G''_j=\frac{z_j}{z}G_{jr}$ kg	α''_j
1	2	2a	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Jumătatea din stînga a osiei motoare 1	Masa bielei cuplare, repartizată pe butonul exterior stîng	m_{1s}	62,100	330	62,100	1 725	90°	1 560	6,570	90°	68,680	270°
	Butonul cuplar exterior stîng	m_{2s}	11,500	330	11,500	1 725	90°	1 560	1,222	90°	12,772	270°
	Rozeta exterioară a butonului stîng	m_{3s}	1,865	330	1,865	1 785,75	90°	1 560	0,268	90°	2,133	270°
	Rozeta interioară a butonului stîng	m_{4s}	0,692	330	0,692	1 662,5	90°	1 560	0,042	90°	0,734	270°
	Manivela exterioară a roţii stîngi	m_{5s}	50,200	325	49,400	1 568	90°	1 560	0,250	90°	49,650	270°
	Manivela motoare interioară stîngă	m_{6s}	166,000	202,3	101,760	1 170	−83°20′	1 560	25,450	96°40′	76,310	96°40′
	Butonul motor interior stîng	m_{7s}	40,000	330	40,000	1 040	−83°20′	1 560	13,336	96°40′	26,664	96°40′
	Masa bielei motoare stînga, repartizată pe butonul interior stîng	m_{8s}	115,600	330	115,600	1 040	−83°20′	1 560	38,600	96°40′	77,000	96°40′
	Braţul cotit	m_9	378,250	233,3	267,400	780	231°40′	1 560	133,700	51°40′	133,700	51°40′

	Masa neechilibrată								Mărimea contragreutăţilor			
									din planul I (dreapta)		din planul II (stînga)	
	Denumirea	Simbol	Greutatea reală G_j kg	ϱ_j mm	Greutatea redusă la raza ϱ=3.0 mm $G_{jr}=\frac{\varrho_j}{\varrho}G_j$ kg	Distanţa de la planul de reducere I z_j mm	α_j	Distanţa dintre planele de reducere z mm	$G'_j=\frac{z-z_j}{z}G_{jr}$ kg	α'_j	$G''_j=\frac{z_j}{z}G_{jr}$ kg	α''_j
1	2	2a	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Jumătatea din dreapta	Masa bielei motoare dreapta, repartizată pe butonul interior drept	m_{8d}	115,600	330	115,600	520	186°40′	1 560	77,000	6°40′	38,600	6°40′
	Butonul motor interior drept	m_{7d}	40,000	330	40,000	520	186°40′	1 560	26,664	6°40′	13,336	6°40′
	Manivela motoare interioară dreapta	m_{6d}	166,000	202,3	101,760	390	186°40′	1 560	76,310	6°40′	25,450	6°40′
	Manivela exterioară a roţii din dreapta	m_{5d}	50,200	325	49,400	−8	0°	1 560	49,650	180°	0,250	0°
	Rozeta interioară a butonului exterior din dreapta	m_{4d}	0,692	330	0,692	−102,5	0°	1 560	0,734	180°	0,042	0°
	Rozeta exterioară a butonului din dreapta	m_{3d}	1,865	330	1,865	−225,75	0°	1 560	2,133	180°	0,268	0°
	Butonul cuplar exterior din dreapta	m_{2d}	11,550	330	11,550	−165	0°	1 560	12,772	180°	1,222	0°
	Masa bielei cuplare, repartizată pe butonul exterior dreapta	m_{1d}	62,100	330	62,100	−165	0°	1 560	68,630	180°	6,570	0°

BIBLIOTECA TEHNICĂ

In planul de reducere I (roata dreaptă) se obține analog:

$$Q'_1=G'_{1s}+G'_{2s}+G'_{3s}+G'_{4s}+G'_{5s}=8{,}352 \text{ kg} \quad \text{cu} \quad \alpha'_1=90°;$$

$$Q'_2=G'_{6s}=G'_{7s}+G'_{8s}=77{,}386 \text{ kg} \quad \text{cu} \quad \alpha'_2=96°40';$$

$$Q'_3=G'_9=133{,}700 \text{ kg} \quad \text{cu} \quad \alpha'_3=51°40';$$

$$Q'_4=G'_{8d}+G'_{7d}+G'_{6d}=179{,}974 \text{ kg} \quad \text{cu} \quad \alpha'_4=6°40';$$

$$Q'_5=G'_{5d}+G'_{4d}+G'_{3d}+G'_{2d}+G'_{1d}=133{,}97 \text{ kg} \quad \text{cu} \quad \alpha'_5=180°.$$

(Indicii s și d de la contragreutățile G'_j și G''_j arată partea spre care se află greutatea pe care o echilibrează).

In fig. II.103, *a* este desenată în perspectivă situația contragreutăților cu cele două plane de reducere, iar în fig. II.103, *b* și II.103, *c* — situația acestora proiectate pe un plan perpendicular pe axul osiei motoare.

Greutățile rezultante ale celor două contragreutăți se calculează folosind formulele (II.373), (II.374) și (II.375).

Astfel, pentru contragreutatea de pe roata din dreapta se obține, observînd fig. II.103, *b*:

$$Q_{Ix}=\sum_1^5 Q'_j \cos\alpha_j=Q'_1\cos 90°+Q'_2\cos 96°40'+Q'_3\cos 51°40'+Q'_4\cos 6°40'+Q'_5\cos 180°=$$

$$=-77{,}386\sin 6°40'+133{,}70\cos 51°40'+179{,}974\cos 6°40'-133{,}37$$

$$Q_{Ix}=118{,}5 \text{ kg};$$

$$Q_{Iy}=\sum_1^5 Q'_j \sin\alpha_j=8{,}352\sin 90°+77{,}386\sin 96°40'+133{,}70\sin 51°41'+179{,}974\sin 6°40'+$$

$$+133{,}97\sin 180°=8{,}352+77{,}386\cos 6°40'+133{,}70\sin 51°41'+179{,}974\sin 6°40'$$

$$Q_{Iy}=211{,}2 \text{ kg}.$$

De aici rezultă

$$Q_I=\sqrt{Q_{Ix}^2+Q_{Iy}^2}=\sqrt{118{,}5^2+211{,}2^2}=242 \text{ kg},$$

iar unghiul pe care-l face cu axa Ox este dat de relația

$$\operatorname{tg}\alpha_I=\frac{Q_{Iy}}{Q_{Ix}}=\frac{211{,}2}{118{,}5}=1{,}7822,$$

de unde

$$\alpha_I=60°42'10''.$$

Contragreutatea de pe roata din stînga se obține analog, folosind schema din fig. II.103, *c*.

Astfel,

$$Q_{IIx}=\sum_1^5 Q''_j \cos\alpha_j=133{,}97\cos 270°+179{,}974\cos 96°40'+133{,}700\cos 51°40'+$$

$$+77{,}386\cos 6°40'+8{,}352\cos 0°=-179{,}974\sin 6°40'+133{,}700\cos 51°40'+$$

$$+77{,}386\cos 6°40'+8{,}352;$$

$$Q_{IIx}=147{,}6 \text{ kg};$$

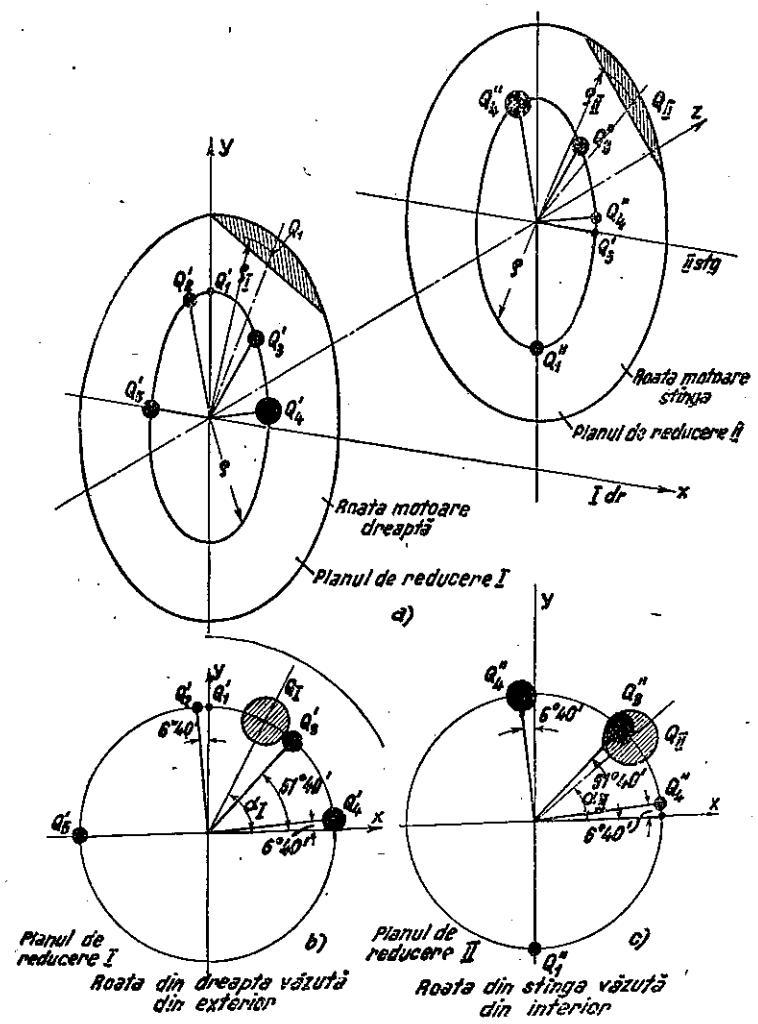


Fig. II.103. Pozițiile contragreutăților din planele *I* dreapta și *II* stînga și a contragreutăților rezultante Q_I și Q_{II} ale osiei motoare nr. 1 a locomotivei seria 301.

$$Q_{IIy}=\sum Q''_j \sin\alpha_j=133{,}97\sin 270°+179{,}974\sin 96°40'+133{,}700\sin 51°40'+$$

$$+77{,}386\sin 6°40'+8{,}352\sin 0°;$$

$$Q_{IIy}=158{,}3 \text{ kg}.$$

De aici rezultă

$$Q_{II}=\sqrt{Q_{II_x}^2+Q_{IIy}^2}=\sqrt{147{,}6^2+158{,}3^2}=216{,}2 \text{ kg},$$

iar

$$\operatorname{tg}\alpha_{II}=\frac{Q_{IIy}}{Q_{IIx}}=\frac{158,3}{147,6}=1,0726,$$

de unde

$$\alpha_{II}=47°.$$

Contragreutățile se plasează însă cît mai departe de axa de rotație zz și atît cît permite gabaritul stelelor roților.

Pentru aceasta forma care se dă acestora este un segment de cerc (fig. II.100, *a*).

In cazul de față aceste segmente se aleg astfel, încît greutatea lor să reprezinte greutățile calculate mai sus, reduse la centrele de greutate ale segmentelor.

Contragreutatea roții din dreapta. Segmentul de cerc se alege astfel, încît

$$\rho_I=727,5 \text{ mm}.$$

In acest caz greutatea segmentului este

$$Q_I'=\frac{\rho}{\rho_{II}}Q_I=\frac{330}{727,5}242=109,5 \text{ kg}.$$

Contragreutatea roții din stînga.

$$\rho_{II}=729 \text{ mm},$$

de aici rezultă:

$$Q_{II}''=\frac{\rho}{\rho_{II}}Q_{II}=\frac{330}{729}216,2=98 \text{ kg}.$$

Se vede că diferența dintre cele două contragreutăți este destul de mică (11,5 kg), de asemenea și dintre direcțiile centrelor de greutate (13°42'10").

§ 33. CORECTAREA ECHILIBRĂRII STATICE ȘI DINAMICE A MASELOR ÎN MIȘCARE DE ROTAȚIE

33.1. Echilibrarea statică

Deși echilibrarea maselor în mișcare de rotație, făcută prin calcule, după metodele indicate la §§ 30 și 31 cu ocazia proiectării mașinii, este precisă, totuși, în timpul construirii și montării, cum și datorită neomogenității materialului, apare o dezechilibrare, care trebuie corectată la bancul de probă.

Precizia corectării și modul de efectuare a acesteia depind de mărimea erorii și de destinația corpului echilibrat în ansamblul mașinii. Vor exista astfel metode diferite de corectare pentru un rotor de turbină, motor electric, volant etc.

Dacă centrul de greutate G al masei rotative nu coincide cu axa de rotație, corectarea acestui defect se poate face cu ajutorul unor mijloace relativ simple.

Corpul căruia trebuie să i se corecteze echilibrarea se așază cu fusurile pe două rigle orizontale A (fig. II.104) în formă de prismă.

Axa OO pe care este calat discul sau rotorul a cărui echilibrare trebuie corectată va fi lăsat să se rostogolească pe cele două rigle în sensul săgeții *1* pînă cînd centrul de greutate, de excentricitate e, se va găsi în poziția cea mai de jos, așa cum este arătat în fig. II.105.

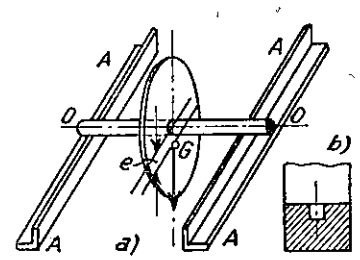


Fig. II.104. Corectarea echilibrării la masele aflate într-un singur plan.

In această poziție se trasează pe disc o linie verticală x_1x_1, care trece prin axa de rotație OO. Din cauza prezenței frecării, centrul de greutate G se va găsi evident la stînga verticalei x_1x_1.

Operația se repetă, obligînd discul de a se roti în sens opus (săgeata *2*). După oprirea lui se trasează o nouă linie verticală x_2x_2 (fig. II.105, *b*) care din cauza frecării va lăsa punctul G spre dreapta.

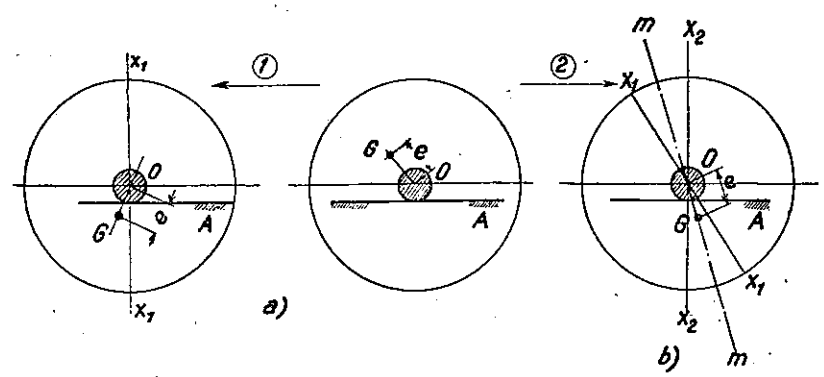


Fig. II.105. Metoda de determinare a direcției *mm* pe care se află centrul de greutate G de excentricitate e.

Centrul de greutate al discului se va afla evident pe bisectoare *mm* a unghiului x_1Ox_2.

Operația indicată mai sus se repetă de cîteva ori, pînă cînd se determină o direcție *mm* cît mai precisă.

Echilibrarea se realizează fie prin scoaterea de material din aceeași parte a axei O în care se află și G, fie prin adăugarea de material echivalent în partea opusă, pînă cînd G coincide cu O.

In fig. II.104, *b* se arată că echilibrarea s-a realizat prin extragere de material.

Pentru micșorarea frecării se folosesc dispozitive de felul celui redat în fig. II.106, prevăzut cu role de antifricțiune *a*. Determinarea poziției centrului de greutate G și apoi echilibrarea se fac după același procedeu indicat mai înainte.

In toate cazurile ale unor astfel de corectări, numite şi balansări, verificarea corectitudinii echilibrării se face prin constatarea echilibrului indiferent al discului.

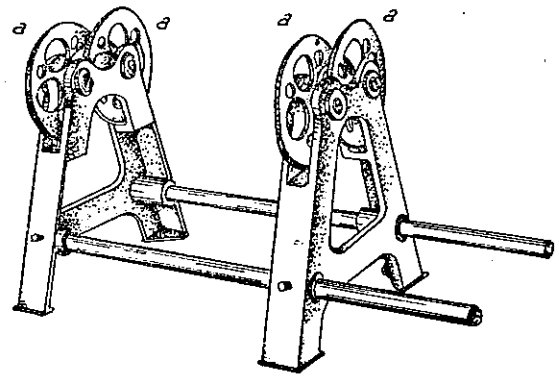


Fig. II.106. Dispozitiv pentru determinarea poziţiei centrului de greutate a corpurilor în mişcare de rotaţie cu metoda din fig. II.105.

O altă metodă de echilibrare statică foloseşte principiul balanţei.

In fig. II.107 este redat schematic un dispozitiv de echilibrare după acest principiu.

Corpul de echilibrat M se aşază pe lagărele *1* ale uneia dintre extremităţile braţului *2* al balanţei. Braţul se reazemă, prin intermediul prismelor *3*, pe suportul *4* în jurul căruia poate oscila.

Inainte de începerea operaţiei de aflare a direcţiei pe care se află centrul de greutate dezaxat G', se procedează la orizontalizarea braţului *2* prin plasarea, la cealaltă extremitate a braţului, a greutăţilor *5*. In momentul cînd braţul este orizontal, comparatorul *6* indică (în gramecentimetri) o cantitate mai mare decît momentul static al corpului de echilibrat.

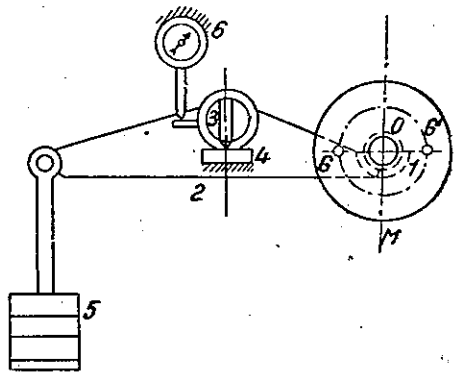


Fig. II.107. Echilibrarea statică a rotorului M prin metoda balanţei.

Operaţia de aflare a direcţiei lui G se face după cum urmează:

Se roteşte corpul M în jurul axului O pînă cînd ceasul comparator indică o deviaţie maximă. Această poziţie corespunde poziţiei extreme din dreapta a centrului de greutate (în G').

Rotind acum corpul pînă cînd ceasul comparator indică o deviaţie minimă, se obţine poziţia extremă din stînga a centrului de greutate (în G).

Semidiferenţa celor două citiri ale acului comparator dă valoarea momentului static al dezechilibrării. Prin alegerea lungimii se determină greutatea ce trebuie adăugată sau scoasă — după caz — pentru a readuce pe G în axul O al corpului M.

Cu toate măsurile luate, nu este posibil însă să se realizeze o balansare perfectă. Pentru arborii cotiţi de la automobile se admite o debalansare de 2—8 gcm.

Pentru rotoarele turbinelor cu abur forţa centrifugă maximă neechilibrată la viteza de regim se admite 4—5% din greutatea rotorului. Aceste erori impun totuşi precizii suficient de mari bancurilor de balansare.

Astfel, la bancurile de balansare a roţilor dinţate şi a reductoarelor se poate măsura o excentricitate a centrului de greutate pînă la 0,001 mm.

Metodele descrise mai sus realizează o echilibrare statică şi se utilizează cu succes la corpurile pline în formă de disc, cum ar fi volanţii, roţile, cuplajele etc., şi numai dacă acestea au o viteză de rotaţie relativ mică.

Pentru toate celelalte cazuri balansarea statică trebuie să fie urmată şi de o balansare dinamică, aceasta din urmă avînd rolul de a transforma axa de rotaţie în axă principală pe inerţie.

Un exemplu sugestiv care arată cum, deşi centrul de greutate G al rotorului se află pe axa de rotaţie, totuşi — din cauza defectelor de turnare — aceasta nu este şi axă de simetrie, este arătat în fig. II.108.

Centrele de greutate ale maselor situate de o parte şi de alta a p'anului orizontal care trece prin axa xx nu se află pe aceeaşi verticală.

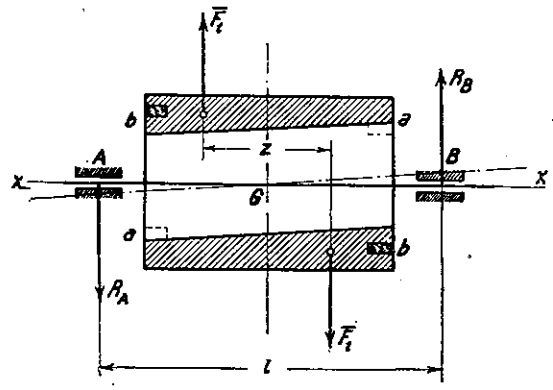


Fig. II.108. Schema simplificată a unui rotor echilibrat static dar dezechilibrat dinamic.

Rezultă de aici că, în timpul rotaţiei rotorului, forţele centrifuge rezultante F_i ale celor două mase vor da un moment

$$M_i = F_i z.$$

Acest moment va produce în lagărele rotorului reacţiuni suplimentare a căror valoare este dată de formula

$$R_A = R_B = \frac{F_i z}{l}.$$

Adăugarea (a, a) sau scoaterea de material (b, b), sau ambele concomitent, pot readuce cele două centre de greutate în planul median al rotorului.

Exemplul dat mai sus arată că la rotoarele mari de turboalternatoare, turbine, cum şi cele care funcţionează la turaţii mari şi foarte mari, este neapărat necesară o balansare dinamică la bancurile de probă.

In partea I, § 3.4, aplicaţia 2, s-au calculat reacţiunile dinamice la un arbore cu un alezaj greşit al discului.

33.2. Echilibrarea dinamică

De cele mai multe ori balansarea statică se face concomitent cu cea dinamică (balansare complexă).

Instalaţiile care realizează balansarea complexă se împart în două categorii:

1) *Instalaţii cu lagăre pentru piese de echilibrare A, legate elastic prin arcurile C cu fundaţia* (fig. II.109). Aceste instalaţii se folosesc pentru echilibrarea pieselor grele.

Lagărele B pe rolele E capătă vibraţii, datorită momentului forţelor de inerţie

$$M_i = F_{ix} z.$$

Verificarea debalansării se face în momentul apariţiei fenomenului de rezonanţă. Viteza de rotaţie corespunzătoare acestui fenomen variază între 300 şi 600 rot/min.

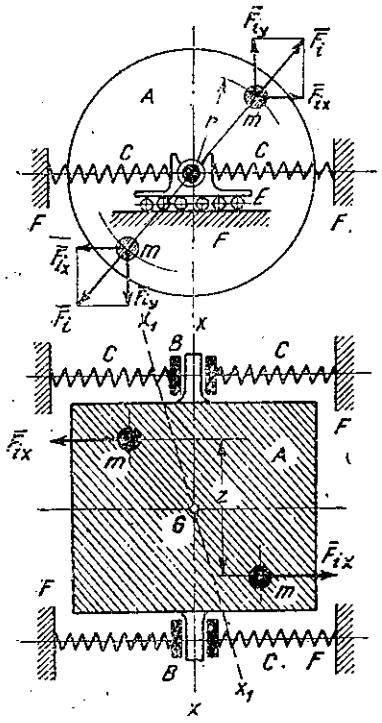


Fig. II.109. Echilibrarea dinamică a pieselor grele aflate în mişcare de rotaţie.

In figură se vede că momentul M_i tinde să rotească axa zz în poziţia x_1x_1 care, la rîndul ei, se roteşte împreună cu piesa. Oscilaţiile orizontale ale rotorului A se pot înregistra cu ajutorul unui indicator.

Sînt cazuri cînd se face balansarea fiecărui capăt separat al rotorului, situaţie în care numai reazemul corespunzător este montat cu arcuri.

Corectarea erorilor se face la fel ca în cazurile descrise anterior.

2) *Instalaţii cu leagăn suspendat elastic, pe care se aşază corpul de echilibrat, legat elastic cu fundaţia.* Aceste instalaţii se utilizează pentru echilibrări de mase cu greutăţi mici sau mijlocii (fig. II.110).

Mai jos se va descrie, după Kojevnikov, o instalaţie de echilibrare statică şi dinamică cu compensarea electro-magnetică a momentului forţelor de inerţie neechilibrate, cum şi modul ei de funcţionare.

Pe un postament *1* este montată o placă *2*, numită şi leagăn, deoarece poate oscila în jurul axei articulaţiei *3*. Leagănul se menţine la început orizontal, cu ajutorul a două arcuri *4*, montate la cele două extremităţi şi ale căror caracteristici pot fi modificate după voie.

Rotorul de echilibrat *5*, după ce se instalează cu axul său pe rolele *6*, se cuplează la motorul electric *7* cu ajutorul cuplajului elastic *8*.

Rotorul se instalează astfel, încît unul dintre planele de reducere (în cazul de faţă planul *I*) să treacă prin axa de rotaţie *3* a leagănului. In acest fel momentul forţelor centrifuge ale maselor neechilibrate $M_i = F_i z$ va determina masa contragreutăţii care trebuie montată în planul de reducere *II* sau — după caz — masa care trebuie extrasă din rotor.

Sub acţiunea lui M_i, leagănul *2* aflat în echilibru cu ajutorul arcurilor *4* începe să oscileze în jurul axei *3*. Oscilaţiile vor avea amplitudini cu atît mai mari, cu cît viteza de rotaţie n a motorului electric este mai mare şi ele vor deveni maxime în momentul apariţiei fenomenului de rezonanţă ($n = 700...800$ rot/min).

Amplitudinile se măsoară, fie cu ajutorul unui comparator optic (nereprezentat în figură), în care o oglindă legată de leagăn printr-un sistem de pîrghii proiectează o rază de lumină pe o scală mată gradată, fie mai simplu, printr-un

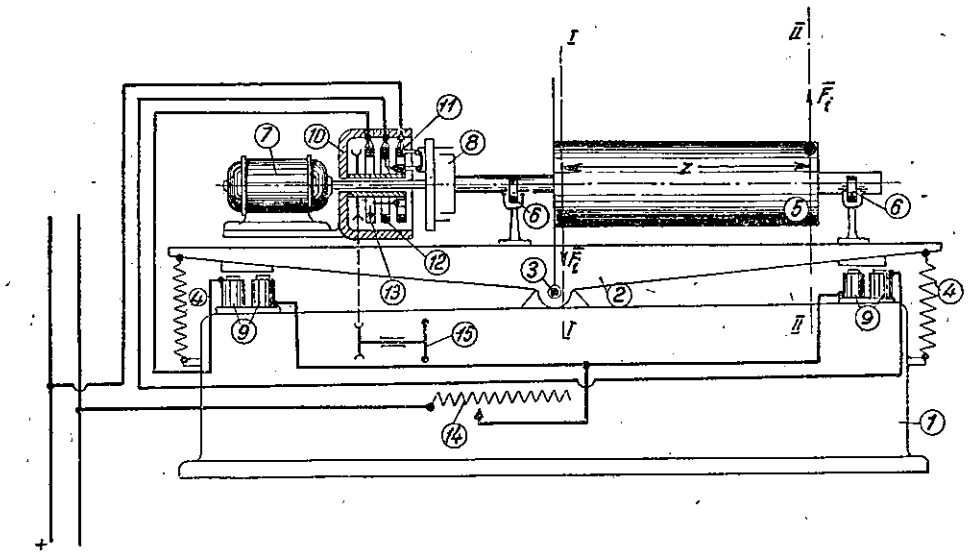


Fig. II. 110. Schema unei instalaţii de echilibrare statică şi dinamică a pieselor de maşini (5) aflate în mişcare de rotaţie.

indicator care trasează o linie pe un geam afumat. In ambele cazuri lungimea luminată sau trasată este proporţională cu dublul amplitudinii oscilaţiilor.

Dacă la această viteză de rotaţie a motorului electric, nu se observă nici o deviaţie a comparatorului optic, rezultă că în raport cu planul *I* de reducere rotorul este echilibrat dinamic. In acest caz rotorul se demontează şi se montează invers, astfel încît planul *II* de reducere să treacă prin axa de rotaţie *3* a leagănului.

Dacă şi acum, după atingerea vitezei de rotaţie prevăzute pentru efectuarea echilibrării, acul comparatorului nu arată nici o deviaţie, rezultă că rotorul este echilibrat atît static cît şi dinamic.

Dacă la prima încercare se constată amplitudini, rezultă că rotorul este neechilibrat.

In acest caz sînt de rezolvat două probleme:

Prima: determinarea mărimii lui $M_i = F_i z$.

A doua: determinarea direcţiei de acţionare a lui M_i (direcţie care trebuie s-o indice pe aceea de unde se va extrage sau se va adăuga material pentru echilibrare).

Instalaţia descrisă mai sus permite rezolvarea concomitentă a acestor două probleme.

Pentru aceasta, momentul M_i este compensat de electromagneţii *9*, conectaţi succesiv la reţeaua de curent continuu printr-un întreruptor special *10* cu inele colectoare, montat pe acelaşi ax cu motorul electric şi ale cărui perii se rotesc o dată cu rotorul.

Intreruptorul *10* este compus dintr-un inel colector fix *11*, format dintr-o singură bucată (v. şi fig. II.111, *a*), şi din două sectoare de inel, de asemenea fixe *12* şi *13*.

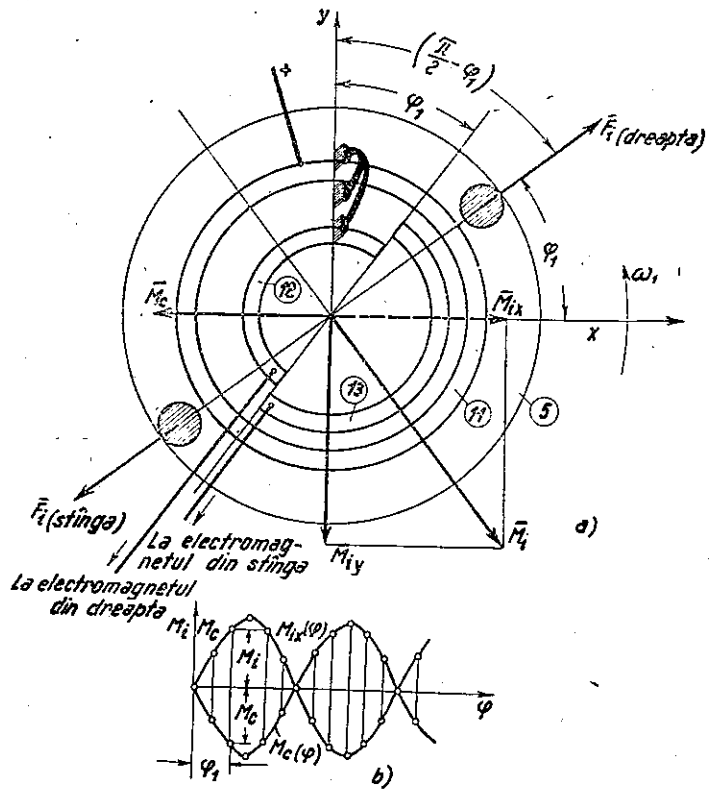


Fig. II.111. Poziţia inelelor colectoare *11*, *12* şi *13* ale întreruptorului, corespunzătoare compensării momentului perturbator M_i de către momentul compensator M_c datorit electromagnetului *9* din dreapta leagănului *2* din fig. II.110.
In fig. II.111, *b* diagramele M_c şi M_{ix}.

Prin sectorul *12* se stabileşte contactul pentru bobinele electromagnetului *9* din dreapta, iar prin *13* — pentru bobinele celui din stînga.

In poziţia din fig. II.111, *a* curentul trece de la firul ⊕ al reţelei prin inelul colector *11* şi periile respective la sectorul de inel *12* şi, de aici, la bobinele electromagnetului din dreapta, după care prin reostatul *14* se întoarce în reţea.

Contactul trebuie să se modifice cînd poziţia maselor rămase neechilibrate s-a rotit cu 180°.

La un moment dat, cînd poziţia maselor neechilibrate face unghiul φ_1 cu orizontala (fig. II.111, *b*), valoarea proiecţiei pe axa *x* a momentului perturbator este

$$M_{ix}=M_i\sin\varphi_1=zF_i\sin\omega_1 t.$$

Vectorul M_{ix} are direcţia orizontală şi variază după o funcţie sinusoidală.

Trebuie de găsit deci un moment compensator, produs de forţele de atracţie ale electromagneţilor, care să aibă aceeaşi lege de variaţie şi cu un decalaj de 180° între ele, adică teoretic trebuie să existe $M_c=-M_{ix}$.

Legea de variaţie a momentului compensator nu este însă sinusoidală, cum este trasată M_{ix}, ci are forma arătată de curba M_c din fig. II.113, *b*. Din această cauză compensarea va fi afectată de erori, care însă din punct de vedere practic sînt neglijabile.

Presupunînd deci că şi legea de variaţie a lui M_c este sinusoidală, va trebui acum să se ducă M_c decalat cu 180° faţă de M_{ix}, cu alte cuvinte electromagnetul din dreapta să fie conectat la reţea în momentul cînd vectorul perturbator M_i este vertical (fig. II.111, *a*).

In acel moment, atît M_{ix} cît şi M_c sînt egali cu zero, şi deci în timpul cît φ_1 variază de la 0 la 2π, legile de variaţie sînt:

$$M_{ix}=zF_i\sin\omega_1 t, \quad \text{respectiv} \quad M_c=M_{c\,max}\sin(\omega_1 t+\pi). \tag{a}$$

Pentru o poziţie oarecare φ_1, situaţia inelelor colectoare *11*, *12* şi *13* este redată în fig. II.111, *a*. Diagramele de variaţie ale celor două momente în funcţie de φ_1 sînt reprezentate în fig. II.111, *b*. Se realizează astfel echilibrarea în orice moment a lui $\bar{M}_i$ şi $\bar{M}_c$.

Dacă acum inelele se rotesc în sensul acelor de ceasornic cu ajutorul mecanismului *15* din fig. II.110, se va crea un decalaj între legile de variaţie ale celor două momente.

Dacă această rotire a inelelor faţă de poziţia din fig. II.111, *a* este φ_1 (fig. II.112, *a*), atunci în timp ce momentul perturbator M_{ix} are o valoare

$$M_{ix}=zF_i\sin\varphi_1,$$

momentul compensator produs de electromagnetul din dreapta leagănului este egal cu zero, deoarece abia acum începe conectarea lui la reţea prin realizarea contactului dintre sectorul inelar *12* şi perii.

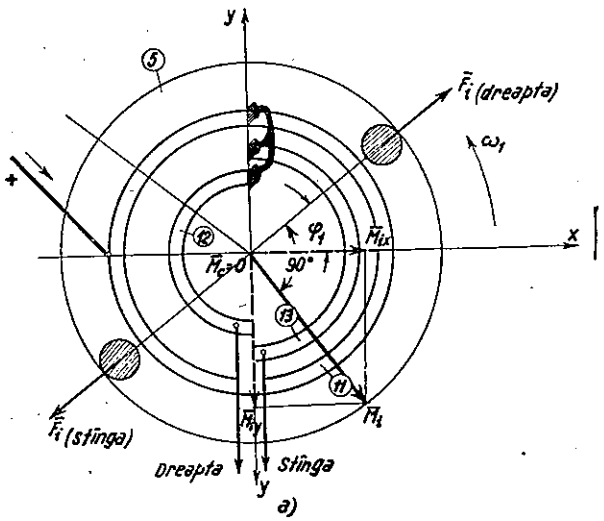


Fig. II.112. Poziţia inelelor colectoare în cazul existenţei unui defazaj φ_1 între $\bar{M}_{ix}$ şi $\bar{M}_c$.

Diagramele de variaţie ale celor două momente în funcţie de unghiul $\varphi_1 = \omega_1 t$ sînt redate în fig. II.112, *b*.

Astfel, după un timp t de la începutul conectării la reţea a bobinelor electromagnetului din dreapta, legile de variaţie ale celor două momente sînt:

$$M_{ix} = zF_i \sin(\omega t + \varphi_1);$$

$$M_c = M_{c\,max} \sin(\omega t + \pi) = -M_{i\,max} \sin \omega t.$$

Astfel, după un timp $t = \frac{\pi}{2\omega}$, corespunzător abscisei *3* din fig. II.112, *b*, cele două momente devin:

$$M_{ix} = zF_i \cos \varphi_1;$$

$$M_c = -M_{c\,max}.$$

Cu inelele astfel decalate faţă de perii nu se va putea deci realiza compensarea momentului perturbator datorit forţelor de inerţie neechilibrate.

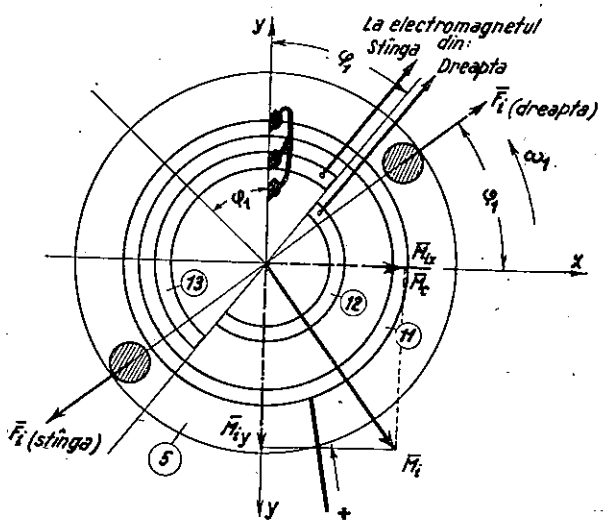


Fig. II.113. Poziţia inelelor colectoare în cazul cînd cele două momente $\bar{M}_{ix}$ şi $\bar{M}_c$ sînt în fază.

Dacă se continuă să se rotească inelele, se va ajunge în situaţia din fig. II.113, *a*, cînd M_{ix} şi M_c sînt tot timpul de acelaşi sens şi cu aceeaşi lege de variaţie, adică:

$$M_{ix} = zF_i \sin \omega t$$

şi

$$M_c = M_{c\,max} \sin \omega t.$$

In realitate, cele două legi de variaţie în funcţie de φ, după cum s-a arătat, se prezintă ca în fig. II.113, *b*.

Comparatorul indicator va marca pentru această poziţie a inelelor deviaţii maxime.

Scopul operaţiei de balansare este deci de a aduce inelele în poziţia indicată de fig. II.111, *a* cînd amplitudinile oscilaţiilor leagănului sînt minime.

Acesta este indiciul că cele două momente sînt decalate între ele cu 180°.

Reducerea la zero a oscilaţiilor se face prin

manevrarea reostatului *14*, care variază intensitatea curentului ce circulă prin bobine, pînă cînd se realizează egalitatea

$$M_{c\,max} = zF_i. \tag{b}$$

In acest caz, din expresiile (a) rezultă:

$$M_{ix} = zF_i \sin \omega t = M_{c\,max} \sin \omega t = M_c, \tag{c}$$

adică se realizează o compensare completă în tot timpul rotaţiei de la 0 la 2π.

Din relaţia (b) se deduce acum uşor valoarea masei care trebuie plasată în planul *II* şi care să aibă acelaşi efect ca şi momentul compensator $M_{c\,max}$.

Dacă se alege distanţa ρ_{II} de la axul de rotaţie, la care se va adăuga masa, atunci din (b) rezultă imediat:

$$zm_{II}\rho_{II}\omega^2 = M_{c\,max},$$

de unde

$$G_{II} = g\frac{M_{c\,max}}{z\rho_{II}\omega^2}. \tag{II.376}$$

Direcţia şi sensul lui $\bar{\rho}_{II}$ sînt determinate de poziţia sectoarelor inelare *12* şi *13* faţă de planul orizontal, cînd periile se plasează la extremităţile acestora.

In acest caz direcţia lui $\bar{\rho}_{II}$ este orizontală.

O operaţie identică se face cu rotorul şi pentru determinarea masei m_I din planul de reducere *I*.

33.3. Alte metode de echilibrare dinamică

1. *După cum s-a văzut, cu ajutorul electricităţii* a fost posibilă determinarea mărimii momentului forţelor de inerţie M_i, precum şi direcţia după care acţionează dezechilibrul dinamic.

Tot cu ajutorul electricităţii şi, recent, cu ajutorul instalaţiilor electronice s-a reuşit o amplificare foarte mare a dezechilibrului dinamic, ceea ce a adus o însemnată contribuţie în construcţia noilor maşini de echilibraj,

Printre aceste maşini este demnă de remarcat maşina de echilibraj cu dispozitive pick-up electromagnetice, redată schematic în fig. II.114.

Cele două lagăre care susţin rotorul de echilibrat sînt conexate la cîte un pick-up electromagnetic, care produce o forţă electromotoare alternativă proporţională cu amplitudinea oscilaţiilor, deci cu a momentului forţelor de inerţie neechilibrate. In aceste condiţii, masa dezechilibrantă *M*, raportată la

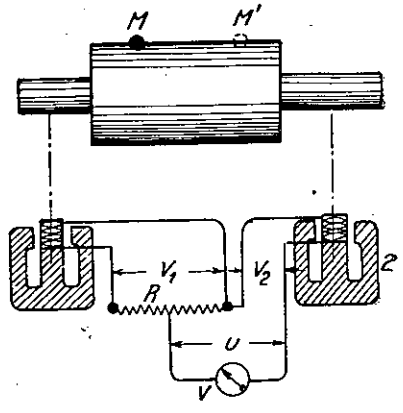


Fig. II.114. Instalaţie cu „pick-up" pentru corectarea echilibrării dinamice.

planul de reducere *I*, producînd oscilaţii, forţele electromotoare induse de pick-upul *1* vor fi cu atît mai mari, cu cît masa *M* va fi mai aproape de planul de reducere.

Tensiunea V_1 de la bornele pick-upului *1* se micşorează cu ajutorul potenţiometrului *R*, astfel încît în orice moment să devină egală şi de sens contrar cu tensiunea V_2 de la bornele pick-upului *2*.

Voltmetrul *V* va indica în consecinţă $U=0$, oricare ar fi mărimea masei *M*.

In felul acesta s-a realizat insensibilitatea voltmetrului pentru orice masă *M* plasată în planul de reducere *I*; cu alte cuvinte, s-a realizat echilibrajul electric al primului plan de reducere. Voltmetrul nu va fi influenţat decît de mase situate în alte plane de reducere, de exemplu *II* (unde se află masa *M'*).

Cu ajutorul unui comutator se face posibilă trecerea de la un plan de reducere la celălalt.

Printr-un calcul asemănător se găseşte mărimea maselor *M* şi *M'*, deci a greutăţilor care trebuie adăugate sau extrase din rotor.

Poziţia masei *M* în planul de reducere *I* se reperează cu ajutorul unei lămpi *1*, care se aprinde cînd tensiunea *V* devine egală cu zero (fig. II.115), adică atunci cînd oscilaţia atinge amplitudinea maximă.

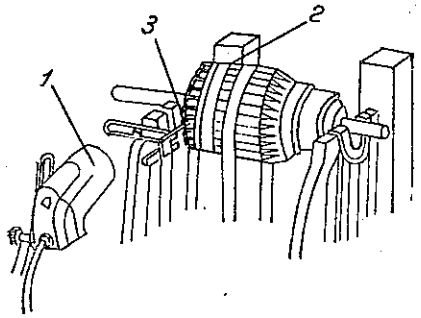


Fig. II.115. Determinarea planului de dezechilibru cu ajutorul efectului stroboscopic.

In acest scop, pe periferia rotorului şi în planul de reducere *I* este trasată o scară gradată *2*, luminată de lampa *1*. Datorită efectului stroboscopic, cifra din direcţia masei *M* va părea nemişcată. Reperul *3* indică poziţia lui *M*.

Trebuie precizat că prin acest procedeu se neglijează un fenomen important, şi anume faptul că amplitudinea maximă a oscilaţiei nu este în fază cu trecerea masei *M* prin poziţia considerată. In adevăr, aceasta din urmă (masa *M*) precede amplitudinea maximă cu un unghi oarecare φ, numit unghi de precesie şi care variază de la zero, pentru $\omega=0$, pînă la $\varphi=\frac{\pi}{2}$, pentru $\omega=\omega_c$, după cum se vede în fig. II.116.

Instalaţiile mai vechi erau obligate să realizeze, pentru efectuarea echilibrajului, o viteză în jurul celei critice ω_c şi numai în această situaţie să determine direcţia lui *M*.

Instalaţia descrisă mai sus nu ţine seamă de acest decalaj φ, deoarece datorită amplificării electronice cu care este înzestrată maşina (pînă la 1 600 000

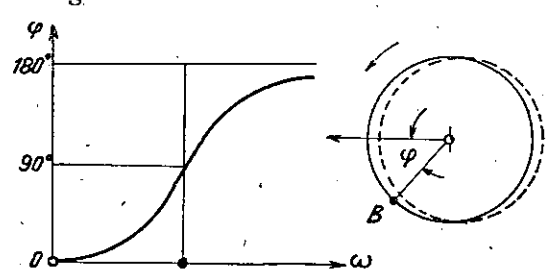


Fig. II.116. Variaţia unghiului de precesie φ cu viteza unghiulară a rotorului.

ori), viteza la care se execută operaţia de determinare a mărimii şi direcţiei lui *M* este cu mult sub viteza critică, astfel că φ, cu o aproximaţie de cîteva procente, poate fi considerat egal cu zero.

2. *O altă metodă de echilibrare dinamică* constă în determinarea nu a mărimii masei *M* din planul de reducere, ci a componentelor ei după două direcţii perpendiculare *Ox* şi *Oy* elese arbitrar. La un moment dat, cînd masa *M* face unghiul φ cu axa *Ox*, cele două componente ale forţei centrifuge vor fi:

$$F_{ix}=\frac{G}{g}r\omega^2\cos\varphi=R_i\cos\varphi;$$

$$F_{iy}=\frac{G}{g}r\omega^2\sin\varphi=F_i\sin\varphi.$$

Pentru determinarea acestora se poate folosi un instrument de măsurat electric: wattmetrul.

Un mic magnet permanent, antrenat cu viteza unghiulară a rotorului (discului etc.) calat după direcţia uneia dintre cele două axe (în primul caz axa *Ox*), induce într-o bobină fixă o forţă electromotoare alternativă *V*, în timp ce o tensiune *U* proporţională cu masa *M* care trebuie determinată este produsă cu ajutorul unui dispozitiv identic cu cel din fig. II.114.

Pe wattmetrul alimentat de tensiunile *V* şi *U* se va citi valoarea produsului

$$UV\cos\varphi.$$

Deoarece *V* este determinat dinainte şi constituie o constantă a instalaţiei, rezultă că din citire se poate deduce imediat valoarea lui $F_{ix}=F_i\cos\varphi$.

Cu ajutorul unei a doua bobine fixe, calată la 90° de prima, se poate citi printr-o metodă analogă celei de mai sus valoarea produsului

$$UV\sin\varphi,$$

adică a lui $F_{iy}=F_i\sin\varphi$.

Cu ajutorul comutatoarelor se poate trece de la F_{ix} la F_{iy}, cum şi de la un plan de reducere la celălalt.

Reperarea direcţiei masei *M* se face cu o metodă analogă celei din fig. II.115. De asemenea şi în acest caz se lucrează cu viteze mult sub cea critică.

Maşinile de acest tip au o întinsă utilizare la echilibrajul în serie a arborilor cotiţi de la motoarele de automobil.

La maşinile moderne de echilibraj wattmetrul este înlocuit cu un oscilograf pe ecranul căruia se pot citi direct valorile lui F_{ix} şi F_{iy}. Amplificarea electronică asigură în acest caz o precizie oricît de mare.

Alte maşini au înlocuit pick-upurile cu aparate piezoelectrice.

33.4. Limitele preciziei echilibrării

Din cele expuse rezultă că se poate realiza o corectare a echilibrării sau, pe scurt, se poate face o echilibrare a unei piese în mişcare de rotaţie cu o precizie practic nelimitată.

In practică însă, trebuie să se stabilească limita acestei precizii, deoarece s-a constatat că unele piese echilibrate pe cele mai moderne și precise mașini au funcționat în condiții cu totul defavorabile, după un anumit timp funcționarea lor devenind imposibilă.

Astfel, se pot da ca exemplu rotoarele sau indusurile mașinilor electrice, care din cauza defectuozității fretajului bobinelor se deformează și, sub acțiunea forțelor centrifuge, produc un dezechilibru apreciabil.

Realizarea unui echilibraj la viteza de regim nu ar da satisfacție decît în cazul cînd aceasta ar fi tot timpul constantă, lucru care nu este posibil la motoarele electrice de tracțiune.

Exemplu de la § 31.2. arată că la arborii elastici care lucrează sub viteza critică apar forțe centrifuge apreciabile chiar cînd echilibrarea este perfectă ($e=0$).

In adevăr, din expresia (II.360), făcînd $e=0$, rezultă:

$$y_d = C\sin(\alpha t+\varphi)+\frac{y_s}{\alpha^2}\omega^2,$$

care, înlocuită în (II.361'), dă:

$$F_c = \frac{G}{g}C\omega_c^2\sin(\alpha t+\varphi)+\frac{G}{g}y_s\frac{\omega^2}{1-\left(\frac{\omega^2}{\omega_c}\right)^2}.$$

Expresia de mai sus ne arată că este inutil să se meargă prea departe cu corectarea echilibrării la astfel de piese dacă săgeata statică y_s produce o forță centrifugă care depășește cu mult dezechilibrul compensat la mașina de echilibraj.

Chiar la piesele mari, care au deci o rigiditate apreciabilă, însă diferită de la o axă de simetrie la alta (fig. II.117), din cauza unor canale de pană nejudicios practicate, se pot produce forțe centrifuge apreciabile și deci dezechilibrări.

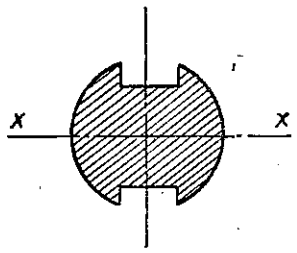


Fig. II.117. Arbore cu moment de inerție variabil față de axa xx și care din această cauză produce dezechilibrare dinamică.

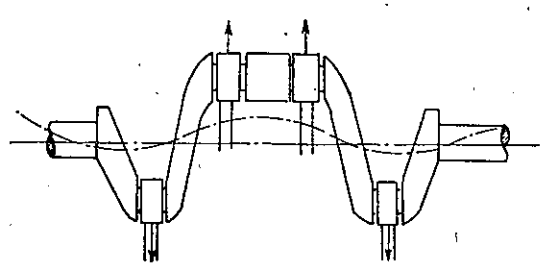


Fig. II.118. Arbore cotit cu 4 cilindri, care se dezechilibrează în funcționare din cauza variației fibrei medii deformate.

De asemenea, un montaj greșit poate distruge rezultatul unei echilibrări precise. Astfel, de exemplu, dacă indusul de 50 kg al unui motor electric (care a fost echilibrat cu o precizie de 10 gcm) este montat pe rulmenți cu o excentricitate de 0,02 mm, atunci se produce un dezechilibru de 100 gcm, adică de zece ori mai mare decît precizia operației de echilibraj.

De aici ar rezulta că este recomandabilă efectuarea echilibrajului pe lagărele proprii.

Dezechilibrări pot să apară și din cauza unor fenomene electrice. Astfel, dacă tensiunile dintre fazele unei rețele electrice care alimentează un motor asincron sînt inegale, cîmpurile magnetice produc disimetrii care dau naștere la vibrații apreciabile.

Dezechilibrările datorite deformațiilor termice inegale ale turbinelor cu abur la pornire se pot elimina numai prin demararea lentă a acestora cu ajutorul unei instalații speciale. In felul acesta se realizează o încălzire uniformă a arborelui și a rotorului.

Dezechilibrări destul de apreciabile pot apărea și la arborele cotit din fig. II.118, a cărui săgeată totală în poziția desenată în figură este trasată cu linii întrerupte.

§ 34. CALCULUL FORȚEI REZULTANTE DE INERȚIE A UNUI MECANISM SAU MAȘINĂ

34.1. Ipotezele de calcul și problemele de rezolvat

Pentru echilibrarea forțelor de inerție dezvoltate de masele elementelor în mișcare variată ale unui mecanism este necesar, de cele mai multe ori, să se determine poziția centrului de greutate al acestuia în funcție de poziția elementului conducător în timpul ciclului cinematic.

Cunoscînd poziția centrului de greutate și considerînd întreaga masă a elementelor mecanismului concentrată în acest punct a cărui accelerație este $\bar{a}_G$, forța de inerție rezultantă a mecanismului sau mașinii va fi:

$$\overline{F}_{iG} = -m\bar{a}_G.$$

In această metodă se neglijează momentele forțelor de inerție ale fiecărui element, și deci momentul rezultant al forțelor de inerție al mecanismului de forma

$$M_{iG} = -\sum_{j=1}^{n} I_{G_j}\varepsilon_j.$$

La mecanismele plane, la care M_{iG} acționează în același plan cu momentele forțelor motoare și ale rezistenței tehnologice asupra fundației, neluarea în considerație a lui M_{iG}, deci plasarea lui F_{iG} în centrul de greutate al mecanismului, este practic admisibilă. Acest lucru este justificat prin faptul că M_{iG} echilibrează în parte efectul momentelor forței motoare și rezistenței tehnologice asupra fundației.

In consecință, la mecanismele și mașinile cu mișcare în planul elementelor, forța de inerție rezultantă F_{iG} se consideră aplicată în centrul de greutate.

Calculul lui F_{iG} este legat de rezolvarea a două probleme:

— Determinarea poziției centrului de greutate G al mecanismului sau al mașinii.

— Determinarea accelerației lui G și, cu aceasta, a forței de inerție rezultantă F_{iG}.

34.2. Determinarea poziției centrului de greutate al mecanismului format din lanț cinematic simplu

Pentru determinarea poziției centrului de greutate se folosește formula clasică a vectorului de poziție $\bar{r}_G$ al centrului de greutate al unui sistem de puncte, stabilită la cursul de mecanică teoretică, și anume:

$$\bar{r}_G = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \bar{r}_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j}, \tag{II.377}$$

în care:

$\bar{r}_j$ este vectorul de poziție al centrului de greutate al elementului j al unui lanț cinematic simplu;

m_j — masa aceluiași element.

Dacă se notează cu

$$m = \sum_{j=1}^{n} m_j,$$

formula (II.377) se scrie:

$$\bar{r}_G = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j \bar{r}_j}{m}. \tag{II.377'}$$

Fie (fig. II.119) $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}, G_n$ centrele de greutate ale elementelor unui lanț cinematic $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ale căror poziții sînt date de razele vectoare $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$.

Ca origine se consideră punctul O, extremitatea primului element.

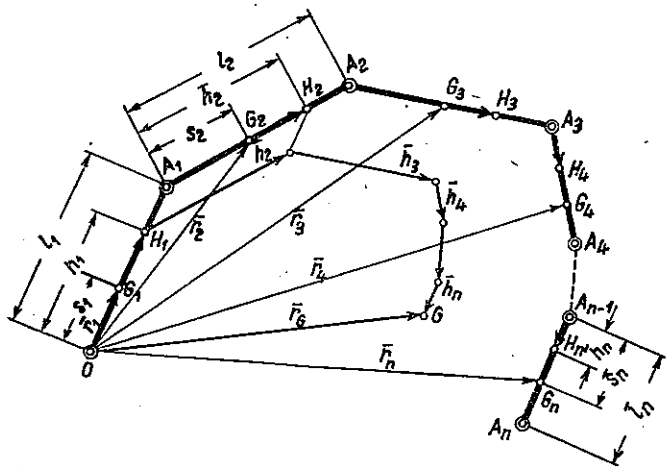


Fig. II.119. Determinarea vectorului de poziție $\bar{r}_G$ al centrului de greutate al unui lanț cinematic simplu cu ajutorul vectorilor principali $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n$.

Dacă se notează lungimile elementelor cu $l_1, l_2, \ldots, l_n$ și distanțele centrelor de greutate măsurate de la prima articulație a elementului, cu $s_1, s_2, \ldots, s_n$, vectorii de poziție $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$, se pot descompune după cum urmează:

$$\begin{aligned}
&\bar{r}_1 = \bar{s}_1;\\
&\bar{r}_2 = \bar{l}_1 + \bar{s}_2;\\
&\bar{r}_3 = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{s}_3;\\
&\cdots\cdots\\
&\bar{r}_j = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \ldots + \bar{l}_{j-1} + \bar{s}_j;\\
&\cdots\cdots\\
&\bar{r}_n = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \ldots + \bar{l}_{n-1} + \bar{s}_n.
\end{aligned}$$

Înlocuind valorile de mai sus în formula (II.377') și grupînd vectorii de aceeași direcție, se obține:

$$\bar{r}_G = \frac{m_1\bar{s}_1 + (m_2+m_3+\ldots+m_n)\bar{l}_1}{m} + \frac{m_2\bar{s}_2 + (m_3+\ldots+m_n)\bar{l}_2}{m} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m_j\bar{s}_j + (m_{j+1}+\ldots+m_n)\bar{l}_j}{m} + \ldots + \frac{m_n\bar{s}_n}{m}. \tag{II.378}$$

Dacă se notează cu

$$\begin{aligned}
\bar{h}_1 &= \frac{m_1\bar{s}_1 + (m_2+m_3+\ldots+m_n)\bar{l}_1}{m};\\
\bar{h}_2 &= \frac{m_2\bar{s}_2 + (m_3+\ldots+m_n)\bar{l}_2}{m};\\
&\cdots\cdots\\
\bar{h}_j &= \frac{m_j\bar{s}_j + (m_{j+1}+\ldots+m_n)\bar{l}_j}{m};\\
&\cdots\cdots\\
\bar{h}_n &= \frac{m_n\bar{s}_n}{m},
\end{aligned} \tag{II.379}$$

atunci formula (II.378) devine:

$$\bar{r}_G = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \ldots + \bar{h}_n. \tag{II.380}$$

Vectorii $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots$ sînt de mărime constantă și variază numai ca direcție, rămînînd tot timpul mișcării paraleli cu elementele corespunzătoare ale lanțului cinematic.

Acești vectori au fost denumiți vectori principali, iar punctele $H_1, H_2, \ldots, H_n$ de pe elementele $l_1, l_2, \ldots, l_n$, care le determină vîrfurile: puncte principale.

Punctele principale se pot determina prin interpretarea fizică a formulelor (II.379).

Astfel, dacă la elementul j al lanțului cinematic (fig. II.120) se plasează în articulația A_j masele tuturor elementelor precedente, adică:

$$m_1+m_2+\ldots+m_{j-1}=\sum_{k=1}^{j-1} m_k,$$

în centrul de greutate G_j al elementului — masa sa m_j, iar în articulația următoare — masele tuturor elementelor care urmează, adică:

$$m_{j+1}+m_{j+2}+\ldots+m_n=\sum_{k=j+1}^{n} m_k,$$

atunci punctul H_j este tocmai centrul de greutate al celor $(m_1+\ldots+m_{k-1}+m_n)$ mase astfel repartizate.

In adevăr, aplicînd momentul static în raport cu articulația A_j, se obține pentru poziția centrului de greutate tocmai expresia (II.379):

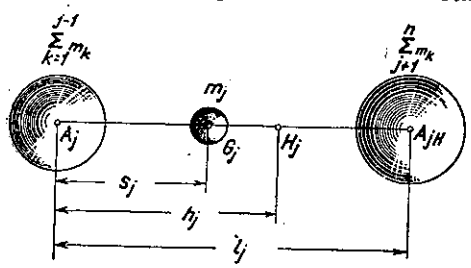


Fig. II.120. Sensul fizic al punctului principal H_j al unui element.

$$m_j\bar{s}_j+\bar{l}_j\sum_{j+1}^{n} m_k=m\bar{h}_j,$$

de unde

$$\bar{h}_j=\frac{m_j\bar{s}_j+\bar{l}_j\sum_{j+1}^{n} m_k}{m}.$$

Determinînd vectorii principali cu metoda indicată mai sus și făcînd suma lor vectorială conform formulei (II.380), se obține vectorul de poziție $\bar{r}_G$ al centrului de greutate al lanțului cinematic.

Dacă lanțul cinematic se transformă în mecanism, formula (II.380) rămîne valabilă cu mențiunea că nu se va lua în considerație în calcul vectorul principal al elementului fix.

Se va lua pentru exemplificare cazul unui mecanism patrulater (fig. II.121), căruia se cere să i se găsească centrul de greutate.

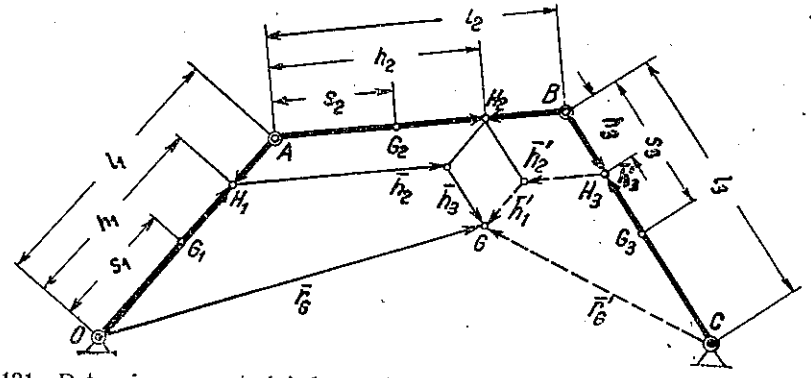


Fig. II.121. Determinarea centrului de greutate G al unui mecanism patrulater cu ajutorul vectorilor principali $\bar{h}_1 \ldots \bar{h}_3$.

Cu datele din figură se pot scrie imediat expresiile celor trei vectori principali:

$$\bar{h}_1=\frac{m_1\bar{s}_1+(m_2+m_3)\,\bar{l}_1}{m};$$

$$\bar{h}_2=\frac{m_2\bar{s}_2+m_3\bar{l}_2}{m}; \qquad \text{(II.381)}$$

$$\bar{h}_3=\frac{m_3\bar{s}_3}{m}.$$

După determinarea mărimii acestora se fixează pe axele elementelor l_1, l_2 și l_3 punctele principale H_1, H_2 și H_3.

Din H_1 se duce vectorul echipolent cu $\bar{h}_2$ și din vîrful acestuia, unul echipolent cu $\bar{h}_3$.

Vectorul de poziție al centrului de greutate este deci:

$$\bar{r}_G=\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_3.$$

Construcția duce la același rezultat și dacă se alege articulația fixă C ca origine a vectorilor de poziție ai centrelor de greutate ale elementelor.

In acest caz, vectorii principali care trebuie însumați sînt evident:

$$\bar{h}_3'=\bar{h}_3-\bar{l}_3;\quad \bar{h}_2'=\bar{h}_2-\bar{l}_2 \quad \text{și} \quad \bar{h}_1'=\bar{h}_1-\bar{l}_1, \qquad \text{(II.382)}$$

astfel că

$$\bar{r}_G=\bar{h}_3'+\bar{h}_2'+\bar{h}_1'. \qquad \text{(II.383)}$$

La mecanismele formate din lanțuri cinematice simple sînt totdeauna valabile egalitățile (II.382). Astfel, dacă se calculează vectorii principali $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$,... corespunzători unei articulații fixe, vectorii principali corespunzători celeilalte articulații fixe a mecanismului format din lanț cinematic simplu se deduc din relațiile (II.382).

Se va studia mai jos cazul cînd centrele de greutate ale elementelor nu se află pe axa care unește centrele articulațiilor.

Fie pentru aceasta mecanismul patrulater $OABC$ (fig. II.122), la care biela 2 și brațul 3 au forme triunghiulare ABD, respectiv BCE, centrele lor de greutate aflîndu-se în G_2, respectiv G_3, dezaxate față de dreptele AB și BC.

Se va conveni ca vectorii de poziție ai centrelor de greutate G_2 și G_3 față de articulații să se noteze cu $\bar{s}_2$ și $-\bar{s}_2'$; $\bar{s}_3$ și $-\bar{s}_3'$.

Astfel: $\bar{s}_2=\overline{AG_2}$; $-\bar{s}_2'=\overline{BG_2}$; $\bar{s}_3=\overline{BG_3}$; $-\bar{s}_3=\overline{CG_3}$.

Cu aceste notații, dacă se introduc în formula (II.377′) valorile lui $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ și $\bar{r}_3$ cu originea în O, valori scrise sub forma:

$$\bar{r}_1=\bar{s}_1;$$

$$\bar{r}_2=\bar{l}_1+\bar{s}_2; \qquad \text{(II.384)}$$

$$\bar{r}_3=\bar{l}_1+\bar{s}_2+\bar{s}_2'+\bar{s}_3,$$

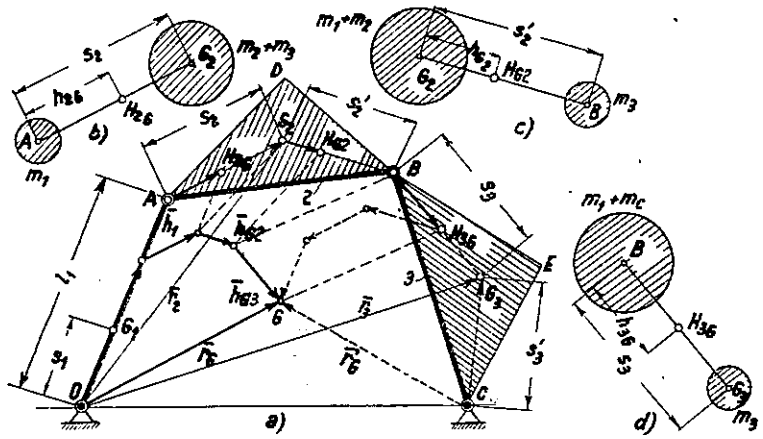


Fig. II.122. Determinarea centrului de greutate G al unui mecanism la care centrele de greutate G_2 și G_3 ale elementelor *2* și *3* nu se află pe axele geometrice *AB*, respectiv *BC*, ale centrelor articulațiilor.

se obține:

$$\bar{r}_G=\frac{\bar{s}_1m_1+\bar{l}_1(m_2+m_3)}{m}+\frac{\bar{s}_3(m_2+m_3)}{m}+\frac{\bar{s}_2'm_3}{m}+\frac{\bar{s}_3m_3}{m}. \qquad \text{(II.385)}$$

Se notează:

$$\begin{aligned}
\bar{h}_1&=\frac{\bar{s}_1m_1+\bar{l}_1(m_2+m_3)}{m};\\
\bar{h}_{2G}&=\frac{\bar{s}_2(m_2+m_3)}{m};\\
\bar{h}_{G2}&=\frac{\bar{s}_2'm_3}{m};\\
\bar{h}_{3G}&=\frac{\bar{s}_3m_3}{m}.
\end{aligned} \qquad \text{(II.386)}$$

Formula (II.385) devine astfel

$$\bar{r}_G=\bar{h}_1+\bar{h}_{2G}+\bar{h}_{G2}+\bar{h}_{3G}. \qquad \text{(II.387)}$$

Semnificația fizică a vectorilor principali $\bar{h}_{2G}$ și $\bar{h}_{G2}$ și a punctelor principale H_{2G} și H_{G2} se deduce ușor din formulele (II.386).

Astfel, punctul principal H_{2G} este centrul de greutate al maselor repartizate pe lungimea s_2 astfel:

— în punctul A masa m_1;

— în punctul G_2 masa m_2+m_3 (fig. II.122, *b*).

Punctul principal H_{G2} este centrul de greutate al maselor repartizate pe lungimea s_2' astfel:

— în punctul G_2 masa m_1+m_2;

— în punctul B masa m_3 (fig. II.122, *c*).

Punctul principal H_{3G} este centrul de greutate al maselor repartizate pe lungimea s_3 astfel:

— în punctul B masa m_1+m_2;

— în punctul G_3 masa m_3 (fig. II.122, *d*).

Se vede imediat că

$$\frac{h_{G2}}{h_{3G}}=\frac{s_2'}{s_3}$$

și deci, în general,

$$\frac{h_{Gj}}{h_{j+1\,G}}=\frac{s_j'}{s_{j+1}}, \qquad \text{(II.388)}$$

și în acest caz sînt valabile egalitățile (II.382), deoarece mecanismul este format din lanț cinematic simplu.

După cum se poate ușor deduce, în cazul cînd originea vectorilor de poziție ai centrelor de greutate este articulația fixă C, atunci:

$$\bar{r}_G'=-\bar{s}_3'+\bar{h}_{3G}'+\bar{h}_{G2}'+\bar{h}_{2G}'+\bar{h}_1',$$

în care:

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{3G}'&=\bar{h}_{3G}-\bar{s}_3;\\
\bar{h}_{G2}'&=\bar{h}_{G2}-\bar{s}_2';\\
\bar{h}_{2G}'&=\bar{h}_{2G}-\bar{s}_2;\\
\bar{h}_1'&=\bar{h}_1-\bar{l}_1.
\end{aligned} \qquad \text{(II.389)}$$

34.3. Determinarea poziției centrului de greutate al mecanismului format din lanț cinematic complex

In cazul acestor mecanisme formulele (II.382) și (II.389) nu mai sînt valabile, deoarece în calcul intră elemente în structura cărora există mai mult decît două cuple cinematice.

Se vor lua pentru demonstrarea celor de mai sus două cazuri ale mecanismului patrulater, și anume:

— a) lungit cu o grupă de clasa a II-a, ordinul 2 (diadă), (fig. II.123);

— b) amplificat cu o diadă (fig. II.124).

1. *Centrul de greutate al mecanismului lungit cu o grupă cinematică de clasa a II-a, ordinul 2.* Se ia ca origine a vectorilor de poziție articulația fixă O. Scriind expresiile vectoriale ale lui $\bar{r}_1,\ldots,\bar{r}_5$, se obține:

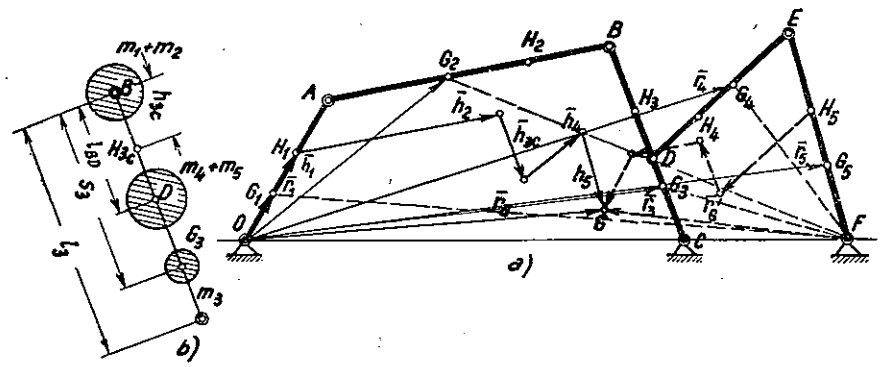


Fig. II.123. Determinarea centrului de greutate G al unui mecanism cu lanţ cinematic complex (mecanism patrulater lungit cu grupa DEF de clasa a II-a, ordinul 2).

$$\bar{r}_1=\bar{s}_1;$$
$$\bar{r}_2=\bar{l}_1+\bar{s}_2;$$
$$\bar{r}_3=\bar{l}_1+\bar{l}_2+\bar{s}_3;$$
$$\bar{r}_4=\bar{l}_1+\bar{l}_2+\bar{l}_{BD}+\bar{s}_4;$$
$$\bar{r}_5=\bar{l}_1+\bar{l}_2+\bar{l}_{BD}+\bar{l}_4+\bar{s}_5.$$

Inlocuindu-i în formula (II.377′) şi grupînd vectorii conform convenţiei, rezultă:

$$\bar{r}_G=\frac{\bar{s}_1m_1+(m_2+\ldots+m_5)\,\bar{l}_1}{m}+\frac{\bar{s}_2m_2+(m_3+\ldots+m_5)\,\bar{l}_2}{m}+$$
$$+\frac{\bar{s}_3m_3+(m_4+m_5)\,\bar{l}_{BD}}{m}+\frac{\bar{s}_4m_4+\bar{l}_4m_5}{m}+\frac{\bar{s}_5m_5}{m} \qquad \text{(II.390)}$$

sau

$$\bar{r}_G=\bar{h}_1+\bar{h}_2+\bar{h}_{3C}+\bar{h}_4+\bar{h}_5, \qquad \text{(II.391)}$$

în care s-a notat:

$$\bar{h}_{3C}=\frac{\bar{s}_3m_3+(m_4+m_5)\,\bar{l}_{BD}}{m},$$

vectorul principal al elementului *3* care face lanţul complex.

Semnificaţia fizică a punctului principal H_{3C} este arătată în fig. II.123, *b*, în care se vede că el este centrul de greutate al masei (m_1+m_2), plasată în articulaţia B,

a masei (m_4+m_5), plasată în articulaţia D,

şi a masei m_3, plasată în centrul de greutate G_3 al elementului *3*.

In fig. II.123, *a* s-a construit $\bar{r}_G$, trasîndu-se cu linii continue suma dată de formula (II.391).

Dacă se alege însă originea vectorilor de poziţie ai lui $G_1,\ldots,G_3$ în F, se observă că aceştia se pot scrie:

$$\bar{r}'_5=-\bar{s}'_5; \qquad (\bar{l}_5=\bar{s}_5+\bar{s}'_5)$$
$$\bar{r}'_4=-\bar{l}_5-\bar{s}'_4;$$
$$\bar{r}'_3=-\bar{l}_5-\bar{l}_4+(\bar{s}_3-\bar{l}_{BD});$$
$$\bar{r}'_2=-\bar{l}_5-\bar{l}_4-\bar{l}_{BD}-\bar{s}'_2;$$
$$\bar{r}'_1=-\bar{l}_5-\bar{l}_4-\bar{l}_{BD}-\bar{l}_2-\bar{s}'_1.$$

Introducînd aceste expresii în formula (II.377′) şi grupînd vectorii conform convenţiei, rezultă:

$$\bar{r}'_G=\frac{m_5\bar{s}'_5+(m_4+\ldots+m_1)\,\bar{l}_5}{m}-\frac{m_4\bar{s}_4+(m_3+\ldots+m_1)\,\bar{l}_4}{m}-$$
$$-\frac{(\bar{l}_{BD}-\bar{s}_3)\,m_3+(m_1+m_1)\,\bar{l}_{BD}}{m}-\frac{\bar{s}'_2m_2+\bar{l}_2m_1}{m}-\frac{\bar{s}'_1m_1}{m} \qquad \text{(II.392)}$$

sau

$$\bar{r}'_G=\bar{h}'_5+\bar{h}'_4+\bar{h}'_{3C}+\bar{h}'_2+\bar{h}'_1. \qquad \text{(II.393)}$$

Comparînd formulele (II.390) şi (II.392), se constată că la toate elementele care au două cuple cinematice sînt satisfăcute egalităţile date de (II.382), afară de elementul *3*, care face lanţul complex şi unde există egalitatea

$$\bar{h}'_{3C}=\bar{h}_{3C}-\bar{l}_{BD}. \qquad \text{(II.394)}$$

Relaţia (II.394) se reduce la una de aceeaşi formă din (II.382) dacă se consideră lungimea elementului *3*

$$\bar{l}_3=\bar{l}_{BD}.$$

Construcţia vectorului de poziţie $\bar{r}'_G$ este trasată cu linii întrerupte.

2. Centrul de greutate al unui mecanism amplificat cu o grupă cinematică formată din lanţ simplu (grupă de clasa a II-a, ordinul 2).

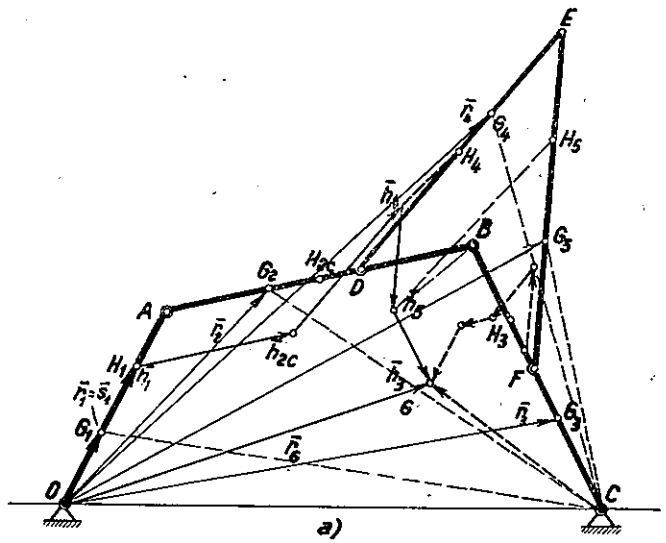
Se ia ca origine a vectorilor de poziţie articulaţia fixă O.

Cu notaţiile din figură, vectorii de poziţie $\bar{r}_1,\ldots,\bar{r}_5$ se pot scrie (fig. II.124):

$$\bar{r}_1=\bar{s}_1;$$
$$\bar{r}_2=\bar{l}_1+\bar{s}_2;$$
$$\bar{r}_3=\bar{l}_1+\bar{l}_2+\bar{s}_3;$$
$$\bar{r}_4=\bar{l}_1+\bar{l}_{AD}+\bar{s}_4;$$
$$\bar{r}_5=\bar{l}_1+\bar{l}_{AD}+\bar{l}_4+\bar{s}_5.$$

Introduşi în (II.377) şi grupaţi conform convenţiei, rezultă:

$$\bar{r}_G=\frac{m_1\bar{s}_1+(m_3+\ldots+m_5)\,\bar{l}_1}{m}+\frac{m_2\bar{s}_2+m_3\bar{l}_2+(m_4+m_5)\,\bar{l}_{AD}}{m}+$$
$$+\frac{m_4\bar{s}_4+m_5\bar{l}_4}{m}+\frac{m_4\bar{s}_5}{m}+\frac{m_3\bar{s}_3}{m} \qquad \text{(II.395)}$$



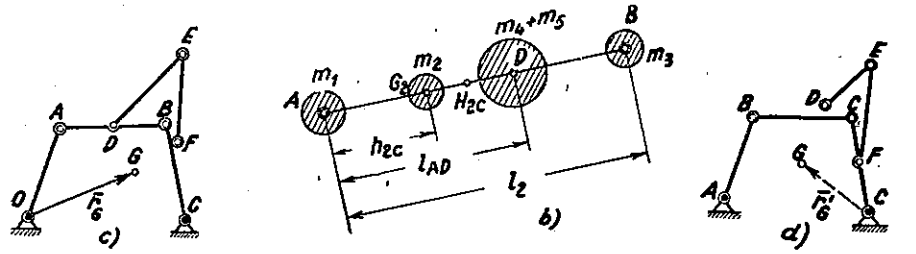


Fig. II.124. Determinarea centrului de greutate G al unui mecanism cu lanţ cinematic complex (mecanism patrulater amplificat cu grupa DEF de clasa a II-a, ordinul 2).

sau

$$\bar{r}_G=\bar{h}_1+\bar{h}_{2C}+\bar{h}_4+\bar{h}_5+\bar{h}_3, \qquad \text{(II.396)}$$

în care:

$$\bar{h}_{2C}=\frac{m_2\bar{s}_2+m_3\bar{l}_2+(m_4+m_5)\,\bar{l}_{AD}}{m},$$

iar punctul principal H_{2C} se obţine plasînd masele $m_1,\ldots,m_5$, aşa cum s-a arătat în fig. II.124, *b*.

Celelalte puncte principale se obţin după procedeul cunoscut, considerînd că diada (45) nu mai este articulată în F la braţul mecanismului patrulater (fig. II.124, *c*).

Respectînd această regulă, se poate deduce imediat poziţia lui G şi dacă se ia ca origine articulaţia fixă C. In acest caz se neglijează articulaţia D a diadei (45) cu elementul *2* (fig. II.124, *d*).

Calculul vectorilor principali trebuie de aceea refăcut, deoarece regula dată de egalităţile (II.382) nu este valabilă decît pentru elementul *1* (care are două cuple cinematice).

Pentru calculul lui $\bar{r}_G$ (originea în O), se consideră mecanismul ca în fig. II.124, *c* şi se obţine conturul vectorilor principali trasaţi cu linie continuă în fig. II.124, *a*.

Pentru calculul lui $\bar{r}'_G$ (originea în C), se consideră mecanismul ca în fig. II.124, *d* şi se obţine conturul vectorilor principali trasaţi cu linii întrerupte în fig. II.124, *a*.

Un exemplu de determinare a centrului de greutate la un mecanism format din lanţ complex lungit este arătat în fig. II.125, care reprezintă schema cinematică a unui motor Diesel în doi timpi cu pompă de spălare (baleiaj).

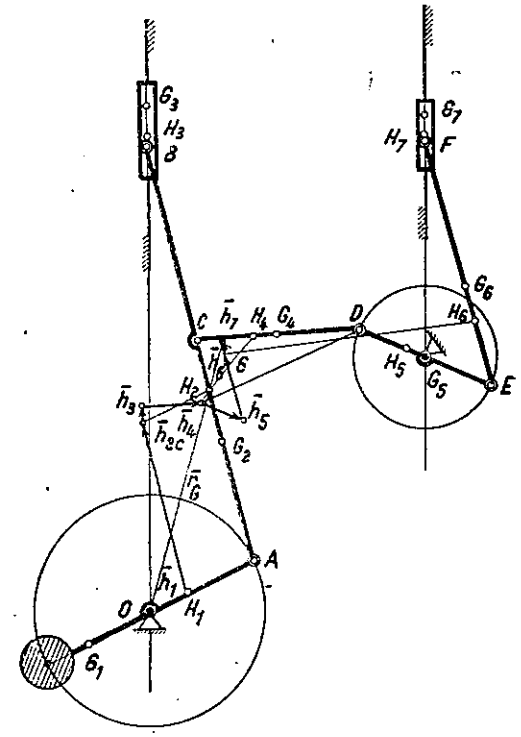


Fig. II.125. Determinarea centrului de greutate G al unui mecanism cu lanţ cinematic complex (motor Diesel cu pompă de spălare).

Suma vectorilor principali considerînd originea în punctul O este:

$$\bar{r}_G=\bar{h}_1+\bar{h}_{2C}+\bar{h}_3+\bar{h}_4+\bar{h}_5+\bar{h}_6+\bar{h}_7.$$

In calculul lui h_5 nu se ia în consideraţie articulaţia G_5 a manivelei *5* cu baza.

34.4. Determinarea acceleraţiei centrului de greutate şi a forţei de inerţie rezultante a mecanismului

Acceleraţia centrului de greutate G se determină uşor dacă se întrebuinţează un artificiu de calcul, care permite folosirea metodei planelor vitezelor şi acceleraţiilor.

Pentru aceasta se va căuta ca prin amplificarea mecanismului prin diade, articulaţia interioară a uneia dintre diade să coincidă cu centrul de greutate al mecanismului iniţial.

Cu cît poligonul vectorilor principali are mai multe laturi, cu atît vor fi necesare mai multe diade.

Ca exemplu se va lua mecanismul patrulater din fig. II.126, *a*, căruia i s-au calculat vectorii principali $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{h}_3$ şi s-au fixat pe elemente punctele principale H_1, H_2 şi H_3.

Se va adăuga în H_1 şi B diada H_1DB, astfel încît figura $ABDH_1$ să fie un paralelogram.

Se adaugă apoi în D şi C diada DEC, astfel încît şi figura $BCED$ să fie tot un paralelogram.

Pe braţele H_1D şi DE se iau articulaţiile F, respectiv L, astfel încît

$$\bar{H}_1F=\bar{h}_2 \quad \text{şi} \quad \bar{D}L=\bar{h}_3.$$

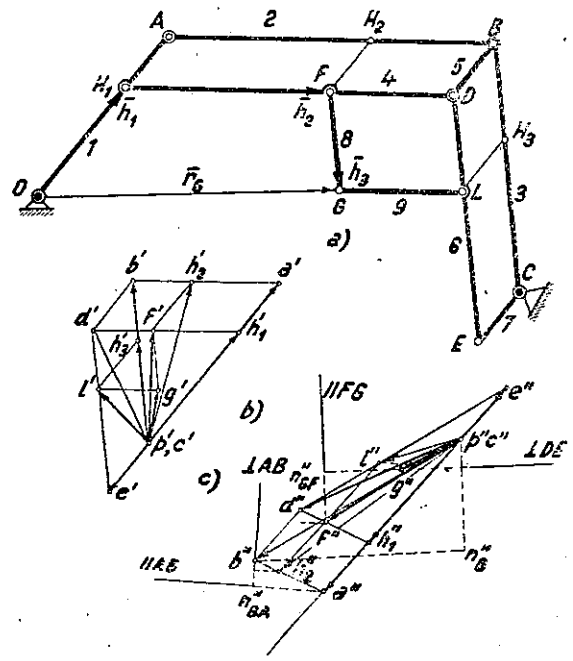


Fig. II.126. Calculul grafic al acceleraţiei centrului de greutate G al unui mecanism patrulater.

De articulaţiile F şi L se leagă o a treia diadă FGL, care de asemenea formează paralelogramul $DFGL$, deci $FG=DL=\bar{h}_3$.

Se vede imediat că articulaţia G a acestei din urmă diade coincide cu centrul de greutate al patrulaterului $DABC$.

Problema se reduce astfel la determinarea acceleraţiei punctului G al mecanismului amplificat, cu ajutorul planului acceleraţiilor.

Construcţia se face pentru o serie de poziţii ale mecanismului în timpul ciclului cinematic putîndu-se trasa hodograful lui $\bar{a}_G$.

Cea mai mare valoare a lui $\bar{a}_G$ va da maximul forţei de inerţie rezultante a mecanismului.

In fig. II.126, *b* şi *c* sînt construite planele vitezelor şi acceleraţiilor. Pentru uşurinţa construcţiei planul vitezelor este rotit cu 90°.

Construcţia acestor plane este mult uşurată din cauza paralelismului care există între planele diferitelor elemente, datorită cărui fapt planele elementelor:

— *2, 4* şi *9* au aceeaşi viteză şi acceleraţie unghiulară ω_2, ε_2;

— *3, 6* şi *8* au aceeaşi viteză şi acceleraţie unghiulară ω_3, ε_3.

Astfel (fig. II.126, *c*):

$$\bar{v}_{DB}=\bar{v}_{FH_2}=\bar{v}_{LH_3}=\bar{v}_E; \quad \bar{v}_{BA}=\bar{v}_{DH_1}$$

şi

$$\bar{a}_{DH_1}=\bar{a}_{BA}=k_a(\overline{a''b''}).$$

O dată construit $\bar{a}_B$, se determină deci imediat:

$$(\overline{h''_1d''})\#(\overline{a''b''})$$

şi de aici cu metoda asemănării punctul f'', deci:

$$\bar{a}_F=k_a(\overline{p''f''}).$$

Deoarece

$$\bar{a}_E=\bar{a}^{\nu}_{DB}=k_a(\overline{b''d''})$$

se construieşte din polul p'' vectorul:

$$\bar{a}_E=k_a(\overline{p''e''})$$

şi de aici, cu ajutorul metodei asemănării, se deduce punctul l'', vîrful vectorului $\bar{a}_L=k_a(\overline{p''l''})$.

Cu $\bar{a}_L$ şi $\bar{a}_F$ se găseşte $\bar{a}_G$ construind ecuaţia:

$$\bar{a}_G=\bar{a}_L+\bar{a}^{\nu}_{GL}+\bar{a}^{\tau}_{GL}=\bar{a}_F+\bar{a}^{\nu}_{GF}+\bar{a}^{\tau}_{GF}=k_a(\overline{p''g''}).$$

Forţa de inerţie care acţionează asupra bazei mecanismului prin intermediul articulaţiilor cu axe de rotaţie fixe este:

$$\bar{F}_{iG}=-m\bar{a}_G=-mk_a(\overline{p''g''}) \text{ [kgf]}. \tag{II.397}$$

In cazul unui mecanism bielă-manivelă (fig. II.127) aflarea forţei de inerţie rezultante se face mult mai uşor, deoarece construirea planelor vitezelor şi acceleraţiilor (fig. II.127, *a* şi *b*) sînt mult mai simple.

Forţa de inerţie rezultantă care acţionează asupra fundaţiei, redusă la articulaţia O a arborelui motor, dă o rezultantă:

$$\bar{F}_{iG}=-mk_a(\overline{p''g''})$$

şi un moment:

$$M_{iG}=d\cdot F_{iG},$$

care caută să rotească maşina în sens invers acelor de ceasornic.

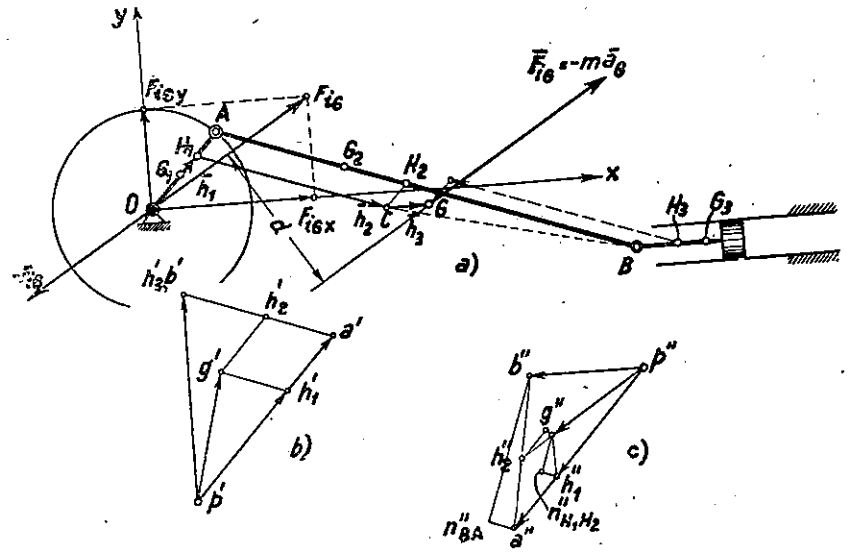


Fig. II.127. Calculul acceleraţiei centrului de greutate G şi a forţei de inerţie rezultante F_{iG} a unui mecanism bielă-manivelă.

Dacă rezultanta se descompune după două direcții x și y, componenta F_{iGx} va căuta (pentru poziția din figură) să foarfece buloanele de fundație, în timp ce componenta F_{iGy} va căuta alternativ, să smulgă mașina de pe fundație (cazul din figură) și să o apese pe fundație.

Aceste efecte se transmit fundației și clădirilor înconjurătoare producînd efecte dăunătoare, așa cum s-a mai menționat la începutul capitolului.

Calculul accelerației centrului de greutate cu ajutorul planului accelerațiilor este recomandabil la mecanismele cu elemente puține și lanțuri cinematice simple, deoarece numai în aceste cazuri mecanismele amplificate cu diade permit construirea relativ rapidă a planului accelerațiilor.

Este suficient să se arate că chiar la un mecanism patrulater la care centrele de greutate nu se află pe axele geometrice care unesc cele două articulații ale elementului respectiv, mecanismul amplificat, deși are nevoie tot de 3 diade (fig. II.128) pentru a cuprinde centrul de greutate G, construirea figurilor asemenea pînă la aflarea lui $\bar{a}_G$ în planul accelerațiilor complică mult construcția.

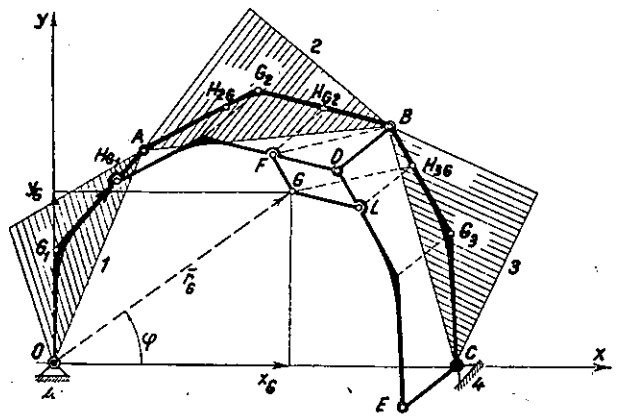


Fig. II.128. Amplificarea cu grupa de clasa II-a, ordinul 2, a unui mecanism patrulater la care centrele de greutate G_1, G_2, G_3 ale elementelor *1*, *2* și *3* nu se află pe axele geometrice OA, AB și BC ale centrelor articulațiilor O, A, B și C.

In acest caz, la mecanismele cu elemente numeroase sau cu forme complicate se părăsește metoda planului accelerațiilor și se adoptă metoda derivării grafice a curbei de deplasare a centrului de greutate.

Metoda este în principiu următoarea:

— Cu ajutorul poligonului vectorilor principali se găsește pentru un număr de poziții ale mecanismului în timpul ciclului cinematic, mărimea vectorului $\bar{r}_G$.

— Se proiectează acest vector pe două axe de coordonate și se găsesc astfel coordonatele centrului de greutate.

— Diferitele valori ale lui x_G și y_G (fig. II.128) în timpul ciclului cinematic se trec pe ordonatele unor diagrame în care pe abscisă se ia unghiul de rotație φ al elementului inițial.

Se obțin astfel curbele:

$$x_G = f_x(\varphi); \quad y_G = f_y(\varphi). \tag{II.398}$$

— Se derivează grafic de două ori curbele de mai sus și se obțin astfel curbele de variație ale celor două componente ale lui a_G:

$$a_{Gx} = \frac{f_x''(\varphi)}{\omega_1^2} \quad \text{și} \quad a_{Gy} = \frac{f_y''(\varphi)}{\omega_1^2}. \tag{II.399}$$

Direcția accelerației totale va fi dată de unghiul

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{a_{Gy}}{a_{Gx}}. \tag{II.400}$$

§ 35. ECHILIBRAREA STATICĂ A MECANISMELOR ȘI MAȘINILOR

35.1. Condițiile echilibrării statice a mecanismelor

Echilibrarea statică a mecanismelor și a mașinilor, și în general a agregatelor, va fi realizată atunci cînd accelerația centrului de greutate al acestora va fi egală cu zero. Ori, acest lucru nu poate avea loc decît fie atunci cînd centrul de greutate este fix pentru orice poziție a elementelor agregatului în timpul ciclului cinematic, fie cînd este în mișcare rectilinie și uniformă.

Cum ultima situație nu este posibilă din cauză că centrul de greutate al unui agregat nu poate descrie decît o curbă închisă, rezultă că echilibrarea statică a unui agregat va fi realizată atunci cînd masele elementelor acestuia sînt repartizate astfel, încît suma tuturor vectorilor principali să fie constantă, adică:

$$\bar{r}_G = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \ldots + \bar{h}_n = \text{const.} \tag{II.401}$$

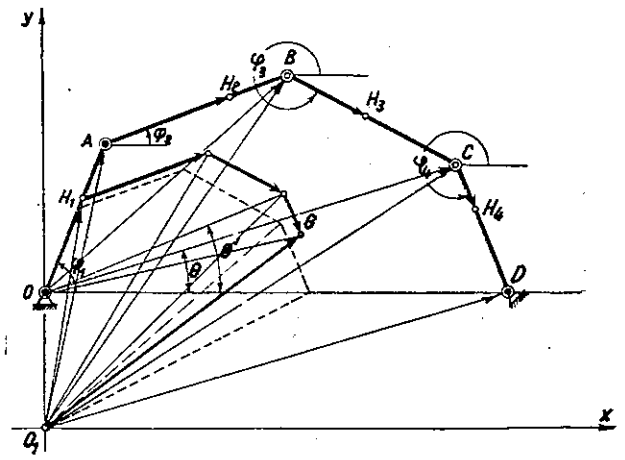


Fig. II.129. Poziția relativă a poligonului vectorilor principali față de a mecanismului.

Se va arăta mai jos că din condiția dată de (II.401) rezultă asemănarea dintre poligonul vectorilor principali și poligonul mecanismului, centrul de omotetie al celor două figuri asemenea fiind originea O a mecanismului.

Se va folosi în acest scop calculul cu numere complexe. Fie (fig. II.129) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ unghiurile pe care le fac cu axa O_1x laturile $l_1, l_2, \ldots, l_n$ și vectorii principali ai unui mecanism format din lanț cinematic simplu.

In planul complex xOy afixele: Z_j al articulației mecanismului și vîrful z_j corespunzător din poligonul vectorilor principali vor fi egale cu:

$$Z_j = \sum_{k=1}^{j} l_k \cos\varphi_k + i\left(\sum_{k=1}^{j} l_k \sin\varphi_k + y_0\right) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

respectiv

$$z_j = \sum_{k=1}^{j} h_k \cos\varphi_k + i\left(\sum_{k=1}^{j} h_k \sin\varphi_k + y_0\right).$$

Dacă pentru simplificarea calculului se ia originea în O, deci $y_0=0$, se obține:

$$Z_j=\sum_{k=1}^{j} l_k\cos\varphi_k+i\sum_{k=1}^{j} l_k\sin\varphi_k; \tag{II.402}$$

$$z_j=\sum_{k=1}^{j} h_k\cos\varphi_k+i\sum_{k=1}^{j} h_k\sin\varphi_k. \tag{II.403}$$

Baza mecanismului fiind însăși axa Ox, rezultă imediat că

$$Z_n=\sum_{k=1}^{n} l_k\cos\varphi_k+i\sum_{k=1}^{n} l_k\sin\varphi_k=\rho_n\,(\text{real}). \tag{II.404}$$

Pentru ca centrul de greutate să fie fix trebuie deci ca:

$$z_n=\sum_{k=1}^{n} h_k\cos\varphi_k+i\sum_{k=1}^{n} h_k\sin\varphi_k=r_G\ (\text{real})=\text{const}. \tag{II.405}$$

Din (II.404) și (II.405) rezultă imediat relațiile de mai jos:

$$\sum_{k=1}^{n} l_k\cos\varphi_k=\rho_n;\quad \sum_{k=1}^{n} l_k\sin\varphi_k=0; \tag{II.406}$$

și

$$\sum_{k=1}^{n} h_k\cos\varphi_k=r_G;\quad \sum_{k=1}^{n} h_k\sin\varphi_k=0. \tag{II.407}$$

De asemenea, din (II.402) și (II.403) rezultă

$$\frac{Z_j-Z_{j-1}}{z_j-z_{j-1}}=\frac{l_j\cos\varphi_j+il_j\sin\varphi_j}{h_1\cos\varphi_1+ih_j\sin\varphi_j}=\frac{l_j}{h_j}\ (\text{real}). \tag{II.408}$$

Dacă se notează

$$Z_j=\rho_j e^{i\theta_j}=\rho_j(\cos\theta_j+i\sin\theta_j) \tag{II.409}$$

și

$$z_j=r_j e^{i\theta'_j}=r_j(\cos\theta'_j+i\sin\theta'_j), \tag{II.410}$$

atunci raportul dat de (II.408) devine

$$\frac{Z_j-Z_{j-1}}{z_j-z_{j-1}}=\frac{(\rho_j\cos\theta_j-\rho_{j-1}\cos\theta_{j-1})+i(\rho_j\sin\theta_j-\rho_{j-1}\sin\theta_{j-1})}{(r_j\cos\theta'_j-r_{j-1}\cos\theta'_{j-1})+i(r_j\sin\theta'_j-r_{j-1}\sin\theta'_{j-1})}=\frac{l_j}{h_j}.$$

Pentru ca această egalitate să aibă loc trebuie ca partea imaginară a raportului să fie zero adică:

$$(\rho_j\cos\theta_j-\rho_{j-1}\cos\theta_{j-1})(r_j\sin\theta'_j-r_{j-1}\sin\theta'_{j-1})=$$
$$=(\rho_j\sin\theta_j-\rho_{j-1}\sin\theta_{j-1})(r_j\cos\theta'_j-r_{j-1}\cos\theta'_{j-1}).$$

Făcînd calculele, se ajunge la identitatea:

$$r_j\rho_j\sin(\theta_j-\theta'_j)+\rho_{j-1}r_{j-1}\sin(\theta_{j-1}-\theta'_{j-1})=$$
$$=\rho_{j-1}r_j\sin(\theta_{j-1}-\theta'_j)+\rho_j r_{j-1}\sin(\theta_j-\theta'_{j-1}). \tag{II.411}$$

Deoarece totdeauna vor exista inegalitățile

$$\theta_{j-1}\neq\theta'_j\quad\text{și}\quad\theta_j\neq\theta'_{j-1},$$

rezultă că pentru ca (II.411) să existe pentru orice valori ale lui θ_j, θ_{j-1}, ... în timpul ciclului cinematic, este necesar și suficient ca:

$$\theta_j=\theta'_j;\quad\theta_{j-1}=\theta'_{j-1} \tag{II.412}$$

și

$$\rho_{j-1}r_j-\rho_j r_{j-1}=0,$$

de unde:

$$\frac{\rho_{j-1}}{r_{j-1}}=\frac{\rho_j}{h_j}. \tag{II.413}$$

Cu ajutorul relațiilor (II.412), (II.413) și (II.408) se deduce că valoarea raportului de asemănare este

$$\frac{Z_j-Z_{j-1}}{z_j-z_{j-1}}=\frac{\rho_j}{r_j}=\frac{\rho_{j-1}}{r_{j-1}}=\frac{l_j}{h_j}. \tag{II.414}$$

Formula (II.414) arată că punctul O luat ca origine este centrul de omotetie al celor două figuri asemenea: mecanismul și contorul vectorilor principali.

Pentru cazul unui mecanism echilibrat static format din 5 elemente (fig. II.130) centrul de greutate G poate ocupa trei poziții, după modul cum s-a realizat echilibrarea cu ajutorul contragreutăților

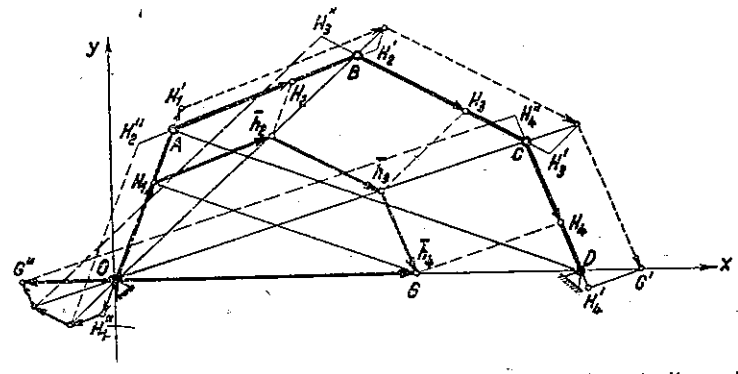


Fig. II.130. Schema cinematică a unui mecanism și a poligonului vectorilor principali în cazul cînd mecanismul este echilibrat static.

Cînd raportul de asemănare

$$\frac{l_j}{h_j}>1, \tag{II.415}$$

poligonul vectorilor principali se prezintă cu centrul de greutate G între cele două articulații fixe O și D.

Cînd raportul de asemănare

$$0<\frac{l_j}{h_j}<1,$$

centrul de greutate G este în afara celor două articulații fixe O și D (punctul G' în figură), în sensul pozitiv față de origine (omotetie directă).

Cînd raportul de asemănare

$$\frac{l_j}{h_j}<0,$$

centrul de greutate G este în afara celor două articulații fixe O și D (punctul G'' în figură), însă în sensul negativ față de originea O (omotetie inversă).

Echilibrarea care este mai ușor realizabilă rezultă numai din expresia (II.415), care se poate scrie

$$\frac{l_1}{h_1}=\frac{l_2}{h_2}=\ldots=\text{const.}>1. \qquad \text{(II.415')}$$

La mecanismele bielă-manivelă, deci cu cuple de translație legate la bază, condiția de echilibrare statică dată de (II.414) nu este valabilă, deoarece G ar avea și în acest caz o mișcare rectilinie alternativă.

La astfel de mecanisme condiția de echilibrare este:

$$\bar{h}_1=\bar{h}_2=\ldots=\bar{h}_n=0, \qquad \text{(II.416)}$$

adică centrul de greutate G al întregului mecanism să coincidă cu articulația fixă O $\left(\text{raport de omotetie}\ \frac{h_j}{l_j}=0\right)$.

35.2. Echilibrarea statică a mecanismului patrulater

S-a văzut că pentru a se realiza o astfel de echilibrare este necesar ca repartizarea maselor elementelor să fie făcută astfel, încît centrul de greutate G să se afle pe dreapta OD (fig. II.130).

Dacă masele elementelor nu îndeplinesc de la început această condiție, se vor adăuga contragreutăți, care să realizeze echilibrarea impusă.

Fie mecanismul patrulater $OABC$ (fig. II.131, a) căruia urmează să i se facă echilibrarea statică.

Masele m_1', m_2', m_3' considerate concentrate în centrele de greutate G_1, G_2, G_3 se vor repartiza static în cele două articulații folosind formulele (I.47).

Astfel:

Masa m_1' se va repartiza (concentra) în cele două centre ale articulațiilor O și A astfel:

$$\text{în } O\colon m_{1O}=\frac{l_1-s_1}{l_1}m_1';\quad \text{în } A\colon m_{1A}=\frac{s_1}{l_1}m_1'.$$

Masa m_2' se va repartiza în A și B astfel:

$$\text{în } A\colon m_{2A}=\frac{l_2-s_2}{l_2}m_2';\quad \text{în } B\colon m_{2B}=\frac{s_2}{l_2}m_2'.$$

Masa m_3' se va repartiza în B și C astfel:

$$\text{în } B\colon m_{3B}=\frac{l_3-s_3}{l_3}m_3';\quad \text{în } C\colon m_{3C}=\frac{s_3}{l_3}m_3'.$$

Mecanismul patrulater se înlocuiește astfel cu patru mase punctiforme repartizate în cele patru articulații și ale căror mărimi sînt:

$$\begin{aligned}
&\text{în } O\colon m_{1O}=\frac{l_1-s_1}{l_1}m_1';\\
&\text{în } A\colon m_A=m_{1A}+m_{2A}=\frac{s_1}{l_1}m_1'+\frac{l_2-s_2}{l_2}m_2';\\
&\text{în } B\colon m_B=m_{2B}+m_{3B}=\frac{s_2}{l_2}m_2'+\frac{l_3-s_3}{l_3}m_3';\\
&\text{în } C\colon m_{3C}=\frac{s_3}{l_3}m_3'.
\end{aligned} \qquad \text{(II.417)}$$

Echilibrarea mecanismului astfel simplificat se reduce la echilibrarea a două mase în mișcare de rotație.

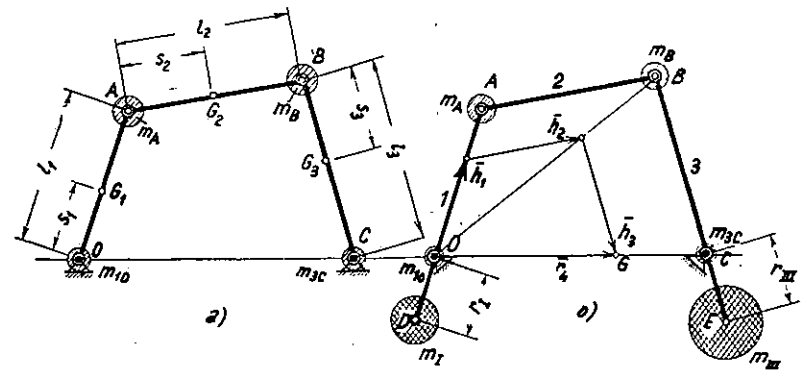


Fig. II.131. Mecanismul patrulater (fig. II.131, a) echilibrat static cu două contragreutăți una în prelungirea manivelei OA și a doua în prelungirea brațului BC (fig. II.131, b).

Prima soluție este arătată în fig. II.131, b, din care se constată că fiecare dintre cele două mase m_A și m_B se echilibrează cu cîte o contragreutate m_I și m_{III}, plasate în prelungirea manivelei *1* (respectiv a brațului *3*), în D și E.

Dacă se aleg distanțele r_I și r_{III} la care se plasează centrele de greutate ale celor două contragreutăți, masele lor se vor determina din următoarele formule:

$$m_I r_I=m_A l_1,\quad \text{de unde}\quad m_I=\frac{l_1}{r_I}m_A;$$

$$m_{III} r_{III}=m_B l_3,\quad \text{de unde}\quad m_{III}=\frac{l_3}{r_{III}}m_B.$$

Centrul de greutate G al mecanismului astfel echilibrat se află pe dreapta OC (fig. II.131, b).

Distanţa r_G rezultă observînd că:

în O este concentrată masa $m_O=m_I+m_{1O}+m_A$;

în C este concentrată masa $m_C=m_{III}+m_{3C}+m_B$,

iar

$$r_G=\frac{m_C}{m}l_{OC}, \quad \text{unde} \quad m=m_O+m_C.$$

După determinarea lui r_G, poligonul vectorilor principali rezultă imediat, deoarece raportul de asemănare este cunoscut folosind formula (II.414):

$$\frac{l_1}{h_1}=\frac{l_2}{h_2}=\frac{l_3}{h_3}=\frac{l_{OC}}{r_G}=\frac{m}{m_C}>1. \tag{II.418}$$

Din expresiile vectorilor principali ai mecanismului astfel echilibrat (II.381) se observă că:

$$m_1=m_O; \quad m_2=0; \quad m_3=m_C;$$

$$m_1+m_2+m_3=m=m_O+m_C;$$

$$s_1=0; \quad s_3=l_3;$$

deci

$$h_1=\frac{m_1s_1+(m_2+m_3)l_1}{m}=\frac{m_C}{m}l_1;$$

$$h_2=\frac{m_2s_3+m_3l_2}{m}=\frac{m_C}{m}l_2;$$

$$h_3=\frac{m_3s_3}{m}=\frac{m_C}{m}l_3.$$

Se obţine şi pe această cale relaţia (II.418).

A doua şi a treia soluţie sînt arătate în fig. II.132, a şi b.

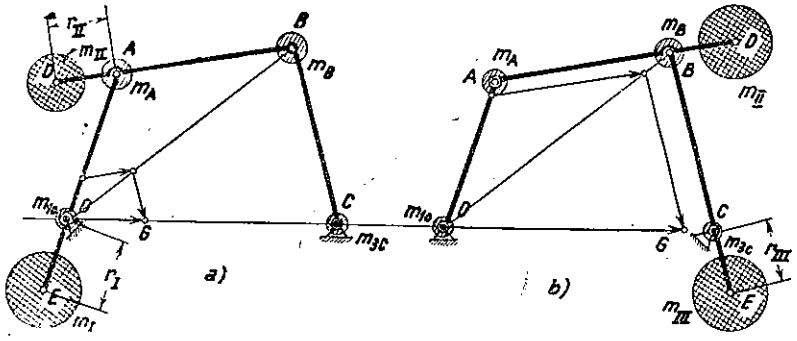


Fig. II.132. Mecanismul patrulater echilibrat static: prin două contragreutăţi, una în prelungirea bielei şi alta în prelungirea manivelei (fig. II.132, a), sau cu o contragreutate în prelungirea bielei şi a doua în prelungirea braţului (fig. II.132, b).

In ambele cazuri cele patru mase punctiforme au valorile date de formulele (II.417).

Pentru soluţia din fig. II.132, a contragreutatea de masă m_{II} va fi dată de relaţia

$$m_{II}r_{II}=m, \quad \text{de unde} \quad m_{II}=\frac{l_2}{r_{II}}m_B.$$

După plasarea contragreutăţii G_{II} în punctul D, se va echilibra masa totală concentrată în A şi egală cu

$$m'_A=m_A+m_{II}+m_B,$$

cu o contragreutate de masă m_I, plasată în punctul E, la distanţa r_I de articulaţia fixă O în prelungirea lui OA.

Mărimea acestei contragreutăţi este dată de relaţia

$$m_Ir_I=m'_Al_1, \quad \text{de unde} \quad m_I=\frac{l_1}{r_I}m'_A.$$

In felul acesta mecanismul echilibrat are centrele de greutate ale elementelor în articulaţiile cu axele de rotaţie fixe, şi anume:

în O: unde se consideră concentrată masa

$$m_O=m_I+m_{1O}+m'_A;$$

în C: unde se află masa m_{3C}.

Vectorul r_G este deci dat de expresia:

$$r_G=\frac{m_{3C}}{m}OC, \quad \text{unde} \quad m=m_O+m_{3C}.$$

Centrul de greutate G este foarte aproape de articulaţia O, iar raportul de asemănare al celor două poligoane, foarte mare:

$$\frac{l_1}{h_1}=\frac{l_2}{h_2}=\frac{l_3}{h_3}=\frac{OC}{r_G}=\frac{m}{m_{3C}}>1. \tag{II.419}$$

Soluţia din fig. II.132, b este identică cu cea precedentă, cu deosebirea că G este foarte aproape de C, deoarece raportul de asemănare:

$$\frac{l_1}{h_1}=\frac{l_2}{h_2}=\frac{l_3}{h_3}=\frac{OC}{r_G}=\frac{m}{m_C}>1, \tag{II.420}$$

unde

$$m_C=m_A+m_B+m_{II}+m_{3C}+m_{III}=m-m_{1O},$$

Folosind formulele (II.381) în care se va pune:

$$m_1=m_{1O}; \quad m_2=m_A+m_B+m_{II}; \quad m_3=m_{3C}+m_{III}:$$

$$m_2+m_3=m-m_{1O}.$$

$$s_1=0; \quad s_2=l_2; \quad s_3=l_3+\frac{m_{III}r_{III}}{m_{III}+m_{3C}},$$

se obţine:

$$h_1=\frac{m_1s_1+(m_2+m_3)\,l_1}{m}=\frac{m-m_{1O}}{m}\,l_1\,; \qquad \text{(a)}$$

$$h_2=\frac{m_2s_2+m_3l_2}{m}=\frac{m-m_{1O}}{m}\,l_2\,; \qquad \text{(b)}$$

$$h_3=\frac{m_3s_3}{m}=\frac{(m_{3C}+m_{III})}{m}\left(l_3+\frac{m_{III}r_{III}}{m_{III}+m_{3C}}\right)=\frac{m_{III}l_3+m_{3C}l_3+m_{III}r_{III}}{m}\,,$$

dar cum $m_{III}r_{III}=l_3(m_A+m_B+m_{II})$, înlocuind mai sus rezultă:

$$h_3=\frac{m-m_{1O}}{m}\,l_3. \qquad \text{(c)}$$

Din (a), (b) şi (c) rezultă raportul (II.420).

35.3 Echilibrarea statică a mecanismului bielă-manivelă (motoarele şi maşinile monocilindrice)

S-a văzut că pentru realizarea unei echilibrări perfecte a unui astfel de mecanism trebuie satisfăcute relaţiile (II.416).

In cazul mecanismului bielă-manivelă echilibrarea se realizează prin două contragreutăţi: una de masă m_{II}, plasată în prelungirea bielei AB, şi a doua de masă m_I, plasată în prelungirea manivelei motoare OA (fig. II.133).

Se procedează la repartizarea statică a maselor în articulaţii şi se obţine în final:

în articulaţia O: masa $m_{1O}=\frac{r-s_1}{r}m_1'$;

în articulaţia A: masa $m_A=m_{1A}+m_{2A}=\frac{s_1}{r}m_1'+\frac{l-s_2}{l}m_2'$;

în articulaţia B: masa $m_B=m_{2B}+m_3'=\frac{s_2}{l}m_2'+m_3'$.

Contragreutatea din prelungirea bielei motoare are valoarea

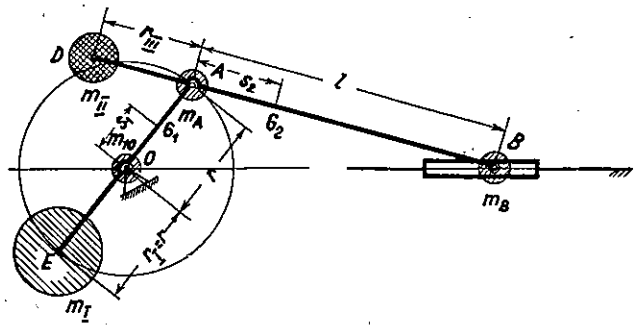


Fig. II.133. Echilibrarea mecanismului bielă-manivelă prin două contragreutăţi, una în prelungirea bielei (m_{II}) şi alta în prelungirea manivelei (m_I).

$$m_{II}=m_B\frac{l}{r_{II}}.$$

Cele 3 mase $m_{II}+m_A+m_B=m_A'$ se echilibrează cu o contragreutate:

$$m_I=m_A'\frac{r}{r_I}.$$

In felul aceasta, masa totală m a mecanismului astfel echilibrat, egală cu

$$m=m_I+m_{1O}+m_A',$$

are centrul de greutate în articulaţia O, deci fix.

Vectorii principali sînt zero, după cum se poate vedea mai jos.
In adevăr:

$$h_1=\frac{m_1s_1+(m_2+m_3)r}{m};$$

$$h_2=\frac{m_2s_2+m_3l}{m};$$

$$h_3=\frac{m_3s_3}{m}.$$

In aceste formule:

$$m_1=m_I+m_{1O};\quad m_2=m_{II}+m_A+m_B=m_A';\quad m_3=0;$$

$$s_1=-\frac{m_I}{m_I+m_{1O}}r_I;\quad s_2=0;\quad s_3=0.$$

Ţinînd seamă de aceste valori, se obţine:

$$h_1=\frac{-m_Ir_I+m_A'r}{m}=0;$$

$h_2=0$ şi $h_3=0$.

Procedeul de echilibrare indicat mai sus nu este practic, deoarece măreşte masele, scumpind construcţia.

De aceea se adoptă echilibrarea parţială a mecanismului cu o singură contragreutate plasată în prelungirea manivelei motoare (fig. II.134).

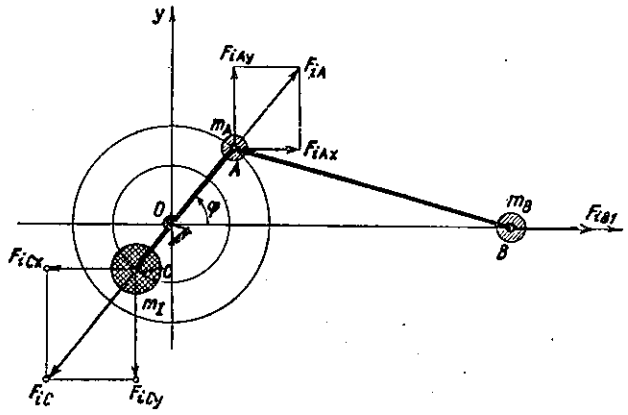


Fig. II.134. Echilibrarea parţială a mecanismului bielă-manivelă printr-o singură contragreutate (m_I).

Mecanismul este echilibrat şi aici cu o masă m_A în mişcare de rotaţie, care dezvoltă o forţă centrifugă

$$F_{iA}=m_Ar\omega^2$$

şi o masă m_B în mişcare de translaţie, care dezvoltă o forţă de inerţie:

$$F_{iB}=-m_Ba_B=m_Br\omega^2(A_1\cos\varphi+A_2\cos 2\varphi-A_4\cos 4\varphi+-\ldots+$$
$$+A_{2n}\cos 2n\varphi-\ldots),$$

unde ($n=3k$), iar coeficienţii $A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$ sînt daţi de formulele (II.20).

Valoarea acceleraţiei pistonului arată că forţa de inerţie a masei m_B este compusă dintr-o sumă de termeni a căror perioadă de variaţie are diferite frecvenţe.

Astfel, F_{iB} se poate scrie:

$$F_{iB}=F_{iB1}+F_{iB2}+F_{iB4}+\ldots+F_{iB2n}+\ldots$$

n care:

$F_{iB1}=m_BA_1r\omega^2\cos\varphi$ — forţa de inerţie de ordinul 1;

$F_{iB2}=m_BA_2r\omega^2\cos 2\varphi$ — forţa de inerţie de ordinul 2;

$F_{iB4}=m_BA_4r\omega^2\cos 4\varphi$ — forţa de inerţie de ordiul 4;

$F_{iBn}=m_BA_{2n}r\omega^2\cos 2n$ — forţa de inerţie de ordinul $2n$.

Forţa de inerţie de ordinul $2n$ are o perioadă de oscilaţie

$$T_{2n}=\frac{2\pi}{2n\omega},$$

deci de $2n$ ori mai mică decît a forţei de inerţie de ordinul 1 şi, deci, o frecvenţă de $2n$ ori mai rapidă.

Echilibrarea acestor forţe de inerţie nu se va putea face decît cu mase care să aibă frecvenţe de variaţie corespunzătoare.

Rezultă că forţele de inerţie de ordine superioare $(2,4,\ldots)$ dezvoltate de masa m_B nu pot fi echilibrate de mase care se rotesc cu viteza unghiulară ω, deoarece acestea dezvoltă forţe de inerţie de ordinul 1.

Se va examina mai departe cum se poate echilibra parţial forţa de inerţie rezultantă de ordinul 1.

Se va arăta întîi care este valoarea şi cum variază acest vector în timpul ciclului cinematic al motorului.

Proiecţia pe axa x (direcţia de deplasare a pistonului) a forţelor de inerţie ale celor două mase sînt:

$$F_{ix1}=F_{iAx1}+F_{iBx1}=r\omega^2(m_A+m_B)\cos\varphi. \qquad (II.421)$$

Proiecţia pe axa y provine numai de la forţa F_{iA} şi este:

$$F_{iy1}=F_{iAy1}=r\omega^2m_A\sin\varphi. \qquad (II.422)$$

Mărimea vectorului rezultant al forţei de inerţie de ordinul 1 este deci:

$$F_{i1}=\sqrt{F_{ix1}^2+F_{iy1}^2}. \qquad (II.423)$$

Vîrful acestui vector se mişcă în timpul unui ciclu cinematic pe o curbă a cărei ecuaţie rezultă din eliminarea lui φ din ecuaţiile parametrice (II.421) şi (II.422), adică pe elipsa:

$$\frac{F_{ix1}^2}{r^2\omega^4(m_A+m_B)^2}+\frac{F_{iy1}^2}{r^2\omega^4m_A^2}=1. \qquad (II.424)$$

Semiaxele acestei elipse sînt (fig. II.135):

$a=r\omega^2(m_A+m_B)$ — semiaxa în direcţia lui Ox;

$b=r\omega^2m_A$ — semiaxa în direcţia lui Oy;

Unghiul pe care acest vector îl face cu Ox este:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{F_{iy1}}{F_{ix1}}=\frac{m_A}{m_A+m_B}\operatorname{tg}\varphi. \qquad (II.425)$$

După cum rezultă din fig. II.135 vectorul F_{i1} se roteşte în cadranele I şi III întîi mai încet decît F_{iA} (deoarece $\operatorname{tg}\varphi>\operatorname{tg}\alpha$) după care — viteza de rotaţie crescîndu-i — îl ajunge pe F_{iA} cînd $\varphi=\frac{\pi}{2}$, respectiv $\frac{3\pi}{2}$.

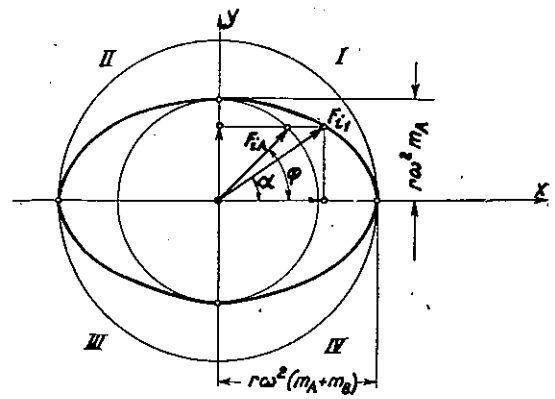


Fig. II.135. Variaţia vectorului rezultant F_{i1} al forţei de inerţie de ordinul 1 la mecanismul bielă-manivelă.

In cadranele II şi IV fenomenul este invers.

Din această analiză a modului cum variază F_{i1} atît ca mărime cît şi ca direcţie rezultă imposibilitatea tehnică de echilibrare a lui.

Masa în mişcare de rotaţie neuniformă ar trebui să dezvolte o forţă centrifugă de mărime variabilă.

Echilibrarea parţială se face în mai multe variante.

a) Dacă planul Ox în care acţionează forţa F_{iB1} este mai puţin stabil, atunci acţiunea acesteia se mută în planul perpendicular Oy, prin plasarea în prelungirea manivelei motoare a unei mase

$$m_I=\frac{r}{r_I}(m_A+m_B). \qquad (II.426)$$

Forţa centrifugă dezvoltată de această masă va anula prin componenta sa după axa x

$$F_{icx}=r_Im_I\omega^2\cos\varphi=rm_A\omega^2\cos\varphi+rm_B\omega^2\cos\varphi$$

atît acţiunea componentei după aceeaşi axă Ox a masei m_A, adică pe

$$F_{iAx}=r\omega^2m_A\cos\varphi,$$

cît şi forţa de inerţie de ordinul 1 a masei m_B, adică pe

$$F_{iB1}=r\omega^2m_B\cos\varphi.$$

De asemenea, componenta după axa Oy, adică

$$F_{icy}=r_Im_I\omega^2\sin\varphi=rm_A\omega^2\sin\varphi+rm_B\omega^2\sin\varphi,$$

va anula componenta după aceeaşi axă a masei m_A, adică pe

$$F_{iAy}=r\omega^2m_A\sin\varphi.$$

Va rămîne însă neechlilibrată forţa de inerţie

$$F_{iy}=r\omega^2 m_B \sin\varphi, \qquad \text{(II.427)}$$

care va transmite fundaţiei eforturi a căror intensitate variază după o lege sinusoidală.

In felul acesta, efectul forţei de inerţie de ordinul 1 a masei m_B în mişcarea de translaţie a fost mutat din planul orizontal în planul perpendicular pe direcţia mişcării.

b) Dacă fundaţia motorului este la fel de stabilă în ambele direcţii, atunci se adoptă o echilibrare parţială, mutîndu-se in planul vertical numai jumătate din forţa de inerţie de ordinul 1 a masei m_B.

Valoarea contragreutăţii este în acest caz

$$m_I'=\frac{r}{r_I}\left(m_A+\frac{m_B}{2}\right) \qquad \text{(II.428)}$$

şi deci rămîn neechilibrate forţele de inerţie de mai jos:

după axa Ox: $F_{ix}=r\omega^2\frac{m_B}{2}\cos\varphi$;

după axa Oy: $F_{iy}=r\omega^2\frac{m_B}{2}\sin\varphi$.

35.4. Echilibrarea forţelor de inerţie de diferite ordine cu greutăţi rotative

Echilibrarea forţei de inerţie a pistonului şi a forţei ce revine din masa bielei (în total deci masa m_B) se poate face cu ajutorul maselor rotative.

Se ştie că orice vector de direcţie constantă şi a cărui mărime variază cosinusoidal se poate înlocui cu doi vectori constanţi ca mărime şi care se rotesc în sens invers unul faţă de altul cu viteza unghiulară egală cu viteza de variaţie a vectorului iniţial.

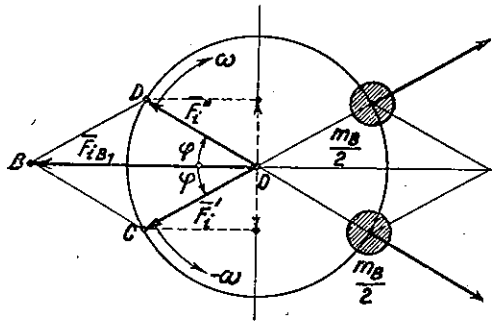


Fig. II.136. Inlocuirea unui vector pulsativ $\bar{F}_{iB1}$, cu doi vectori rotativi $\bar{F}_i'=\bar{F}_i''$.

Dacă, deci, se dă vectorul forţei de inerţie a masei m_B:

$$F_{iB}=m_B r\omega^2(\cos\varphi+ +A_2\cos 2\varphi-A_4\cos 4\varphi+-\ldots),$$

fiecare armonică a acestuia poate fi înlocuită cu doi vectori rotativi.

Astfel,

$$F_{iB1}=m_B r\omega^2\cos\varphi$$

poate fi considerat rezultanta a doi vectori rotativi:

$$F_i'=F_i''=\frac{m_B}{2}r\omega^2,$$

unde $\bar{F}_i'=\overline{OC}$; $\bar{F}_i''=\overline{OD}$; $\bar{F}_{iB1}=\overline{OB}$ (fig. II.136).

Forţele $F_I'=F_I''$ fiind forţe centrifuge constante ca mărime şi rotindu-se cu vitezele ω şi $-\omega$, vor putea fi echilibrate fiecare cu cîte o contragreutate de mase egale cu $\frac{m_B}{2}$, care se rotesc în jurul axei maşinii sau în jurul a două axe paralele aşezate simetric faţă de aceasta.

Realizarea tehnică a acestei proprietăţi este redată schematic în fig. II.137.

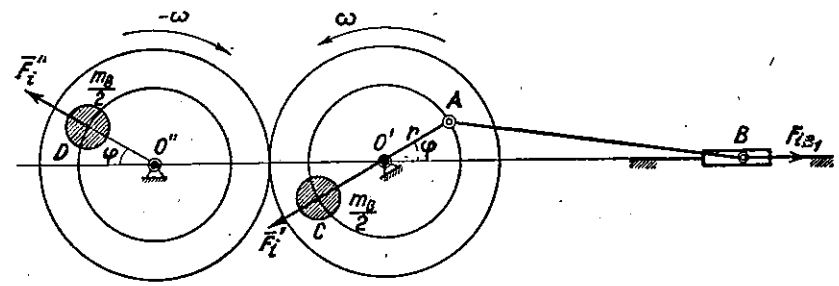


Fig. II.137. Echilibrarea forţei de inerţie de ordine $1F_{iB1}$ a pistonului, cu două greutăţi rotative.

In prelungirea manivelei motoare, în punctul C, se plasează o masă $\frac{m_B}{2}$ la distanţa r de axa de rotaţie, iar a doua masă se plasează în punctul D pe o roată care se roteşte cu viteza unghiulară $-\omega$ prin intermediul unui sistem de angrenaje.

Mai utilizată este dispoziţia din fig. II.138, *a*. Axele O' şi O'' primesc mişcarea de la arborele motor prin intermediul angrenajelor.

In fig. II.138, *b* este arătată dispoziţia angrenajelor faţă de arborele motor astfel încît să se poată realiza simetria celor două contragreutăţi faţă de direcţia xx de deplasare a pistonului.

Pentru o poziţie oarecare φ a manivelei motoare şi o excentricitate r_I a contragreutăţilor care trebuie să echilibreze forţa de inerţie de ordinul 1, există relaţia:

$$\bar{F}_{iB1}=\bar{F}_{iC}+\bar{F}_{iD}.$$

Proiectată pe axa x rezultă:

$$m_B r\omega^2\cos\varphi=m_C e\omega^2\cos\varphi+m_D e\omega^2\cos\varphi.$$

Cum $m_C=m_D=m'$, se obţine:

$$m'=\frac{r}{e}\frac{m_B}{2}, \qquad \text{(II.429)}$$

După cum se vede în fig. II.138, *b*, mişcarea contragreutăţii din C care se roteşte în jurul axului O' este primită de la angrenajele *1, 2* şi *2, 3*, roata *2* fiind parazită, în timp ce pentru contragreutatea din D, care se roteşte în jurul lui O'', mişcarea este primită de la angrenajul *4, 5*.

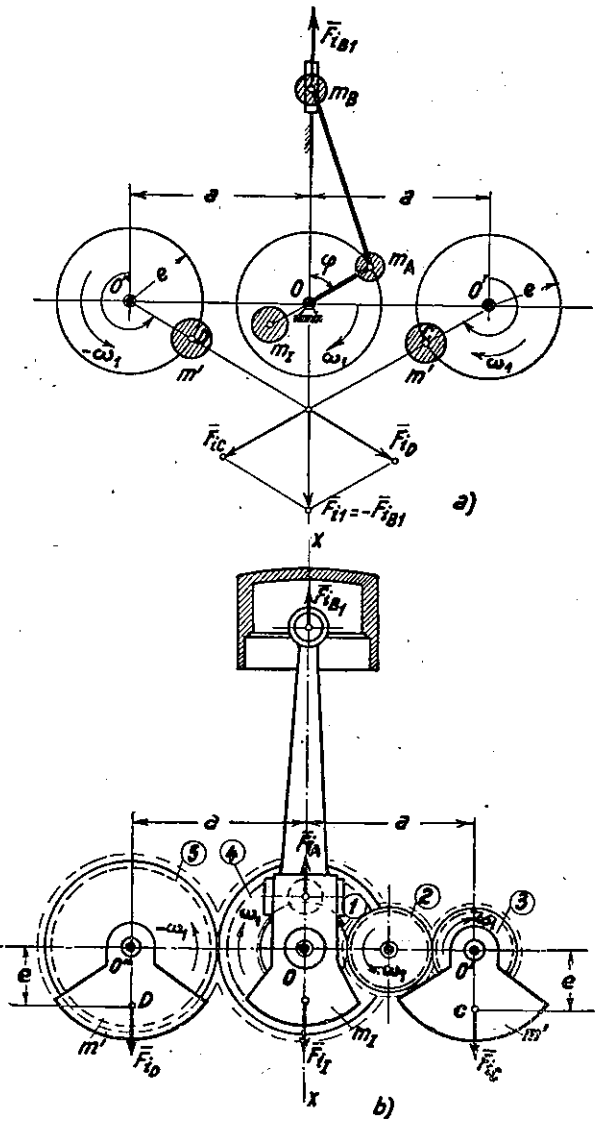


Fig. II.138. Echilibrarea forțelor de inerție de ordinul 1 F_{iB1} a masei m_B a pistonului cu două contragreutăți rotative de mase $m' = \frac{1}{2} m_B$.

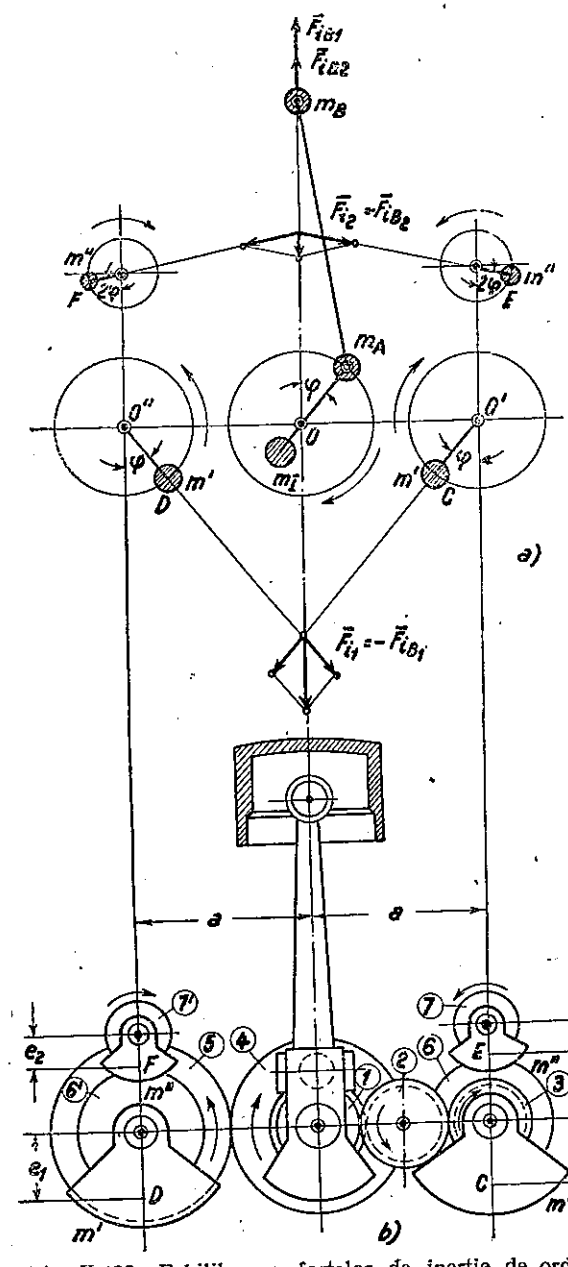


Fig. II.139. Echilibrarea forțelor de inerție de ordinele 1 și 2 ale pistonului cu patru contragreutăți rotative: m' cu vitezele unghiulare ω_1, $-\omega_1$; m'' cu vitezele unghiulare $2\omega_1$, $-2\omega_1$.

Construcţia angrenajelor şi a celor două contragreutăţi este făcută astfel, încît acestea din urmă să lucreze în acelaşi plan cu forţa de inerţie F_{iB1} a pistonului şi a părţii din bielă (masa m_B).

Echilibrarea forţelor de inerţie de ordinul 2 se va face tot cu mase rotative, care se rotesc cu viteze unghiulare de două ori mai mari.

In fig. II.139, *a* este arătată schematic dispoziţia contragreutăţilor la un motor la care se echilibrează forţele de inerţie de ordinele 1 şi 2, iar în fig. II.139, *b* — dispoziţia angrenajelor.

Valoarea contragreutăţilor care echilibrează forţa de inerţie de ordinul 2 este

$$m'' = \frac{r}{e_2}\frac{A_2 m_B}{2}, \qquad \text{(II.430)}$$

care rezultă dintr-un calcul asemănător cu primul.

§ 36. ECHILIBRAREA MOTOARELOR CU MAI MULŢI CILINDRI

36.1. Motoarele cu doi cilindri

Schemele după care se pot construi motoarele cu doi cilindri sînt redate în fig. II.140—II.143.

In fig. II.140, *a* nu există nici un decalaj α între cei doi cilindri ai motorului ($\alpha=0$).

Pentru uniformizarea notaţiilor se va conveni să se noteze în general:

F_{ij}^k — amplitudinea forţei de inerţie de ordinul j corespunzătoare maselor în mişcare de translaţie ale pistonului cu numărul de ordine k; astfel, de exemplu:

F_{i4}^2 — reprezintă amplitudinea forţei de inerţie de ordinul 4 a pistonului şi a părţii din bielă repartizată static în bulonul de articulaţie, corespunzătoare cilindrului al doilea.

Proiecţia acesteia pe direcţia de deplasare a pistonului, cînd manivela face unghiul φ cu această direcţie, este:

$$F_{i4x}^2 = F_{i4}^2 \cos 4\varphi = m_B r\omega^2 A_4 \cos 4\varphi.$$

In cazul motorului din fig. II.140, *a* se vede imediat că forţele de inerţie ale celor doi cilindri sînt în tot timpul egale şi de acelaşi sens, cu alte cuvinte:

$$F_{ij}^1 = F_{ij}^2.$$

In fig. II.140, *b* şi *c* s-au trasat vectorii $F_{i1}^1 = F_{i1}^2$ şi $F_{i2}^1 = F_{i2}^2$ din care se constată că, fiind în fază, echilibrarea lor trebuie realizată la fel ca şi la motorul monocilindric: fie printr-o greutate de masă $m_B \frac{r}{e}$, în cazul cînd se urmăreşte mutarea efectului forţei de inerţie într-un plan perpendicular, fie printr-o greutate de masă $m_B \frac{r}{2e}$, cînd se urmăreşte repartizarea efectului în mod egal în cele două plane.

Aceste mase se plasează fie în prelungirea manivelelor arborelui cotit împreună cu masa care trebuie să echilibreze şi pe m_A, fie pe cele două roţi ale volantului (fig. II.140, *a*).

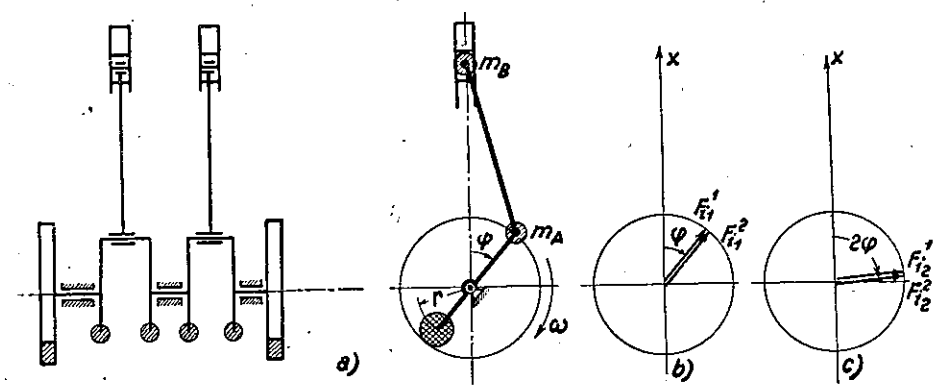


Fig. II.140. Schema motorului cu 2 cilindri fără decalaj între manivele (fig. II.140, *a*) şi diagramele vectoriale ale forţelor de inerţie de ordinul 1 (fig. II.140, *b*) şi de ordinul 2 (fig. II.140, *c*) ale masei m_B care nu se echilibrează.

Evident că la toate motoarele cu mai mulţi cilindri, masele tuturor pieselor (biele, pistoane etc.) sînt identice.

Valorile forţelor de inerţie în mişcare de translaţie sînt în acest caz:

$$F_{i1x}^1 + F_{i1x}^2 = 2m_B r\omega^2 \cos\varphi;$$

$$F_{i2x}^1 + F_{i2x}^2 = 2m_B A_2 r\omega^2 \cos 2\varphi,$$

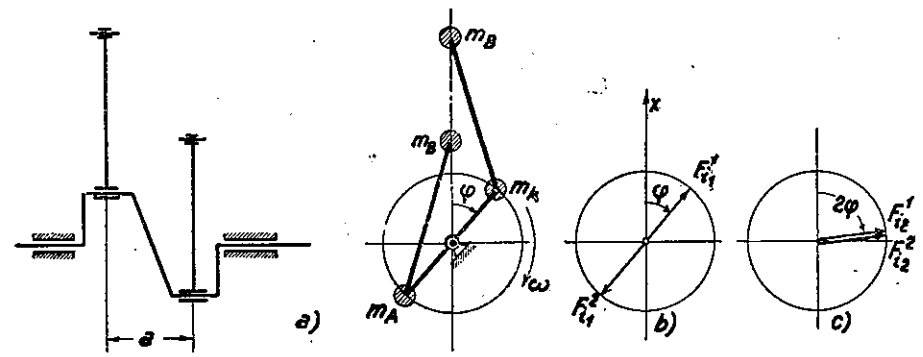


Fig. II.141. Schema motorului cu doi cilindri decelaţi cu 180° (fig. II.141, *a*) şi diagramele vectoriale ale forţelor de inerţie de ordinul 1 (fig. II.141, *b*) care se echilibrează şi ale forţelor de inerţie de ordinul 2 (fig. II.141, *c*) care nu se echilibrează.

în care, conform formulelor (II.20), avem:

$$A_2 = \lambda + \frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{15}{128}\lambda^5 + \ldots$$

In fig. II.141, *a* cele două manivele sînt decalate cu 180°, pistoanele fiind plasate de aceeași parte a arborelui cotit.

Aici $F_{i1}^{I}=-F_{i1}^{2}$, deoarece în orice moment

$$F_{i1x}^{I}=m_B r\omega^2\cos\varphi \quad \text{şi}$$

$$F_{i1x}^{2}=m_B r\omega^2\cos(\varphi+\pi)=-m_B r\omega^2\cos\varphi.$$

Insă

$F_{i2}^{1}=F_{i2}^{2}$, deoarece:

$F_{i2x}^{1}=m_B A_2 r\omega^2\cos 2\varphi$ şi

$F_{i2x}^{2}=m_B A_2 r\omega^2\cos 2(\varphi+\pi)=m_B A_2 r\omega^2\cos 2\varphi.$

Vectorii sînt reprezentați în fig. II.141, *b* şi II.141, *c*.

Rezultanta forțelor de inerție de ordinul 2:

$$F_{i2}=2m_B A_2 r\omega^2\cos 2\varphi$$

va putea fi echilibrată cu două greutăți rotative după o construcție asemănătoare celei redate în fig. II.139, *b*, din care se suprimă contragreutățile m'.

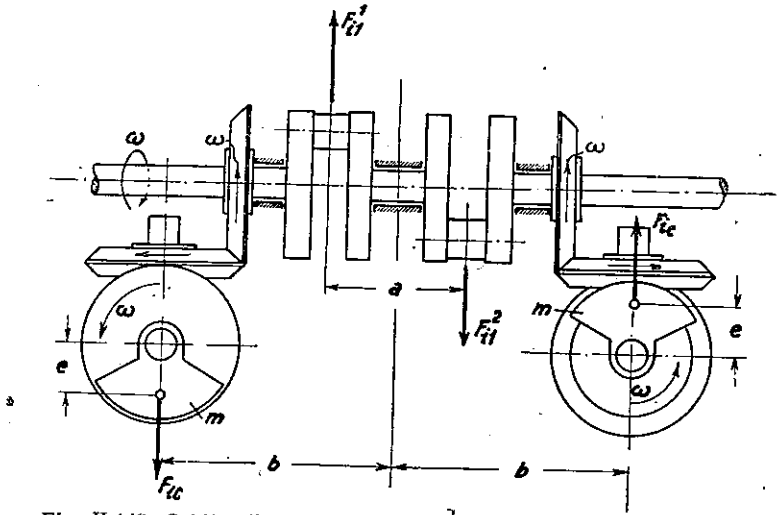


Fig. II.142. Schița dispozitivului de echilibrare a momentului de răsturnare prin contragreutăți rotative, la motorul cu doi cilindri din fig. II.141, *a*.

Apare în plus un moment de răsturnare în jurul axei Oy a motorului, din cauză că cele două biele se mișcă în plane diferite.

Acest moment are valoarea

$$M_y=aF_{ix},$$

în care

$$F_{ix}=F_{i1x}+F_{i2x}+\dots$$

Momentul de răsturnare de ordinul 1 se poate echilibra cu două contragreutăți dispuse ca în fig. II.142, care sînt mișcate în același sens cu ajutorul unui sistem de angrenaje conice.

Mărimea celor două contragreutăți rezultă din egalarea celor două momente de răsturnare:

$$M_{y1}=aF_{i1x} \quad \text{şi} \quad M_{ic}=2bF_{ic}$$

sau înlocuind:

$$2bme\omega^2\cos\varphi=am_B r\omega^2\cos\varphi,$$

de unde

$$m=\frac{a}{2b}\frac{r}{e}m_B. \qquad \text{(II.431)}$$

La motorul cu doi cilindri din fig. II.143, *a* echilibrarea forțelor de inerție este totală din cauza simetriei celor două mecanisme. Vectorii F_{ij} se anulează doi cîte doi, după cum s-a arătat şi în diagramele din fig. II.143, *b*.

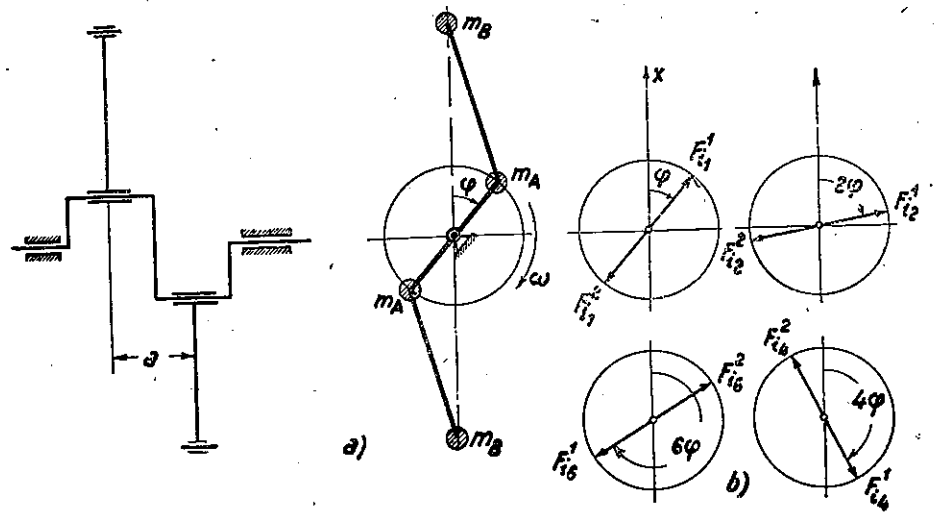


Fig. II.143. Schema motorului cu doi cilindri montați de o parte şi de alte a arborelui motor (fig. II.143, *a*) şi diagramele vectoriale ale forțelor de inerție de ordinul 1...6 (fig. II.143, *b*) care se echilibrează.

La motorul cu doi cilindri în V la care unghiul de decalaj este de 90° (fig. II.144, *a*) forțele de inerție de ordinul 1 ale celor doi cilindri dau o rezultantă dirijată după direcția manivelei comune, după cum se vede uşor în fig. II.144, *b*. Acest lucru rezultă şi din calculul analitic de mai jos:

$$F_{i1}^{1}=m_B r\omega^2\cos\varphi;$$

$$F_{i1}^{2}=m_B r\omega^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=m_B r\omega^2\sin\varphi.$$

Dacă direcţiile celor două pistoane fac un unghi de 45° cu orizontala, atunci în fig. II.144, *b* se vede că rezultanta

$$F_{i1}=\sqrt{\left(F_{i1}^{1}\right)^{2}+\left(F_{i1}^{2}\right)^{2}}=m_B r\omega^2$$

face cu orizontala unghiul $45°+\varphi$.

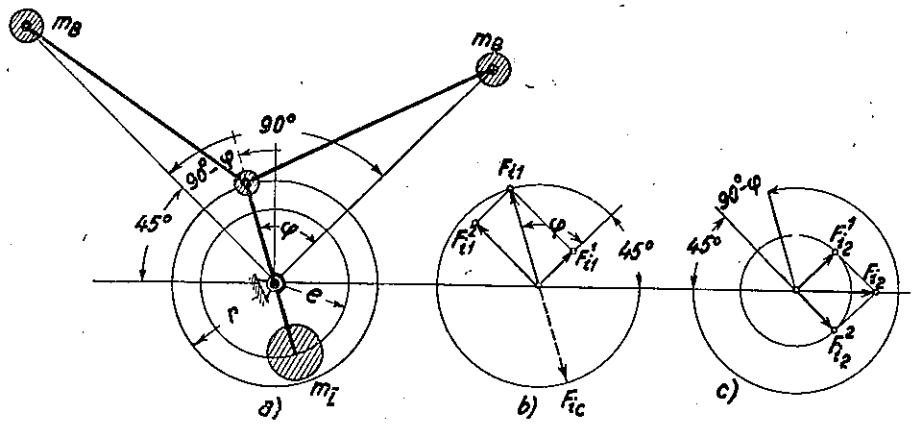


Fig. II.144. Schema motorului cu doi cilindri în V (fig. II.144, *a*) şi diagramele vectoriale ale forţelor de inerţie de ordinul 1 (fig. II.144, *b*) care se pot echilibra cu o contragreutate rotativă m_I şi ale forţelor de inerţie de ordinul 2 (fig. II.144, *c*) care dau o rezultantă F_{i2} de direcţie constantă.

Ea se va echilibra cu o contragreutate de masă

$$m_I'=m_B\frac{r}{e}, \qquad \text{(II.432)}$$

astfel că întreaga contragreutate plasată în prelungirea manivelei va avea masa

$$m_I=(m_A+m_B)\frac{r}{e}. \qquad \text{(II.432')}$$

Forţele de inerţie de ordinul al doilea dau o rezultantă care acţionează în planul orizontal.

Acest lucru reiese grafic din fig. II.144, *c* şi din calculul de mai jos:

$$F_{i2}^{1}=m_B A_2 r\omega^2\cos 2\varphi;$$

$$F_{i2}^{2}=m_B A_2 r\omega^2\cos 2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=-m_B A_2 r\omega^2\cos 2\varphi.$$

Rezultanta acestora este

$$F_{i2}=m_B A_2\sqrt{2}\,r\omega^2\cos 2\varphi. \qquad \text{(II.433)}$$

Deoarece F_{i2}^1 şi F_{i2}^2 sînt egale şi simetrice faţă de orizontală, rezultă imediat că F_{i2} este orizontală.

Din aceste patru cazuri cea mai bună echilibrare se realizează la motorul în V din fig. II.144, *a*, după care urmează motorul din fig. II.143, *a* şi II.141, *a*.

Primul, deşi realizează o echilibrare perfectă, nu are o utilizare prea răspîndită din cauza spaţiului mare pe care-l ocupă. De aceea se preferă în locul lui motorul din fig. II.141.

36.2. Motoarele cu trei cilindri

La aceste motoare, coturile celor trei cilindri sînt decalate între ele cu cîte 120° (fig. II.145, *a*).

Echilibrarea forţelor de inerţie în mişcarea de translaţie se realizează pînă la ordinul 4.

Astfel, după cum rezultă din diagrama vectorială din fig. II.145, *c*, forţele de inerţie de ordinul 1 se echilibrează, suma proiecţiilor pe axele *Ox* şi *Oy* fiind zero.

In adevăr,

$$F_{i1x}^{1}+F_{i1x}^{2}+F_{i1x}^{3}=m_B r\omega^2[\cos\varphi+\cos(\varphi+120°)+\cos(\varphi+240°)]=0.$$

La fel (fig. II.145, *d*) suma celor de ordinul 2:

$$F_{i2x}^{1}+F_{i2x}^{2}+F_{i2x}^{3}=m_B A_2 r\omega^2[\cos 2\varphi+\cos 2(\varphi+120°)+\cos 2(\varphi+240°)]=0.$$

In sfîrşit (fig. II.145, *e*), cele de ordinul 4 sînt de asemenea zero:

$$F_{i4x}^{1}+F_{i4x}^{2}+F_{i4x}^{3}=m_B A_4 r\omega^2[\cos 4\varphi+\cos 4(\varphi+120°)+\cos 4(\varphi+240°)]=0.$$

Forţele de inerţie de ordinul 6 (fig. II.145, *f*) se însumează şi dau o rezultantă:

$$F_{i6x}^{1}+F_{i6x}^{2}+F_{i6x}^{3}=m_B A_6 r\omega^2[\cos 6\varphi+\cos 6(\varphi+120°)+\cos 6(\varphi+240°)]=$$
$$=3m_B A_6 r\omega^2\cos 6\varphi=3F_{i6x}. \qquad \text{(II.434)}$$

Deoarece

$$A_6=\frac{9}{128}\lambda^5+\ldots$$

este foarte mic, amplitudinea forţelor de inerţie de ordinul 6 este de asemenea foarte mică şi are, în consecinţă, efect neînsemnat asupra batiului motorului.

Forţele de inerţie F_{ij}^{k} produc însă momente de răsturnare în jurul axei *Oy* perpendiculară pe planul *xOz*.

Astfel, momentul de răsturnare produs de forţele de inerţie de ordinul 1 are valoarea (fig. II.145, *b* şi *c*):

$$M_{y1}^{1}=F_{i1x}^{2}a+F_{i1x}^{3}a=-am_B r\omega^2[\cos(\varphi+120°)-\cos(\varphi+240°)];$$
$$M_{y1}'=-\sqrt{3}\,am_B r\omega^2\sin\varphi. \qquad \text{(II.435)}$$

Momentul de răsturnare produs de forţele de inerţie de ordinul 2 are o valoare asemănătoare:

$$M_{y2}=F_{i2x}^{2}a+F_{i2x}^{3}a=-aA_2 m_B r\omega^2[\cos(2\varphi+240°)-\cos(2\varphi+120°)],$$

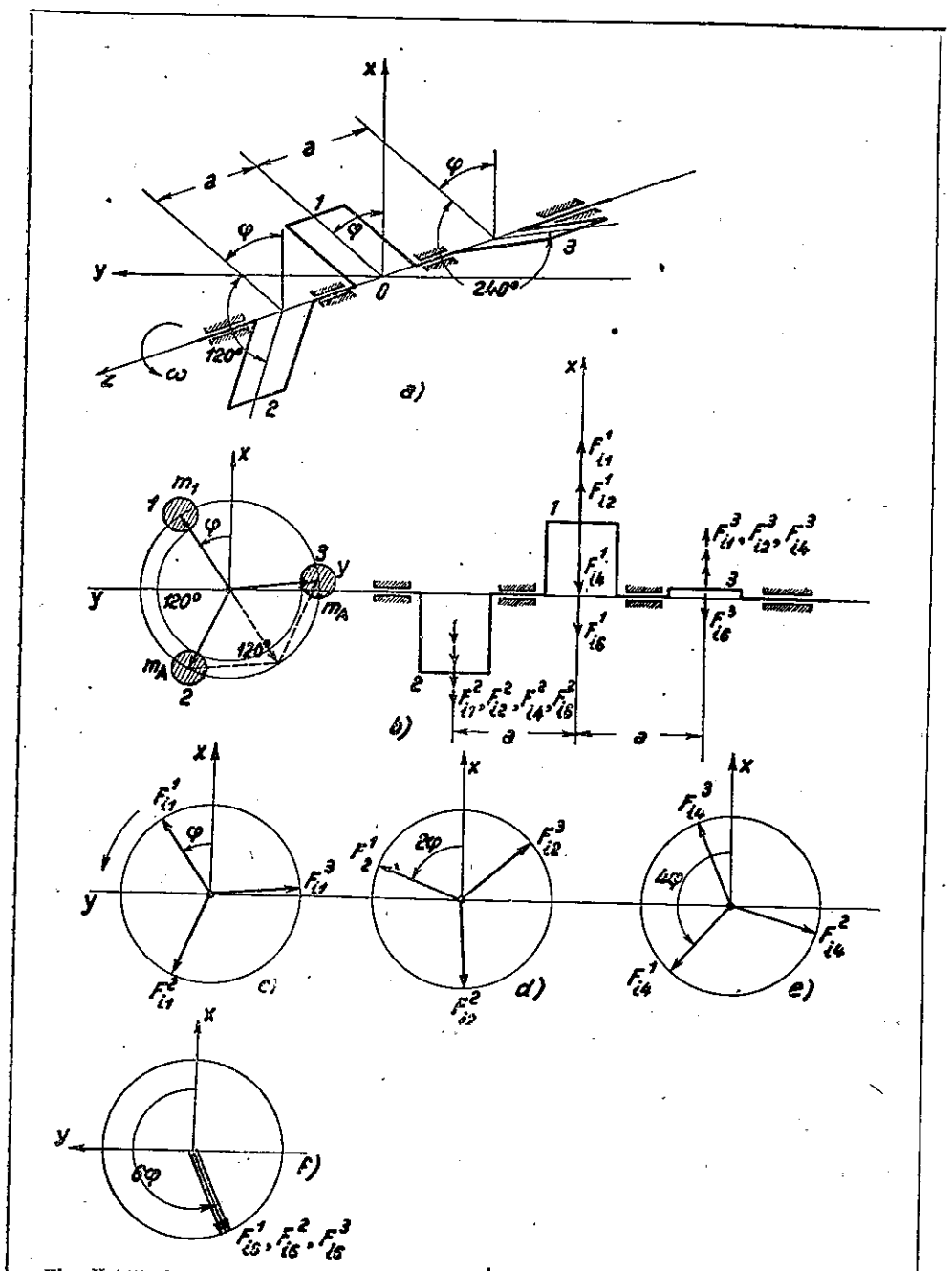


Fig. II.145. Schema motorului cu 3 cilindri și diagramele vectoriale ale forțelor de ordinul 1 ... 4 (fig. II.145, *c* ... *d*) care se echilibrează și a celor de ordinul 6 (fig. II.145, *f*) care nu se echilibrează.

de unde

$$M_{y2} = +\sqrt{3}\, a A_2 m_B r \omega^2 \sin 2\varphi \qquad \text{(II.436)}$$

etc.

Aceste momente de răsturnare pot fi echilibrate tot cu ajutorul greutăților rotative după modelul din fig. II.142, cu mențiunea ca decalajul între manivele și contragreutăți să fie astfel realizat, încît atunci cînd manivela face unghiul φ cu axa Ox, contragreutățile să facă unghiul $\frac{\pi}{2} - \varphi$, respectiv $\frac{3\pi}{2} - \varphi$.

Forțele centrifuge ale maselor m_A (fig. II.145, *b*) ale celor trei coturi se echilibrează. Și aceste mase dau un moment de răsturnare în jurul axei y de forma:

$$M''_{y1} = -\sqrt{3}\, m_A r \omega^2 \sin \varphi. \qquad \text{(II.437)}$$

Astfel, momentul de răsturnare de ordinul 1 care se echilibrează cu mase rotative va fi

$$M_{y1} = M'_{y1} + M''_{y1} = -\sqrt{3}\, a\, (m_A + m_B) r \omega^2 \sin \varphi. \qquad \text{(II.438)}$$

36.3. Motoarele cu patru cilindri

Dispoziția din fig. II.146, *a*, în care coturile arborelui motor sînt decalate cu 180°, se folosește în mod general la motoarele în patru timpi.

Aceste motoare sînt, în consecință, echivalente cu două motoare de doi cilindri în doi timpi.

Forțele de inerție în mișcarea de translație se echilibrează numai pînă la ordinul al doilea inclusiv. In adevăr,

$$\sum_{j=1}^{4} F^j_{i1x} = m_B r \omega^2 [\cos \varphi + \cos (\varphi + \pi) + \cos (\varphi + \pi) + \cos (\varphi + 2\pi)] = 0.$$

Aceasta reiese de altfel destul de clar din diagrama vectorială din fig. II.146, *b*, unde $\varphi = 0$.

Rezultanta forțelor de inerție de ordinul 2 este (fig. II.146, *c*):

Fig. II.146. Schema motorului cu 4 cilindri decalați cu 180° (fig. II.146, *a*) și diagramele forțelor de inerție de ordinul 1 (fig. II.146, *b*) care se echilibrează și a celor de ordinul 4 (fig. II.146, *c*) care nu se echilibrează.

$$\sum_{j=1}^{4} F^j_{i2x} = m_B A_2 \omega^2 [\cos 2\varphi + \cos 2(\varphi + \pi) + \cos 2(\varphi + \pi) + \cos 2(\varphi + 2\pi)],$$

$$F_{i2x} = 4 m_B A_2 r \omega^2 \cos 2\varphi. \qquad \text{(II.439)}$$

In diagrama vectorială rezultă însumarea celor 4 forţe de inerţie pentru cazul $\varphi=0$, care pot fi echilibrate cu ajutorul maselor rotative la fel ca şi pentru motorul cu doi cilindri.

Momentele de răsturnare din cazul motorului cu doi cilindri dispar, astfel că din acest punct de vedere motorul cu patru cilindri poate fi considerat că are o bună echilibrare.

Forţele centrifuge ale masalor m_A se echilibrează de asemenea două cîte două.

Deoarece momentul de răsturnare al acestor forţe centrifuge produce momente încovoietoare importante în lagăre, se procedează din această cauză la echilibrarea fiecărui cot în parte, ca şi în fig. II.140, *a*.

O altă dispoziţie a cilindrilor este cea arătată în fig. II.147, *a* la care decalajele între coturi sînt de 90°.

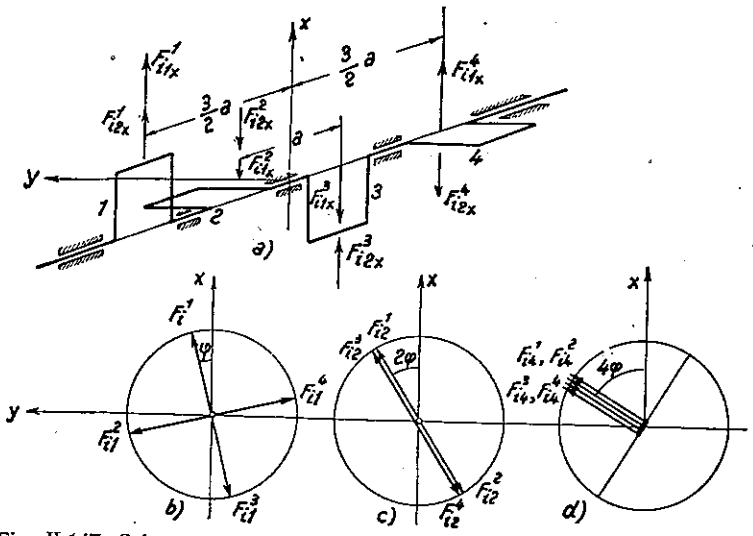


Fig. II.147. Schema motorului cu 4 cilindri decalaţi cu 90° (fig. II.147, *a*) şi diagramele vectoriale ale forţelor de inerţie de ordinele 1 şi 2 (fig. II.147, *b* şi *c*) care se echilibrează şi a celor de ordinul 4 (fig. II.147, *d*) care nu se echilibrează.

Forţele de inerţie pînă la ordinul 4 exclusiv ale maselor m_B în mişcarea de translaţie se echilibrează, după cum rezultă din diagramele vectoriale din fig. II.147, *b* şi *c* şi din calculul analitic de mai jos:

$$\sum_{j=1}^{4} F^j_{i1x}=m_B r\omega^2\left[\cos\varphi+\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\varphi+\pi)+\cos\left(\varphi+\frac{3\pi}{2}\right)\right]=0$$

(fig. II.147, *b*);

$$\sum_{j=1}^{4} F^j_{i2y}=m_B A_2 r\omega^2[\cos 2\varphi+\cos(2\varphi+\pi)+\cos(2\varphi+2\pi)+\cos(2\varphi+3\pi)]=0$$

(fig. II.147, *c*);

$$\sum_{j=1}^{4} F^j_{i4x}=m_B A_4 r\omega^2[\cos 4\varphi+\cos(4\varphi+2\pi)+\cos(4\varphi+4\pi)+\cos(4\varphi+6\pi)]=$$
$$=F_{i4}=4m_B A_4 r\omega^2\cos 4\varphi: \qquad \text{(II.440)}$$

Aceste forţe de inerţie produc momente de răsturnare în jurul axei y.

Astfel, momentul de răsturnare de ordinul 1 rezultă din fig. II.147, *a* luînd momentele în raport cu axa y:

$$M'_{y1}=\frac{3}{2}aF^1_{i1x}+\frac{1}{2}aF^3_{i1x}-\frac{1}{2}aF^2_{i1x}-\frac{3}{2}aF^4_{i1x}=$$
$$=\frac{1}{2}m_B ar\omega^2[3\cos\varphi+\cos\varphi-\sin\varphi-3\sin\varphi].$$

Făcînd calculele se obţine:

$$M'_{y1}=2\,m_B ar\omega^2(\cos\varphi-\sin\varphi)$$

sau

$$M'_{y1}=\sqrt{8}\,m_B ar\omega^2\cos(\varphi+45°). \qquad \text{(II.441)}$$

Momentul de răsturnare în jurul axei Oy datorit forţelor centrifuge ale maselor m_A are o formă asemănătoare, deoarece acţionează în aceleaşi sensuri şi la aceleaşi distanţe.

Forma lui este

$$M''_y=\sqrt{8}\,m_A ar\omega^2\cos(\varphi+45°). \qquad \text{(II.442)}$$

Momentul total de răsturnare de ordinul 1 este deci

$$M_{y1}=M'_{y1}+M''_{y1}=\sqrt{8}\,a(m_A+m_B)r\omega^2\cos(\varphi+45°). \qquad \text{(II.443)}$$

El se echilibrează cu mase rotative după sistemul indicat în fig. II.142.

Momentul de răsturnare de ordinul 1 în jurul axei Ox, provocat de componentele după axa Oy ale forţelor centrifuge ale maselor m_A are expresia

$$M''_{x1}=\sqrt{8}\,m_A ar\omega^2\sin(\varphi+45°). \qquad \text{(II.444)}$$

Acest moment caută să răsucească motorul într-un plan orizontal, solicitînd buloanele de fundaţie la forfecare.

Momentul de răsturnare de ordinul 2 în jurul axei Oy rezultă imediat din fig. II.147, *a* şi *c*:

$$M'_{y2}=\frac{3}{2}aF^1_{i2x}+\frac{3}{2}aF^4_{i2x}-\frac{1}{2}aF^2_{i2x}-\frac{1}{2}aF^3_{i2x};$$

$$M'_{y2}=\frac{1}{2}m_B aA_2 r\omega^2[3\cos 2\varphi+3\cos 2\varphi-\cos 2\varphi-\cos 2\varphi],$$

de unde:

$$M'_{y2}=2\,m_B aA_2 r\omega^2\cos 2\varphi. \qquad \text{(II.445)}$$

Momentul de răsturnare de ordinul 4 este egal cu zero, după cum uşor se poate deduce din fig. II.147, *a* şi diagrama fig. II.147, *d*.

Echilibrarea momentelor $M'_{y2},\ldots,M'_{y6},\ldots$ nu se face practic, efectul lor fiind mic.

O altă dispoziţie a cilindrilor motorului cu patru cilindri este arătată în fig. II.148, *a* la care succesiunea fazelor ciclului termic nu coincide cu a cilindrilor.

Diagramele forţelor de inerţie F_{ij}^k sînt arătate în fig. II.148, *b*, *c* şi *d*.

Momentul de răsturnare în jurul axei *Oy* al forţelor de inerţie de ordinul 1 rezultă imediat, urmărind fig. II.148, *a*:

$$M'_{y1}=\frac{3}{2}a\left(F^1_{i1x}+F^4_{i1x}\right)-\frac{1}{2}a\left(F^2_{i1x}+F^3_{i1x}\right).$$

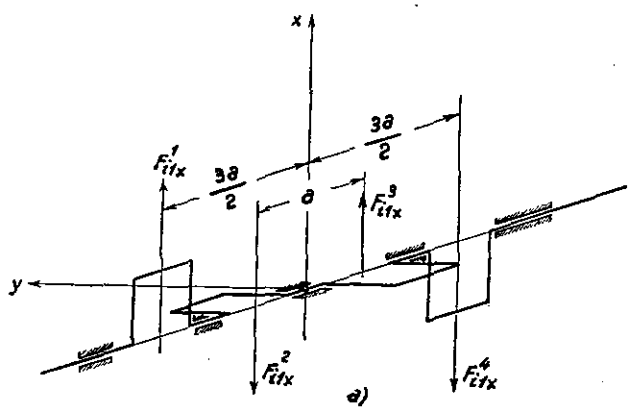


Fig. II.148. Schema motorului cu patru cilindri decalaţi cu 90° şi 180° (fig. II.148, *a*) şi diagramele vectoriale ale forţelor de inerţie de ordinele 1 şi 2 care se echilibrează (fig. II.148, *b* şi *c*) şi a celor de ordinul 4 (fig. II.148, *d*) care nu se echilibrează.

Înlocuind valorile lui F^l_{i1x} deduse din fig. II.148, *b*, rezultă:

$$M'_{y1}=\frac{1}{2}m_B r\omega^2(3\cos\varphi+3\cos\varphi-\sin\varphi-\sin\varphi)$$

sau:

$$M'_{y1}=m_B a r\omega^2(3\cos\varphi-\sin\varphi); \qquad \text{(II.446)}$$

dacă se notează cu

$$\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{3};\quad \beta=18{,}4°,$$

expresia de mai sus devine:

$$M'_{y1}=\sqrt{10}\,m_B a r\omega^2\cos(\varphi+\beta). \qquad \text{(II.446')}$$

Celelalte expresii ale momentelor forţelor de inerţie de ordine superioară se deduc uşor.

36.4. Motoarele cu şase cilindri

În fig. II.149 şi II.150 sînt arătate două dispoziţii ale cilindrilor motoarelor cu 6 cilindri.

Prima dispoziţie nu este altceva decît reunirea a două motoare cu trei cilindri din fig. II.145.

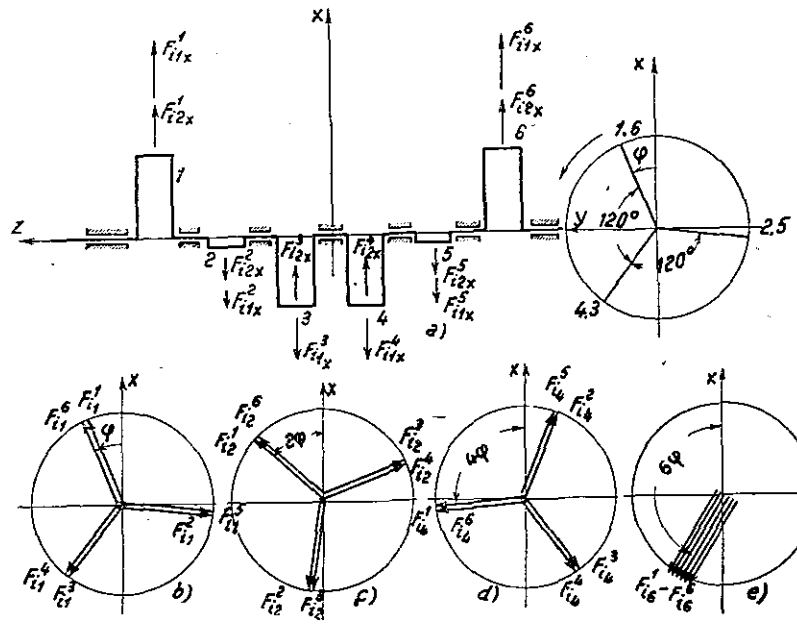


Fig. II.149. Schema motorului cu 6 cilindri decalaţi cu 120° (fig. II.149, *a*) şi diagramele vectoriale ale forţelor de inerţie de ordinele 1, 2, 4 (fig. II.149, *b*, *c* şi *d*) care se echilibrează şi a celor de ordinul 6 (fig. II.149, *e*) care nu se echilibrează.

Forţele de inerţie F_{ij}^k se echilibrează pînă la ordinul 6 exclusiv.

Acest lucru rezultă din diagramele vectoriale din fig. II.149, *b*—*d*, cum şi din calculul de mai jos:

$$\sum_{k=1}^{6}F^k_{i1}=m_B r\omega^2[\cos\varphi+\cos(\varphi+240)+\cos(\varphi+120)+\cos(\varphi+120)+\\+\cos(\varphi+240)+\cos(\varphi+360)]=0;$$

$$\sum_{1}^{6}F^k_{i2}=m_B A_2 r\omega^2[\cos 2\varphi+\cos 2(\varphi+240)+\cos 2(\varphi+120)+\\+\cos 2(\varphi+120)+\cos 2(\varphi+240)+\cos 2(\varphi+360)]=0;$$

$$\sum_{1}^{6}F^k_{i4}=m_B A_4 r\omega^2[\cos 4\varphi+\cos 4(\varphi+240)+\cos 4(\varphi+120)+\\+\cos 4(\varphi+120)+\cos 4(\varphi+240)+\cos 4(\varphi+360)]=0;$$

$$\sum_1^6 F_{i6}^k = m_B A_6 r\omega^2 [\cos 6\varphi + \cos 6(\varphi+240) + \cos 6(\varphi+120) + \\ + \cos 6(\varphi+120) + \cos 6(\varphi+240) + \cos 6(\varphi+360)];$$

de unde:

$$F_{i6} = \sum_1^6 F_{i6}^k = 6 m_B A_6 r\omega^2 \cos 6\varphi. \qquad \text{(II.447)}$$

După cum uşor se poate vedea în fig. II.149, *a*, atît momentul de răsturnare de ordinul 1: M'_{y1} cît şi cel de ordinul 2: M'_{y2}, datorite forţelor de inerţie F_{ij}^k, sînt egale cu zero.

De asemenea, şi momentul de răsturnare datorit forţelor centrifuge ale maselor m_A.

Pentru descărcarea lagărelor se utilizează şi aici adoptarea de contragreutăţi la fiecare cot al arborelui.

Forma unui astfel de arbore cotit se utilizează în mod curent la motoarele Diesel în patru timpi.

In fig. II.150, *a*—*e* sînt redate schema arborelui cotit al unui motor cu şase cilindri în doi timpi şi diagramele vectoriale ale forţelor F_{ij}^k, din care se vede echilibrarea lor la fel ca şi în primul caz.

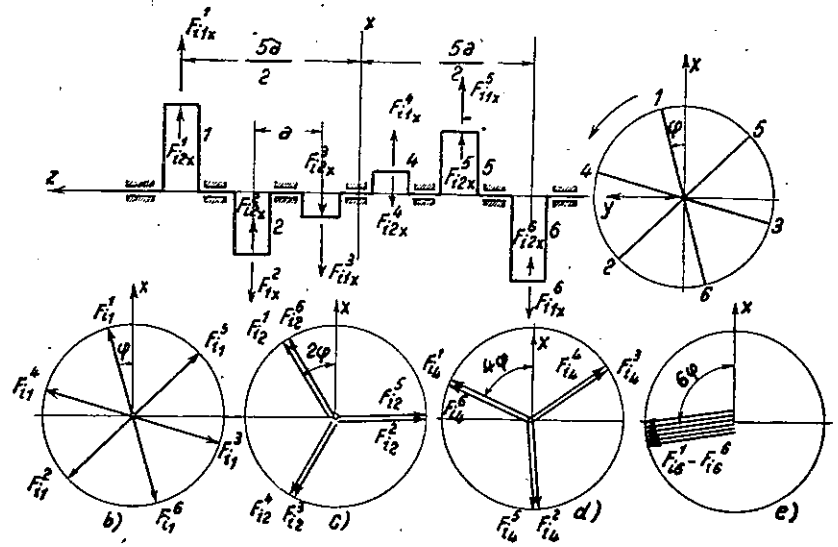


Fig. II.150. Altă dispoziţie a cilindrilor unui motor cu 6 cilindri şi a diagramelor vectoriale ale forţelor de inerţie de ordinul 1 ... 6.

In acest caz, există însă un moment de răsturnare M'_{yl}, a cărui valoare este:

$$M'_{yl} = \frac{5a}{2}(F_{i1x}^1 + F_{i1x}^6) - \frac{3a}{2}(F_{i1x}^2 + F_{i1x}^5) - \frac{a}{2}(F_{i1x}^3 + F_{i1x}^4).$$

Dacă se înlocuiesc valorile lui F_{i1x}^k deduse din diagrama fig. II.150, *b*, rezultă:

$$M'_{y1} = \frac{1}{2} a m_B r\omega^2 [2\times 5\cos\varphi - 2\times 3\cos(60-\varphi) - 2\cos(60+\varphi)],$$

de unde:

$$M'_y = 3 m_B a r\omega^2 \left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\varphi\right). \qquad \text{(II.448)}$$

Dacă se pune $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin 30°}{\cos 30°}$,

expresia de mai sus devine:

$$M'_{y1} = 3{,}464\, m_B a r\omega^2 \cos(\varphi+30°). \qquad \text{(II.448')}$$

Acest moment se echilibrează cu contragreutăţi rotative după dispozitivul arătat în fig. II.142.

Momentele de răsturnare M'_{y2}, M'_{y4}, ... sînt egale cu zero.

36.5. Motoarele cu opt cilindri.

Se dau în fig. II.151 trei variante ale aranjării cilindrilor la motoarele cu opt cilindri.

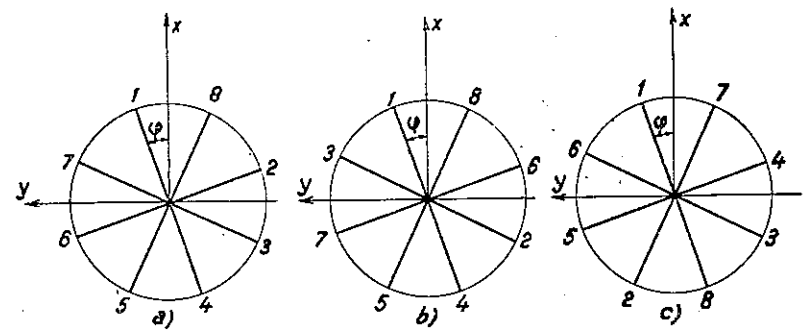


Fig. II.151. Schema de succesiune a cilindrilor la motoarele cu 8 cilindri cu decalajul de 45°.

După cum se vede, cilindrii sînt decalaţi cu 45°, succesiunea lor în linie alternînd după ciclul termic în doi timpi.

Toate forţele de inerţie F_{ij}^k se echilibrează în afară de cele multiplu de 8, după cum se vede uşor în diagramele vectoriale din fig. II.152, care sînt valabile pentru cele trei scheme *a*, *b* şi *c* din fig. II.151 (vectorii F_{ij}^k sînt trecuţi pentru schema II.151, *a*).

La fel ca şi la motoarele cu şase cilindri, masele m_A în mişcare de rotaţie se echilibrează pentru fiecare cilindru în parte.

Momentele de răsturnare M'_{yj} se calculează la fel folosind schema aranjării cilindrilor şi diagramele vectoriale ale forţelor F^k_{ij}.

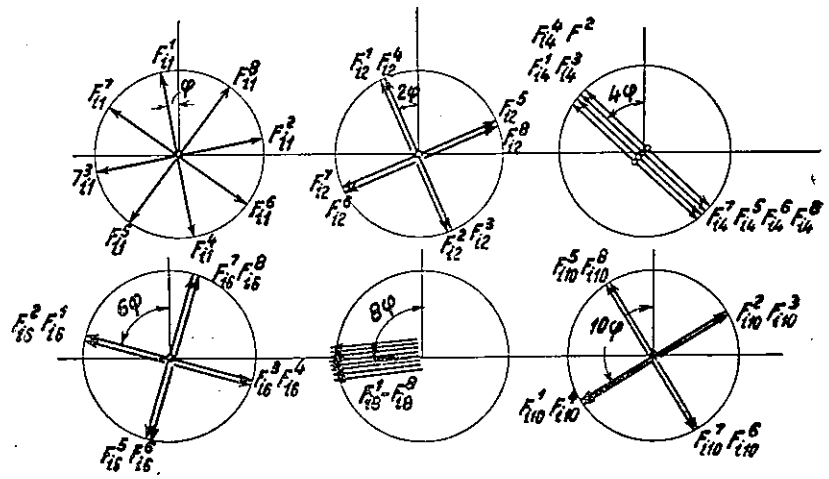


Fig. II.152. Diagramele vectoriale ale forţelor de inerţie de ordinul $1 \ldots 10$ (F^k_{ij}) la un motor cu 8 cilindri decalaţi cu 45°, conform schemelor din fig. II.151.

Astfel, pentru schema din fig. II.151, *a* se obţine:

$$M'_{y1}=0{,}448\ m_B a r\omega^2 \cos(\varphi+67{,}5°); \qquad \text{(II.449)}$$

$$M'_{y2}=0;$$

$$M'_{y4}=16\ m_B A_4 a r\omega^2 \cos(4\varphi+180°); \qquad \text{(II.450)}$$

$$M'_{y6}=0.$$

Pentru schema din fig. II.151, *b*;

$$M'_{y1}=0{,}448\ m_B a r\omega^2 \cos(\varphi+67{,}5°); \qquad \text{(II.451)}$$

$$M'_{y2}=11{,}314\ m_B A_2 a r\omega^2 \cos(2\varphi+45°); \qquad \text{(II.452)}$$

$$M'_{y4}=0;$$

$$M'_{y6}=11{,}314\ m_B A_6 a r\omega^2 \cos(6\varphi-45°). \qquad \text{(II.453)}$$

Pentru schema din fig. II.151, *c*:

$$M'_{y1}=1{,}405\ m_B a r\omega^2 \cos(\varphi+17{,}1°); \qquad \text{(II.454)}$$

$$M'_{y2}=M'_{y4}=M'_{y6}=0.$$

In fig. II.153 este reprezentată schema motorului ZIS 110. Aici cilindrii sînt decalaţi cu cîte 90°, motorul fiind astfel echivalent cu două motoare cu patru cilindri, decalate cu 90°.

După cum rezultă din diagramele vectoriale (II.153, *b*—*f*) forţele F^k_{ij} se echilibrează, afară de cele de ordinul multiplu de 4 ($j=4n$).

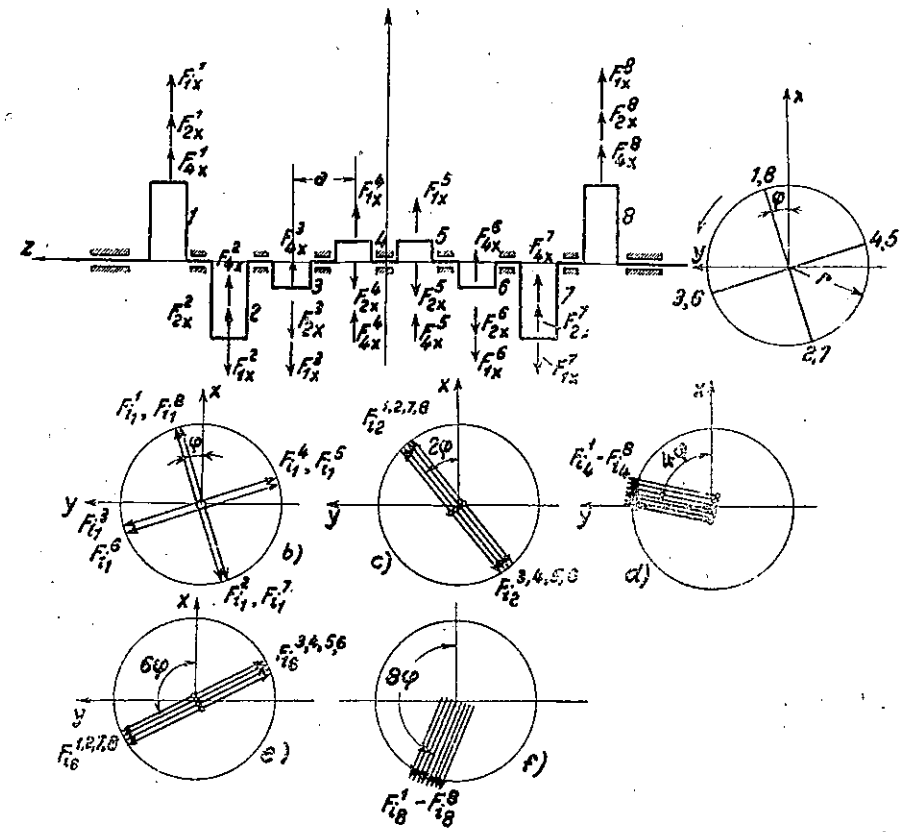


Fig. II.153. Schema motorului cu 8 cilindri decalaţi cu 90° (fig. II.153, *a*) şi diagramele vectoriale ale forţelor de inerţie de ordinul $1 \ldots 8$ (fig. II.153, *b* ... *f*).

Momentele de răsturnare M'_{yj}, după cum uşor se observă în scheme, sînt toate egale cu zero, adică

$$M'_{y1}=M'_{y2}=M'_{y4}=0.$$

In aceasta constă superioritatea schemei motorului ZIS 110 faţă de cele redate în fig. II.151.

36.6. Dezechilibrări ce apar la motoarele cu mai mulţi cilindri (motorul cu patru cilindri)

Deşi la motorul cu patru cilindri din schema fig. II.146, *a* este realizată echilibrarea forţelor de inerţie de ordinul 1 din mişcarea de translaţie, iar arborele motor a fost la rîndul lui echilibrat dinamic pe o maşină de precizie

totuşi, în afară de forţele F_{i2x}, mai apare un dezechilibru datorit variaţiei poziţiei centrului de greutate al ansamblului celor patru pistoane.

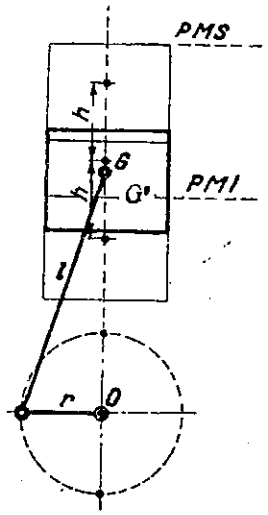


Fig. II.154. Variaţia poziţiei centrului de greutate al sistemului celor patru pistoane la motoarele cu 4 cilindri, din care rezultă un dezechilibraj.

In adevăr, centrul de greutate G al celor patru pistoane, atît atunci cînd pistoanele *1* şi *4* cît şi atunci cînd *2* şi *3* sînt la punctul mort superior, se află la distanţa l de axa de rotaţie (fig. II.154).

Dacă însă pistoanele se află la jumătatea cursei, deci cînd direcţiile coturilor sînt perpendiculare pe cursa pistonului, atunci distanţa $\overline{OG'} < \overline{OG}$.

Pentru cazul unui motor la care $s = 2r = 100$ mm, $l = 180$ mm, $G_{piston} = 500$ g, diferenţa este:

$$e = \overline{OG} - \overline{OG'} = l - \sqrt{l^2 - \frac{s^2}{4}} =$$

$$= 180 - \sqrt{180^2 - 50^2} = 7 \text{ mm.}$$

Efectul este identic cu cel produs de o masă neechilibrată rotitoare de:

$$4G_p \cdot \frac{e}{2} = 2000 \times \frac{0{,}7}{2} = 700 \text{ gcm.}$$

Evident că corectarea echilibrării unui arbore cotit şi a volantului acestui motor cu o precizie de 10 gcm este cu totul inutilă.

Această precizie se efectuează numai în cazul cînd dezechilibrul de mai sus se echilibrează cu ajutorul unor mase rotitoare cu viteza 2ω, după modelul dat în fig. II.142.

BIBLIOGRAFIE

1. Artobolevski I. I., Teoria mecanismelor şi a maşinilor, traducere din limba rusă, Editura Tehnică, 1956.
2. Artobolevski I. I., Zinoviev, Edelstein, Zbornik zadaci pro teorii mehanizmov i maşin, Gosudarstvennoe izdatelstvo tehniko-teoreticeskoi literaturi, Moskva-Leningrad, 1947.
3. Artobolevski I. S., Laboratorul de studii pentru cursul „Teoria mecanismelor şi a maşinilor", traducere din limba rusă, I.D.T., Bucureşti, 70/1432.
4. Beyer Rudolf, Technische Kinematik, Verlag I. Ambrosius Barth, Leipzig, 1931.
5. Bezverselnîi E. S., Atlas po teorii mehanizmov i maşin, Izdatelstvo Harkovskovo Universiteta, Harkov, 1954.
6. Biezeno and Grammel, Engineering Dinamics vol. IV, Internal-combustion engines, Blackie and Son, London, 1954.
7. Bloh Ş. Z., Dinamica lineinîh sistem avtomaticeskovo regulirovania maşîn, Gosudartsvennoe izdalestvo tehnikoteoreticeskoi literaturi, Moskva, 1952.
8. Dobrovolski V. V., Teoria mehanizmov, Gosudarstvennoe naucinotehniceskoe izdatelstvo maşinostroitelnoi literaturî, Moskva, 1953.
9. Frenkel N. Z., Hidraulika, Moskva, 1956.
10. Gerber Georg, Beiträge zur graphischen Kinetostatik zwangläufig geführter Scheiben und Ketten (Getrieben), Dissertation, Technische Hochschule, Karlsruhe, 1935.
11. Green G. W., Theory of machines, Blackie and Son limided, London, and Glasgow, 1955.
12. Heyde Heinrich, Mechanik für Ingineure, Bd. I. B. G. Teubner Verlags Gesellschaft, Leipzig, 1957
13. Kamenski A. V., Cinematica mecanismului de distribuţie al locomotivei cu abur, traducere din limba rusă, Editura Cailor Ferate, Bucureşti, 1957.
14. Kojevnikov I. S., Teoria mehanizmov i maşin, Kiev, 1954.
15. Koreniako i Kremenstein, Teoria mehanizmov i maşin, Kiev, 1954.
16. Kolcin, Mehanika maşin, Maşghiz, 1948.
17. Kraus R., Getriebelehre, Verlag Technik, Berlin, 1951.
18. Jahr W. und Knechtel, Getriebelehre, I, II, Dr. Max Jänicke-Verlag, Leipzig, 1938.
19. Levenson L. B., Teoria mecanismelor şi a maşinilor, traducere din limba rusă, Editura Tehnică, Bucureşti, 1951.
20. Manolescu I. N., Teoria mecanismelor şi a maşinilor (Note de curs), Litografia Institutului de Căi Ferate, Bucureşti, 1955—1956.
21. Maroş D., Note de curs de mecanisme, Institutul de mecanică, Cluj, 1953.
22. Manualul Inginerului, vol. II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.
23. Maşinostroenie, Tom II, Moskva, 1948.
24. Merţalov I. N., Prikladnaia mehanika (redactor V. V. Dobrovolski), Moskva, 1950.
25. Nikolaev I. I., Dinamica şi distribuţia de abur la locomotive, Editura Tehnică a Transporturilor, 1951.
26. Nekrasov I. A., Curs de mecanică teoretică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1955.

27. Novikov P. A., Analiza mișcării discului sertarului sistem Trofîmov, traducere din limba rusă, Editura Căilor Ferate, București, 1957.
28. Pawelka E., Hundert Übungen aus der Mechanik, I. Springer Verlag, Wien, 1948.
29. Prandl Ludwig, Führer durch die Strömungslehre, Friedrich Viewieger & Sohn, Braunschweig, 1957.
30. Rocard Y. et Julien, La stabilité de route des locomotives, Hermann & Co., Paris, 1935.
31. Seleșteanu Al., Calculul modern al organelor de mașini, Editura Tehnică, București, 1957.
32. N. Tipei, Hidro-aerodinamica lubrificației, Editura Academiei R.P.R., 1957.

Articole de revistă

33. Carton I., Le probleme de l'équilibrage (aspects pratiques) dans: „La pratique des industries mecaniques", novembre, 1956.
34. Leven Werner, Die Reibung zwischen Rad und Schiene, im Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens 01, November, 1941.
35. Macmillan H. R., Efficiency of linear mechanisms, conditions for irreversibility, „Engineering", 15 february, 1957.
36. VDMA und AWF, Getriebeblätter.

Responsabil de carte: Ing. Bercu Iosif
Tehnoredactor: Horowitz Strul
Corector responsabil: Pompilian Florin

Dat la cules 01.06.58. Bun de tipar 25.09.58. Hîrtie semi velină de 65 g/m², 70×100/16. Coli editoriale 36,66. Coli de tipar 31. Planșe 5. Comanda P. S. 4303 A. 05660. Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari 621—23.01+621.1.01 : 531.3. Indicele de clasificare pentru bibliotecile mici 621.

Tiparul executat sub comanda nr. 2660 la Întreprinderea Poligrafică Timișoara, str. Popa Șapcă 8. — R.P.R.

E. 15535

ERATĂ

Pag.	Rîndul	In loc de	Se va citi	Din vina
36	Legenda fig. I.28	în linie dreaptă	arbitrare	Editurii
38	13	$\overline{GC}$	$\overline{Gc}$	„
54	10	$\overline{F_2}$	$\overline{F_{21}}$	„
54	1 de jos	$\overline{R}$	$\overline{R_{12}}$	„
55	1			
58	15	momentului	elementului	„
71	4	BD	DC	„
77	4 de jos	$(\overline{p''h''})$	$(\overline{p''g_8''})$	Autorului
86	10	$\overline{99,5}\cdots$	$=\overline{100,3}\cdots$	„
98	18	unghi β	unghi $\beta/2$	Editurii
101	14 de jos	$\varphi'>\varphi$	$\varphi'>\alpha$	„
130	13 de jos	Rezultatele	Rezultantele	„
193	21; 15 de jos	T	T_1	„
199	3 și 8	W_T	W_r	„
210	13	I_{red}	ΔI_{red}	„
210	17	$=I_v+I_{red}$	$=I_v+\Delta I_{red}$	„
211	2 de jos	0000194	0,0000 194	„
231	Legenda fig. II.14	F_0	F_{12}	„
249	10 de jos	η_{1S}	i_{1S}	„
427	8	$=R\cos\varphi$	$=F_i\cos\varphi$	„
437	formula (II.392)	m_i	m_2	Autorului
449	5	$=m,$	$=m_B l_2$	„

Teoria mecanismelor și a mașinilor — Cinetostatica și Dinamica I.